Definizione "geometrica" di seno e coseno

Sia
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$$
il **cerchio di raggio 1 in $\mathbb{R}^2$ centrato nell'origine** e sia S^+ la parte di S nel primo quadrante:
$$S^+ := S \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ y \geq 0\} \ .$$
Fissiamo un punto $(x,y) \in S^+$. Vogliamo definire la lunghezza dell'arco di circonferenza in S^+ di estremi $(x, \sqrt{1-x^2})$ e $(1,0)$, ossia, dell'insieme
$$S_x := \{(x',y') = \big(x', \sqrt{1-(x')^2}\big) \in S^+ : 0 \leq x' \leq x\} \ .$$
Per fare questo definiamo prima la lunghezza (euclidea) dei segmenti e delle poligonali in $\mathbb{R}^2$.
Un **segmento di estremi** $z_1 = (x_1, x_2)$ **e** $z_2 := (x_2, y_2)$ è, per definizione la porzione della retta passante per z_1 e z_2 "limitata" da z_1 e z_2, ossia, l'insieme[1]
$$\sigma(z_1,z_2) = \{z = z_1 + t(z_2 - z_1) : 0 \leq t \leq 1\} \ . \tag{1}$$
Se z_1, z_2,...,z_n sono $n \geq 2$ punti di $\mathbb{R}^2$ tali che, per $i \neq j$, $\sigma(z_i, z_{i+1}) \cap \sigma(z_j, z_{j+1})$ contiene al più un punto, **la poligonale di vertici** z_1**,** z_2**, ...,** z_n è, per definizione, l'insieme
$$P(z_1, z_2, ..., z_n) := \sigma(z_1,z_2) \cup \cdots \cup \sigma(z_{n-1}, z_n) \ . \tag{2}$$
Definiamo **la lunghezza di un segmento** $\sigma(z_1,z_2)$ come il numero non negativo
$$\ell\big(\sigma(z_1,z_2)\big) := \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \ , \tag{3}$$
e **la lunghezza della poligonale** $P(z_1, z_2, ..., z_n)$ come il numero non negativo
$$\ell\big(P(z_1,z_2,...,z_n)\big) = \sum_{i=1}^{n-1} \ell\big(\sigma(z_i, z_{i+1})\big) \ . \tag{4}$$
Fissato $0 \leq x \leq 1$, diremo che **la poligonale** $P(z_1, z_2, ..., z_n)$ **è inscritta nell'arco di circonferenza** S_x se $z_i = (x_i, y_i) \in S_x$ e $x_1 = x < x_2 < \cdots < x_n = 1$; chiamiamo $\mathcal{P}_x$ la famiglia di tutte le poligonali iscritte in S_x.
La lunghezza dell'arco S_x è definito come l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali iscritte in S_x, in formule:
$$\ell(S_x) := \sup_{P \in \mathcal{P}_x} \ell(P) \ . \tag{5}$$
La funzione $x \in [0,1] \to \ell(S_x)$ viene di solito chiamata la **funzione arcocoseno di** x e si denota con
$$\arccos x := \ell(S_x) \ . \tag{6}$$
Chiaramente, la funzione arccos è una funzione strettamente decrescente di $x \in [0,1]$ e tale che
$$\arccos 0 =: \frac{\pi}{2} \ , \qquad \arccos 1 = 0 \tag{7}$$

[1]Se $z_i = (x_i, y_i)$, $z_1 + t(z_2 - z_1) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$; nel caso $z_1 = z_2$ il segmento $\sigma(z_1, z_2)$ *degenera* nel punto $\{z_1\}$.

Si noti che, qui, $\pi/2$ è *per definizione* la lunghezza del quarto di cinconferenza S_0. Poiché la funzione

$$x \in [0,1] \to t = \arccos x \in [0, \pi/2] \tag{8}$$

è strettamente decrescente, è invertibile e **la sua funzione inversa** (che risulterà anch'essa strettamente decrescente su $[0, \pi/2]$)

$$t \in [0, \pi/2] \to x = \cos t \in [0,1] \ , \tag{9}$$

è per definizione la funzione coseno di t per $t \in [0, \pi/2]$, mentre la funzione

$$t \in [0, \pi/2] \to \ \mathrm{sen}\, t := \sqrt{1 - (\cos t)^2} \in [0,1] \tag{10}$$

è, per definizione, **la funzione seno di** t per $t \in [0, \pi/2]$. Da questa definizione segue immediatamente che $t \to \ \mathrm{sen}\, t$ è una funzione strettamente crescente in $[0, \pi/2]$ e

$$\mathrm{sen}\, 0 = 0 \ , \qquad \mathrm{sen}\, \pi/2 = 1 \ . \tag{11}$$

Estendiamo ora tali funzioni a tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ come segue:

per $t \in (\pi/2, \pi]$, $\cos t := -\cos(\pi - t)$, $\ \mathrm{sen}\, t := \ \mathrm{sen}\, (\pi - t)$;

per $t \in [\pi, 2\pi)$, $\cos t := -\cos(t - \pi)$, $\ \mathrm{sen}\, t := -\,\mathrm{sen}\, (t - \pi)$;

per $t \in \big[2\pi k, 2\pi(k+1)\big)$ con $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\cos t := \cos(t - 2\pi k)$, $\ \mathrm{sen}\, t := \ \mathrm{sen}\, (t - 2\pi k)$.

Non è, ora, difficile verificare tutte le proprietà delle funzioni trigonometriche descritte nell'appendice 1.A di [B].