Definizione 1. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice lipschitziana se esiste $M > 0$ ("costante di Lipschitz") tale che $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$ per ogni x e y in A.

Definizione 2. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $I \subseteq A$. L'oscillazione di f su I è definita come[1]

$$\operatorname{osc}(f, I) := \sup_{x,y \in I} |f(x) - f(y)| = \sup_I f - \inf_I f \ . \tag{1}$$

Osservazione. (i) Se f è lipschitziana su (x, y) con costante di Lipschitz M segue

$$\operatorname{osc}\big(f, (x, y)\big) \le M|y - x| \ . \tag{2}$$

(ii) Una funzione $f \in C^1([a, b])$ è Lipschitziana con costante di Lipschitz $M = \sup_{[a,b]} |f'|$. Infatti, dal Teorema di Lagrange segue che, per ogni $x, y \in [a, b]$ esiste $\xi \in [a, b]$ tale che $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\ |x - y| \le M|x - y|$, dove l'ultima disuguaglianza segue dal Teorema di Weierstrass essendo la derivata f' continua sul compatto $[a, b]$.

(iii) Se $\mathcal{D} = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ è una suddivisione di $[a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, dalle definizione date segue che

$$S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}\big(f, (x_{i-1}, x_i)\big)\,(x_i - x_{i-1}) \ . \tag{3}$$

Proposizione. *Se f è lipschitziana allora f è integrabile su $[a, b]$.*

Dimostrazione Sia $M > 0$ la costante di Lipschitz di f. Dato $\varepsilon > 0$ sia $\mathcal{D}$ una qualunque suddivisione di $[a, b]$ con $|\mathcal{D}| < \varepsilon/\big(M(b - a)\big)$. Allora, da (3) e (2), segue che

$$S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}\big(f, (x_{i-1}, x_i)\big)\,(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M \frac{\varepsilon}{M(b - a)}\,(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \ ,$$

e la tesi segue dal Teorema 8.5 di [B]. ∎

[1] Si noti che. per ogni $x, y \in I$, si ha che $\inf_I f - \sup_I f \le f(x) - f(y) \le \sup_I f - \inf_I f$ che implica $\sup_{x,y} |f(x) - f(y)| \le \sup_I f - \inf_I f$; viceversa, $f(x) - f(y) \le \sup_{x,y} |f(x) - f(y)|$ e prendendo prima il sup su $x \in I$ e poi il sup su $y \in I$ si ottiene la disuguaglianza inversa.