

NUMERI COMPLESSI

Esercizi svolti

1. Calcolare le seguenti potenze di i :

$$a) i^2, \quad b) i^3, \quad c) i^4, \quad d) \frac{1}{i}, \quad e) i^{34}, \quad f) i^{-7}$$

2. Semplificare le seguenti espressioni:

$$a) (\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i), \quad b) (3 + i)(3 - i) \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i \right),$$

$$c) \frac{5}{(1 - i)(2 - i)(3 - i)}, \quad d) \overline{z + 3i}$$

3. Verificare che $z = 1 \pm i$ soddisfa l'equazione $z^2 - 2z + 2 = 0$.

4. Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi :

$$a) 1 + i - \frac{i}{1 - 2i}, \quad b) (1 + i)(1 - i)(1 + \sqrt{3}i), \quad c) \left(\frac{1 + i}{1 - i} - 1 \right)^2$$

5. Mettere in forma trigonometrica e in forma esponenziale i seguenti numeri complessi:

$$a) z = i, \quad b) z = 1 + i, \quad c) z = \frac{1}{3 + 3i},$$

$$d) z = \frac{4i}{\sqrt{3} + i}, \quad e) z = (1 + i)(2 - 2i)$$

6. Siano:

$$a) z = \frac{2}{\sqrt{3} - i} + \frac{1}{i}, \quad b) z = \frac{1 + i}{2 - 2i}$$

Scrivere in forma algebrica, in forma trigonometrica e in forma esponenziale i numeri complessi z^2 , z^6 , z^{22} .

7. Trovare le radici dei seguenti numeri complessi e disegnarle sul piano di Gauss.

$$a) \sqrt[4]{\sqrt{2}}, \quad b) \sqrt{1 - \sqrt{3}i}, \quad c) \sqrt[3]{1 - i + \sqrt{2}i}$$

8. Sia $z = e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

a) Esprimere z sia in forma algebrica sia in forma trigonometrica.

b) Esprimere le radici cubiche di z in forma esponenziale.

9. Risolvere e rappresentare sul piano di Gauss le soluzioni delle seguenti equazioni:

a) $z^2 + 3iz + 4 = 0$, b) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$,

c) $z|z| - 2z + i = 0$, d) $z\bar{z} - z + \frac{i}{4} = 0$,

e) $z^3 = |z|^2$

10. Risolvere e rappresentare sul piano di Gauss le soluzioni dei seguenti sistemi:

(a) $\begin{cases} \operatorname{Re} [\bar{z}(z + i)] \leq 2 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} z^6 + 7z^3 - 8 = 0 \\ \operatorname{Re}(z) = 1 \end{cases}$

11. E' data la funzione $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ così definita $f(z) = \frac{1 + iz}{iz + i}$.

a) Trovare tutti gli $z \in \mathbf{C}$ per cui $f(z) = z$.

b) Trovare le controimmagini di $3 + i$.

12. Sapendo che $1 + i$ è radice del polinomio $p(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$, trovare le altre radici. Decomporre $p(z)$ in fattori irriducibili su \mathbf{R} e su \mathbf{C} .

13. Verificare che il polinomio :

$$p(z) = z^3 + (1 + 2i)z^2 + [(-\sqrt{3} + 2)i - 2]z - i\sqrt{3} - 2$$

si annulla per $z_0 = -1$ e trovare le altre radici.

Decomporre $p(z)$ in fattori irriducibili .

14. Trovare un polinomio $p(z) \in \mathbf{R}[z]$ di grado 5, avente $a = 3$ come radice semplice, $b = 2 - 3i$ come radice di molteplicità 2, e tale che $p(0) = 1$.

SOLUZIONI degli esercizi sui NUMERI COMPLESSI

1. (a) $i^2 = -1$ (per definizione)
 (b) $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$
 (c) $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$
 (d) $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$
 (e) $i^{34} = i^{32} \cdot i^2 = (i^4)^8 \cdot i^2 = 1^8 \cdot (-1) = -1$
 (f) $i^{-7} = (i^7)^{-1} = (i^4 \cdot i^3)^{-1} = (-i)^{-1} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i^2} = i$
2. (a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) = \sqrt{2} - i - i + \sqrt{2}i^2 = \sqrt{2} - 2i - \sqrt{2} = -2i$
 (b) $(3 + i)(3 - i) \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i \right) = (9 - i^2) \frac{2 + i}{10} = (9 + 1) \frac{2 + i}{10} = 2 + i$
 (c) $\frac{5}{(1 - i)(2 - i)(3 - i)} = \frac{5}{(2 - i - 2i + i^2)(3 - i)} = \frac{5}{(1 - 3i)(3 - i)} =$
 $= \frac{5}{3 - i - 9i + 3i^2} = \frac{5}{-10i} = \frac{1}{2} i$
 (d) $\overline{\bar{z} + 3i} = \bar{\bar{z}} + \overline{3i} = z + 3\bar{i} = z - 3i$

3. Calcoliamo $z^2 - 2z + 2$ per $z = 1 + i$:

$$(1 + i)^2 - 2(1 + i) + 2 = 2i - 2 - 2i + 2 \equiv 0$$

Dunque $z = 1 + i$ soddisfa l'equazione $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Facciamo lo stesso con $z = 1 - i$:

$$(1 - i)^2 - 2(1 - i) + 2 = -2i - 2 + 2i + 2 \equiv 0$$

Pertanto anche $z = 1 - i$ soddisfa l'equazione $z^2 - 2z + 2 = 0$.

4. (a) $\left| 1 + i - \frac{i}{1 - 2i} \right| = \left| 1 + i - \frac{i(1 + 2i)}{1 - 4i^2} \right| = \left| 1 + i - \frac{i - 2}{5} \right| = \left| \frac{5 + 5i - i + 2}{5} \right| =$
 $= \frac{1}{5} |7 + 4i| = \frac{1}{5} \sqrt{49 + 16} = \frac{1}{5} \sqrt{65}$
 (b) $|(1 + i)(1 - i)(1 + \sqrt{3}i)| = |(1 - i^2)| |1 + \sqrt{3}i| = 2\sqrt{1 + 3} = 4$
 (c) $\left| \left(\frac{1 + i}{1 - i} - 1 \right)^2 \right| = \left| \frac{1 + i}{1 - i} - 1 \right|^2 = \left| \frac{2i}{1 - i} \right|^2 = \frac{|2i|^2}{|1 - i|^2} = \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2$
 $= \left| \frac{2i(1 + i)}{2} \right|^2 = |i|^2 |1 + i|^2 = 1 \cdot (\sqrt{2})^2 = 2$

5. (a) $z = i$

Il modulo di z è $|z| = 1$. Posto $\theta = \text{Arg}(z)$, si ha:

$$\begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = 1 \end{cases} \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

Pertanto in forma trigonometrica e in forma esponenziale:

$$z = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, \quad z = 1 \cdot e^{i\pi/2} = e^{i\pi/2}$$

(b) $z = 1 + i$; $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Se $\theta = \text{Arg}(z)$:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

In forma trigonometrica e in forma esponenziale:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad z = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

(c) $z = \frac{1}{3+3i} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{3} \frac{1-i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{3} \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1}{6}(1-i)$

$|z| = \frac{1}{6}\sqrt{2}$. Se $\theta = \text{Arg}(z)$:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \theta = -\frac{\pi}{4}$$

In forma trigonometrica e in forma esponenziale:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{6} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right), \quad z = \frac{\sqrt{2}}{6} e^{-i\pi/4}$$

(d) $z = \frac{4i}{\sqrt{3}+i} = \frac{4i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{4(\sqrt{3}i-i^2)}{3-i^2} = 1 + \sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Se $\theta = \text{Arg}(z)$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \theta = \frac{\pi}{3}$$

In forma trigonometrica e in forma esponenziale

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad z = 2 e^{i\pi/3}$$

(e) $z = (1+i)(2-2i) = 2(1+i)(1-i) = 2(1-i^2) = 4$

$|z| = 4$. Se $\theta = \text{Arg}(z)$

$$\begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \implies \theta = 0$$

In forma trigonometrica ed esponenziale

$$z = 4(\cos 0 + i \sin 0), \quad z = 4 e^{i0}$$

$$6. \quad (a) \quad z = \frac{2}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{i} = \frac{2(\sqrt{3}+i)}{3-i^2} + \frac{i}{i^2} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} - i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$|z| = \frac{1}{2}\sqrt{3+1} = 1. \quad \text{Se } \theta = \text{Arg}(z)$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \implies \theta = -\frac{\pi}{6}$$

Calcoliamo adesso i numeri z^2 , z^6 , z^{22} .

- $|z^2| = 1^2 = 1$, $\text{Arg}(z^2) = 2 \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$

In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

$$z^2 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \quad z^2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad z^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- $|z^6| = 1$, $\text{Arg}(z^6) = 6 \text{Arg}(z) = -\pi = \pi - 2\pi$.

In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

$$z^6 = \cos \pi + i \sin \pi, \quad z^6 = e^{i\pi}, \quad z^6 = -1$$

- $|z^{22}| = 1$, $\text{Arg}(z^{22}) = 22 \text{Arg}(z) = -11\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 4\pi$

In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

$$z^{22} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \quad z^{22} = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z^{22} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(b) \quad z = \frac{1+i}{2-2i} = \frac{1}{2} \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2} \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1}{4}(2i) = \frac{1}{2}i$$

$$|z| = \frac{1}{2}, \quad \text{Arg } z = \frac{\pi}{2}$$

Calcoliamo adesso z^2 , z^6 , z^{22}

- $|z^2| = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $\text{Arg}(z^2) = 2 \text{Arg}(z) = \pi$

In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

$$z^2 = \frac{1}{4}(\cos \pi + i \sin \pi), \quad z^2 = \frac{1}{4}e^{i\pi}, \quad z^2 = -\frac{1}{4}$$

- $|z^6| = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$, $\text{Arg}(z^6) = 6 \text{Arg}(z) = 3\pi = \pi + 2\pi$

In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

$$z^6 = \frac{1}{64}(\cos \pi + i \sin \pi), \quad z^6 = \frac{1}{64}e^{i\pi}, \quad z^6 = -\frac{1}{64}.$$

- $|z^{22}| = \frac{1}{2^{22}}$, $\text{Arg}(z^{22}) = 22 \text{Arg}(z) = 11\pi = \pi + 10\pi$

In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

$$z^{22} = \frac{1}{2^{22}}(\cos \pi + i \sin \pi), \quad z^{22} = \frac{1}{2^{22}}e^{i\pi}, \quad z^{22} = -\frac{1}{2^{22}}.$$

$$7. \quad (a) \quad z = \sqrt[4]{\sqrt{2}} = \left(2^{1/2}\right)^{1/4} = 2^{1/8} = \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[8]{1}$$

Calcoliamo le otto radici ottave del numero complesso 1. Poiché 1 ha modulo 1 e argomento 0 le otto radici ottave di 1 avranno sempre modulo 1 e argomenti:

$$\theta_i = 0 + \frac{2k\pi}{8} \quad (k = 0, 1, \dots, 7)$$

Pertanto le otto radici ottave di 2 sono

$$z_1 = \sqrt[8]{2} \cdot e^{i \cdot 0} = \sqrt[8]{2}$$

$$z_2 = \sqrt[8]{2} e^{i \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{1}{\sqrt[8]{8}}(1+i)$$

$$z_3 = \sqrt[8]{2} e^{i \frac{\pi}{2}} = \sqrt[8]{2}i$$

$$z_4 = \sqrt[8]{2} e^{i \frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt{2}}(-1+i) = \frac{1}{\sqrt[8]{8}}(-1+i)$$

$$z_5 = \sqrt[8]{2} e^{i\pi} = -\sqrt[8]{2}$$

$$z_6 = \sqrt[8]{2} e^{i \frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt{2}}(-1-i) = \frac{1}{\sqrt[8]{8}}(-1-i)$$

$$z_7 = \sqrt[8]{2} e^{i \frac{3\pi}{2}} = -\sqrt[8]{2}i$$

$$z_8 = \sqrt[8]{2} e^{i \frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt{2}}(1-i) = \frac{1}{\sqrt[8]{8}}(1-i)$$

Nel piano di Gauss, si trovano ai vertici di un ottagono regolare inscritto in una circonferenza di centro $O = (0, 0)$ e raggio $\sqrt[8]{2}$, di cui un vertice è nel punto $U = (\sqrt[8]{2}, 0)$.

(b) Il numero complesso $z = 1 - \sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento θ tale che:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Pertanto le due radici quadrate α_1, α_2 di z hanno modulo $|\sqrt{z}| = \sqrt{2}$ e argomenti

$$\text{Arg}(\sqrt{z}) = \frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2} \quad (k = 0, 1).$$

Quindi:

$$\alpha_1 = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Si osservi che $\alpha_1 = -\alpha_2$. (come sempre succede per le due radici quadrate di un qualunque numero complesso). Nel piano di Gauss α_1 e α_2 sono i due punti sulla circonferenza di centro $O = (0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$, di coordinate $A = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, simmetrici rispetto all'origine.

(c) Dobbiamo calcolare $z = \sqrt[3]{1 - i + \sqrt{2i}}$.

Calcoliamo prima $\sqrt{2i} = \sqrt{2} \sqrt{i}$

Il numero complesso i ha modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{2}$; dunque le sue due radici quadrate avranno modulo 1 e argomenti $\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}$ ($k = 0, 1$), cioè $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.

Dunque:

$$(\sqrt{2i})_1 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 + i$$

$$(\sqrt{2i})_2 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1 - i$$

Dobbiamo adesso calcolare i numeri complessi

$$w = \sqrt[3]{1 - i + 1 + i} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{1}$$

$$t = \sqrt[3]{1 - i - 1 - i} = \sqrt[3]{-2i} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{-i}$$

- Calcoliamo $\sqrt[3]{1}$.

Poiché $|1| = 1$ e $\text{Arg}(1) = 0$, le tre radici cubiche di 1 avranno sempre modulo 1 e argomenti $\text{Arg}(\sqrt[3]{1}) = 0 + \frac{2k\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2$).

Dunque:

$$(\sqrt[3]{1})_1 = 1, \quad (\sqrt[3]{1})_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (\sqrt[3]{1})_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pertanto le tre radici cubiche di 2 sono:

$$w_1 = \sqrt[3]{2}, \quad w_2 = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} + i \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}, \quad w_3 = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} - i \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}$$

- Calcoliamo le $\sqrt[3]{-i}$

Poiché $-i$ ha modulo 1 e argomento $\frac{3\pi}{2}$ le radici cubiche di $-i$ avranno modulo 1 e argomenti

$$\text{Arg}(\sqrt[3]{-i}) = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2).$$

Pertanto

$$(\sqrt[3]{-i})_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad (\sqrt[3]{-i})_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}, \quad (\sqrt[3]{-i})_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$$

Dunque le tre radici cubiche di $-2i$ sono:

$$t_1 = (\sqrt[3]{-2i})_1 = \sqrt[3]{2} i, \quad t_2 = (\sqrt[3]{-2i})_2 = -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} - i \frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \quad t_3 = (\sqrt[3]{-2i})_3 = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} - i \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

Concludendo, le radici cubiche cercate $\sqrt[3]{1 - i + \sqrt{2i}}$ sono i 6 numeri $w_1, w_2, w_3, t_1, t_2, t_3$.

Sul piano di Gauss appartengono ad una circonferenza di raggio $\sqrt[3]{2}$, ma non sono più ai vertici di un esagono regolare (mentre w_1, w_2, w_3 sono vertici di un triangolo equilatero, come pure t_1, t_2, t_3).

$$8. \quad (a) \quad z = e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

In forma algebrica dunque:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \sqrt{3}i)$$

Per scrivere z in forma trigonometrica, calcoliamo il modulo di z e $\theta = \text{Arg}(z)$:

$$|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+3} = \sqrt{3}.$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$$

Dunque in forma trigonometrica:

$$z = \sqrt{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

(b) Le radici cubiche di z hanno modulo $|\sqrt[3]{z}| = \sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3}$ e argomenti

$$\text{Arg}(\sqrt[3]{z}) = \frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2).$$

Dunque in forma esponenziale

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{3} e^{i\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$9. \quad (a) \quad z^2 + 3iz + 4 = 0$$

Applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado otteniamo:

$$z = \frac{-3i \pm \sqrt{9i^2 - 16}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{-3i \pm 5\sqrt{-1}}{2} = \frac{-3i \pm 5i}{2}$$

da cui $z_1 = -4i$, $z_2 = i$.

Sul piano di Gauss, sono i due punti situati sull'asse delle y di coordinate $(0, -4)$ e $(0, 1)$.

$$(b) \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0$$

Posto $z^2 = t$, risolviamo l'equazione di secondo grado $t^2 + 2t + 4 = 0$:

$$t = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

Dobbiamo ora trovare $z = \sqrt{t}$, cioè i due numeri complessi $\sqrt{-1 - \sqrt{3}i}$ e i due numeri $\sqrt{-1 + \sqrt{3}i}$.

• Iniziamo con $\sqrt{-1 - \sqrt{3}i}$

Poiché $-1 - \sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\frac{4\pi}{3}$ le sue due radici quadrate hanno modulo

$\sqrt{2}$ e argomenti rispettivamente $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3} + \pi$, cioè

$$\sqrt{-1 - \sqrt{3}i} = \pm\sqrt{2} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \pm\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$$

- Proseguiamo calcolando $\sqrt{-1 + \sqrt{3}i}$

Il numero complesso $-1 + \sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\frac{2\pi}{3}$.

Pertanto le sue due radici quadrate hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3} + \pi$; dunque:

$$\sqrt{-1 + \sqrt{3}i} = \pm\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}} = \pm\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

Dunque le soluzioni dell'equazione di partenza sono i quattro numeri complessi

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

Nel piano di Gauss, appartengono ad una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$, ai vertici di un rettangolo, di coordinate $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

(c) $z|z| - 2z + i = 0$

Posto $z = x + iy$, l'equazione diventa:

$$(x + iy)\sqrt{x^2 + y^2} - 2x - 2iy + i = 0$$

$$x \left[\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right] + i \left[1 - 2y + y\sqrt{x^2 + y^2} \right] = 0$$

Pertanto parte reale e parte immaginaria devono essere nulli. Si ottiene dunque il sistema:

$$\begin{cases} x \left[\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right] = 0 \\ 1 - 2y + y\sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 1 - 2y + y|y| = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - 2 = 0 \\ 1 - 2y + y\sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzione, in quanto la seconda equazione diventa $1 - 2y + y \cdot 2 = 0$, che è impossibile.

Il primo sistema a sua volta si divide in due sottosistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y > 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \\ -y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y > 0 \\ (y - 1)^2 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \\ y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Dunque le soluzioni dell'equazione sono i due numeri complessi $z = i$ e $z = (-1 - \sqrt{2})i$.

Sul piano di Gauss, sono i due punti sull'asse delle y di coordinate $(0, 1)$ e $(0, -1 - \sqrt{2})$.

(d) Posto $z = x + iy$, ricordando che $z\bar{z} = |z|^2$, l'equazione diventa:

$$x^2 + y^2 - x - iy + \frac{i}{4} = 0$$

Dobbiamo annullare la parte reale e la parte immaginaria; otteniamo pertanto il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ \frac{1}{4} - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x + \frac{1}{16} = 0 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni: $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Pertanto le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + i \frac{1}{4}, \quad z_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + i \frac{1}{4}$$

Sul piano di Gauss, sono i due punti di coordinate $\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

(e) Dobbiamo risolvere l'equazione $z^3 = |z|^2$.

Posto $\rho = |z|$ e $\theta = \text{Arg}(z)$, il numero complesso z^3 ha modulo ρ^3 e argomento 3θ , mentre il numero $|z|^2$ ha modulo ρ^2 e argomento 0 .

Poiché il numero complesso z^3 deve coincidere con il numero $|z|^2$ i loro moduli devono coincidere e i loro argomenti devono essere uguali a meno di multipli di 2π . Si deve pertanto avere:

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho^2 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Le soluzioni sono pertanto i quattro numeri complessi

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1$$

$$z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nel piano di Gauss, si trovano quattro punti: l'origine e i vertici del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro O e raggio 1 (di cui il punto $(1, 0)$ è uno dei vertici).

10. (a) Posto $z = x + iy$, iniziamo a trasformare la prima equazione del sistema:

$$\bar{z}(z + i) = (x - iy)(x + iy + i) = x^2 + y^2 + y + ix$$

Pertanto il sistema risulta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + y - 2 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Nel piano di Gauss i punti che soddisfano al sistema sono i punti interni alla semicirconferenza di centro $C\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ e raggio $R = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{3}{2}$, situati nel semipiano al di sopra dell'asse x (compresi i punti di frontiera).

- (b) Per risolvere l'equazione $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$, poniamo $t = z^3$ e troviamo l'equazione $t^2 + 7t - 8 = 0$, che ha soluzioni $t = -8$ e $t = 1$.

Pertanto

$$z^3 = -8 \quad \text{oppure} \quad z^3 = 1$$

- Se $z^3 = -8$, allora $z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{-1} = 2\sqrt[3]{-1}$

Le tre radici cubiche di -1 sono -1 , $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Dunque le prime tre soluzioni dell'equazione $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ sono

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

- Se $z^3 = 1$, si ha $z = \sqrt[3]{1} = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ ($k = 0, 1, 2$), cioè

$$z_4 = 1, \quad z_5 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_6 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le soluzioni del sistema proposto sono le soluzioni dell'equazione

$$z^6 + 7z^3 - 8 = 0 \quad \text{che hanno parte reale } 1, \text{ e dunque :}$$

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_4 = 1.$$

Nel piano di Gauss, sono i tre punti sulla retta di equazione $x = 1$ di coordinate $(1, \sqrt{3})$, $(1, 0)$, $(1, -\sqrt{3})$.

11. (a) $f(z) = z \iff \frac{1+iz}{iz+i} = z \iff 1+iz = iz^2 + iz \iff 1 = iz^2 \iff z^2 = -i \iff z = \sqrt{-i}$

Le due radici quadrate di $-i$ sono $\sqrt{-i} = \pm e^{i\frac{3\pi}{4}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$

Dunque le soluzioni dell'equazione $f(z) = z$ sono: $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

- (b) Le controimmagini di $3 + i$ sono gli $z \in \mathbf{C}$ tali che $f(z) = 3 + i$. Dunque:

$$\frac{1+iz}{iz+i} = 3+i \iff 1+iz = 3iz + 3i - z - 1 \iff z = \frac{3i-2}{1-2i} \iff z = \frac{-8-i}{5}$$

Pertanto c'è una sola controimmagine di $3 + i$, il numero complesso $z = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$

12. Poiché $p(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4 \in \mathbf{R}[z]$

è un polinomio a coefficienti reali, se ha la radice $1 + i$ ha anche la radice $1 - i$; dunque $p(z)$ si può dividere per il polinomio prodotto :

$$a(z) = [z - (1 + i)][z - (1 - i)] = z^2 - 2z + 2$$

Per trovare gli altri fattori di $p(z)$, eseguiamo la divisione di $p(z)$ per $a(z)$ e troviamo il quoziente $q(z) = z^2 - 3z + 2$.

$$\text{Pertanto } p(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 3z + 2).$$

Le radici di $z^2 - 3z + 2$ sono 2 e 1 .

Pertanto le radici di $p(z)$ sono: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 1$, $z_4 = 2$.

La decomposizione di $p(z)$ in fattori irriducibili su \mathbf{R} è: $p(z) = (z - 1)(z - 2)(z^2 - 2z + 2)$.

Su \mathbf{C} , $p(z)$ si decompone in fattori di primo grado: $p(z) = (z - 1)(z - 2)(z - 1 - i)(z - 1 + i)$.

$$\begin{aligned}
13. \quad p(-1) &= (-1)^3 + (1+2i)(-1)^2 + [(-\sqrt{3}+2)i-2](-1) - i\sqrt{3} - 2 = \\
&= -1 + 1 + 2i + (\sqrt{3}-2)i + 2 - i\sqrt{3} - 2 = \\
&= 2i + \sqrt{3}i - 2i - i\sqrt{3} \equiv 0
\end{aligned}$$

Pertanto $z_0 = -1$ è radice di $p(z)$.

Per trovare le altre radici, dividiamo $p(z)$ per $(z+1)$ ad esempio utilizzando il metodo di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
-1 & 1 & 1+2i & (-\sqrt{3}+2)i-2 & -i\sqrt{3}-2 \\
& & -1 & -2i & \sqrt{3}i+2 \\
\hline
& 1 & 2i & -\sqrt{3}i-2 & //
\end{array}$$

Dunque

$$p(z) = (z+1)(z^2 + 2iz - 2 - \sqrt{3}i)$$

Le radici del polinomio di secondo grado $z^2 + 2iz - 2 - \sqrt{3}i$ sono:

$$z = -i \pm \sqrt{-1 + 2 + \sqrt{3}i} = -i \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$$

Poiché $1 + \sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\frac{\pi}{3}$ le sue radici quadrate sono:

$$\sqrt{1 + \sqrt{3}i} = \pm\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \pm\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + i).$$

Dunque le tre radici di $p(z)$ sono:

$$z_0 = -1, \quad z_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} + i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right), \quad z_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right).$$

La decomposizione di $p(z)$ in fattori irriducibili è pertanto:

$$p(z) = (z+1) \left(z - \sqrt{\frac{3}{2}} - i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) \right) \left(z + \sqrt{\frac{3}{2}} + i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right)$$

14. Poiché $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ (cioè è a coefficienti reali), se ammette la radice

$b = 2 - 3i$ (con molteplicità 2) deve ammettere anche la radice $\bar{b} = 2 + 3i$ (ancora con molteplicità 2).

Dunque $p(z)$ è divisibile per $([z - (2 - 3i)][z - (2 + 3i)])^2 = (z^2 - 4z + 13)^2$.

Inoltre deve essere divisibile per $z - 3$ (avendo $a = 3$ come radice semplice).

Poiché deve essere di grado 5, sarà $p(z) = k(z-3)(z^2 - 4z + 13)^2$, $k \in \mathbb{C}$.

Poiché $p(0) = 1$, si deve avere: $1 = k(-3) \cdot 169$, da cui $k = -\frac{1}{507}$.

Pertanto il polinomio cercato è:

$$p(z) = -\frac{1}{507} (z-3)(z^2 - 4z + 13)^2.$$