Teorema 3.11 *Sia* $E \subset \mathbb{R}$ *un insieme non vuoto, chiuso e limitato. Allora esistono* $\min E$ *e* $\max E$.

Dimostrazione Dimostriamo l'esistenza del massimo[1] di E. Sia $M = \sup E$: poiché E è non vuoto e limitato $M \in \mathbb{R}$. Supponiamo, per assurdo, che $M \notin E$ ossia che $M \in E^c := \mathbb{R} \backslash E$. Poiché E è chiuso, E^c è aperto; quindi M sarebbe un punto interno di E^c, cioè esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $(M - \varepsilon, M + \varepsilon) \subset E^c$. Ma allora, se $x \in E$, $x \leq M - \varepsilon$ (altrimenti sarebbe $x \geq M + \varepsilon > M$ e M non sarebbe maggiorante di E) e questo significherebbe che $M - \varepsilon < M$ è un maggiorante, ma questo contraddice che M è il più piccolo dei maggioranti. Il Teorema è dimostrato.

[1] Per il l'esistenza del minimo basta osservare che $\min E = -\max(-E)$ dove $-E = \{x : -x \in E\}$ e che, sotto le ipotesi del teorema, anche $-E$ è non vuoto chiuso e limitato.