

L'analisi su $\mathbb{R}$: una visione d'insieme

(28 Febbraio, 2022)

1 Numeri

Definizione assiomatica dei numeri reali

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è un insieme¹ su cui sono definite due operazioni binarie², **somma** (o **addizione**) '+' e **prodotto** '·', e una **relazione**³ d'ordine totale ' $\leq$ ' che soddisfano i seguenti quindici assiomi 'algebrici' ed un sedicesimo assioma di 'completezza':

Assiomi di addizione⁴

- (S₁) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ [proprietà associativa]
 (S₂) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ [esistenza elemento neutro]
 (S₃) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, tale che $x + y = 0$ [esistenza elemento opposto]
 (S₄) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ [proprietà commutativa]

Assiomi di prodotto

- (P₁) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ [proprietà associativa]
 (P₂) $\exists 1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ [esistenza elemento neutro]
 (P₃) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot y = 1$ [esistenza reciproco]
 (P₄) $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ [proprietà commutativa]

Assioma somma–prodotto

- (SP) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ [proprietà distributiva]

Assiomi di ordine:

- (O₁) $x \leq x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ [proprietà riflessiva]
 (O₂) $x \leq y$, $y \leq x$ allora $x = y$ [proprietà antisimmetrica]
 (O₃) $x \leq y$, $y \leq z$ allora $x \leq z$ [proprietà transitiva]
 (O₄) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ oppure $y \leq x$ [ordine totale]

Assioma somma–ordine

- (SO) $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$, $\forall z \in \mathbb{R}$ [invarianza per 'traslazione']

Assioma prodotto–ordine

- (PO) $0 \leq x$, $0 \leq y$ allora $0 \leq x \cdot y$ [invarianza per prodotto]

Assioma di completezza⁵

(D) Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti⁶ di $\mathbb{R}$ tali che $x \leq y$, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$. Allora, esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq s \leq y$, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$; diremo che un tale numero reale s **separa**⁷ gli insiemi A e B .

Proprietà aritmetiche elementari

Da questi assiomi, usando il linguaggio della logica standard e le idee fondamentali della teoria degli insiemi, si *dimostra* la validità delle proprietà 'familiari' dell'aritmetica, tra le quali⁸:

¹Un *insieme* A è una 'collezione di oggetti (o elementi)' per cui è sempre possibile stabilire se un elemento x appartiene a A ($x \in A$) oppure x non è un elemento di A ($x \notin A$). A è un *sottoinsieme* di B , in simboli $A \subseteq B$ se ogni elemento di A è anche un elemento di B : $x \in A$ implica $x \in B$.

²Una *operazione binaria* su di un insieme A è una legge che ad una coppia (ordinata) di elementi di A associa in modo univoco un elemento di A ; l'insieme delle coppie ordinate di A si denota con $A \times A$. In generale, il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B , denotato con $A \times B$, è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

³Una *relazione* $\mathcal{R}$ su A è un sottoinsieme del prodotto $A \times A$: $\mathcal{R} \subseteq A \times A$. Le coppie in $\mathcal{R}$ sono le coppie che stanno nella relazione $\mathcal{R}$; normalmente se $(x, y) \in \mathcal{R}$ si scrive $x\mathcal{R}y$.

⁴Nella formulazione degli assiomi appaiono i *quantificatori logici* ' $\forall$ ', che si legge 'per ogni' e ' $\exists$ ' che si legge 'esiste'.

⁵L'assioma di completezza traduce in linguaggio matematico preciso l'idea geometrica euclidea che la 'retta' (come rappresentazione dei numeri reali) non ha 'buchi'.

⁶L'insieme vuoto $\emptyset$, per definizione, l'insieme che non contiene alcun elemento, ossia $x \notin \emptyset$ qualunque sia x . L'introduzione dell'insieme vuoto è necessaria in qualunque teoria degli insiemi.

⁷Si noti che nulla viene detto sull'appartenenza di s a A o a B .

⁸Nelle seguenti affermazioni, x, y, z sono elementi di $\mathbb{R}$. In queste note elenchiamo le proposizioni o affermazioni matematiche con numeri romani in grassetto. Ognuna di tali affermazioni è un 'teorema' ossia una *affermazione matematica la cui validità può essere dedotta dagli assiomi*. Anche 'lemmi' o 'corollari' sono proposizioni (l'uso di uno di questi termini anziché l'altro è alquanto soggettivo e matematicamente irrilevante).

- (i) (Unicità degli elementi neutri) *Gli elementi neutri di somma e prodotto sono unici.*
- (ii) (Unicità dell'opposto) *Se $x + y = 0$ e $x + z = 0$ allora $y = z$; quindi l'opposto di x è unico e verrà denotato con $-x$; $y - x$ significa, per definizione, $y + (-x)$.*
- (iii) (Unicità del reciproco) *Se $x \cdot y = 1$ e $x \cdot z = 1$ allora $y = z$; quindi il reciproco di $x \neq 0$ è unico e verrà denotato con x^{-1} o con $1/x$ o $\frac{1}{x}$; y/x o $\frac{y}{x}$ significa, per definizione, $y \cdot x^{-1}$.*
- (iv) $-(-x) = x$.
- (v) Se $x \neq 0$, allora $(x^{-1})^{-1} = x$.
- (vi) (Legge di cancellazione per la somma) $x + y = x + z$ se e solo se⁹ $y = z$; in particolare, $x + y = x$ se e solo se $y = 0$.
- (vii) (Legge di cancellazione per il prodotto) Sia $x \neq 0$; $x \cdot y = x \cdot z$ se e solo se $y = z$; in particolare, dato $x \neq 0$, $x \cdot y = x$ se e solo se $y = 1$.
- (viii) $x \cdot 0 = 0$.
- (ix) Se $x \neq 0$ e $x \cdot y = 0$, allora $y = 0$ (ossia, se $x \cdot y = 0$, allora o $x = 0$ o $y = 0$).
- (x) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$; $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$; $(-1) \cdot y = -y$.
- (xi) Se $x \neq 0$, $(-x)^{-1} = -x^{-1}$.
- (xii) Se $0 \leq x$, allora $-x \leq 0$; se $x \leq 0$ allora $0 \leq -x$.
- (xiii) Se $y \leq z$ e $0 \leq x$, allora $x \cdot y \leq x \cdot z$. Se $y \leq z$ e $x \leq 0$, allora $x \cdot z \leq x \cdot y$.
- (xiv) Se $x \leq 0$ e $y \leq 0$, allora $0 \leq x \cdot y$; se $x \leq 0 \leq y$, allora $x \cdot y \leq 0$.
- (xv) $0 \leq x^2$ per ogni x , dove¹⁰ $2 := 1 + 1$ e $x^2 := x \cdot x$.
- (xvi) $0 < 1$; dove, in generale, $y < x$ significa $y \leq x$ e $y \neq x$.
- (xvii) Se $0 < x$, allora $0 < x^{-1}$; se $x < 0$, allora $x^{-1} < 0$.

Dimostriamo, a titolo d'esempio, un paio di queste affermazioni (assumendo che le precedenti siano state già dimostrate):

Dimostrazione (di (i)) Supponiamo ci sia un altro elemento neutro della somma, ossia che esista $\hat{0} \in \mathbb{R}$ tale che $x + \hat{0} = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora, da tale ipotesi (con $x = 0$) segue $0 + \hat{0} = 0$. D'altra parte, per (S₂) con $x = \hat{0}$, si ha: $\hat{0} + 0 = \hat{0}$. Quindi, per (S₄), $0 = 0 + \hat{0} = \hat{0} + 0 = \hat{0}$, ossia $\hat{0} = 0$. La dimostrazione per l'elemento neutro del prodotto è del tutto analoga. ■

Dimostrazione (di (viii)) Da (S₂) (con $x = 0$) e (SP) (con $y = z = 0$) segue che $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$. Dunque da (vi) segue che $x \cdot 0 = 0$. ■

Dimostrazione (di (xvi)) Da (P₂) (con $x = 1$) segue che $1 = 1 \cdot 1$ e da (xv) (con $x = 1$) segue che $0 \leq 1^2 := 1 \cdot 1 = 1$; ma, per (P₂), $1 \neq 0$ il che vuol dire che $0 < 1$. ■

Useremo le seguenti notazioni: $x \geq y$ che significa, per definizione, $y \leq x$, e analogamente $x > y$ che significa, per definizione, $y < x$; $x - y := x + (-y)$; $x/y := \frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$ (ovviamente, $y \neq 0$). Dunque, le cosiddette 'operazioni inverse' (differenza o sottrazione e divisione) *non sono nuove operazioni*.

I numeri non negativi, in vista dell'assioma (PO), giocano un ruolo particolarmente importante essendo il più grande sottoinsieme *proprio* di $\mathbb{R}$ chiuso rispetto al prodotto¹¹; useremo le seguenti notazioni¹²:

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \quad \overline{\mathbb{R}}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}, \quad \overline{\mathbb{R}}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}.$$

I numeri naturali e il principio di induzione

I *numeri naturali* sono (intuitivamente) $1, 2 := 1 + 1, 3 := 2 + 1, 4 := 3 + 1, \dots$

Naturalmente, il problema qui è dare un senso formale ai puntini senza fare leva sull'intuizione

⁹'P se e solo se Q' (abbreviato, a volte, in 'P sse Q' e in formule 'P $\iff$ Q' significa che 'P e Q sono logicamente equivalenti', ossia, che 'da P segue Q e da Q segue P', o, in formule, 'P $\implies$ Q e Q $\implies$ P'.

¹⁰Il simbolo '=' significa 'uguale, per definizione'; useremo anche: $a =: b$ se è b ad essere definito da a .

¹¹Qui 'un insieme chiuso rispetto ad una operazione' significa che il risultato dell'operazione tra due numeri di un insieme appartiene allo stesso insieme.

¹²La barra verticale negli insiemi significa 'tale che': ' $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ' si legge: 'l'insieme delle x in $\mathbb{R}$ tali che $x > 0$ '; i numeri in $\mathbb{R}_+$ sono detti *positivi*, i numeri in $\mathbb{R}_-$ sono detti *negativi*.

(anche se questa, in generale, è fondamentale per ‘capire’ gli oggetti che si discutono).

Il concetto fondamentale relativo ai numeri naturali è quello di avere un ‘punto di partenza’ (il numero 1, o, in altre convenzioni, lo 0, i quali, per inciso, sono gli unici due numeri che appaiono esplicitamente negli assiomi) e poi di ‘contare’ aggiungendo 1, ossia facendo la lista dei numeri ‘successivi’ a partire da 1. Queste idee vengono formalizzate tramite l’introduzione dei cosiddetti sottoinsiemi *induttivi* di $\mathbb{R}$: per definizione, un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice *induttivo* se $1 \in I$ e se, per ogni $x \in I$ si ha anche $x + 1 \in I$. Ad esempio, sono insiemi induttivi¹³: $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$, l’insieme $\{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$, l’insieme $\{1\} \cup \{2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$...

Per definizione, l’insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme induttivo di $\mathbb{R}$ ossia è l’unico insieme tale che, se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme induttivo qualunque, si ha $\mathbb{N} \subseteq I$.

Immaginiamo, ora, di avere un elenco di affermazioni matematiche $\mathcal{P}_n$ indicizzate da $n \in \mathbb{N}$. Come fare a dimostrarle *tutte*? Un metodo spesso efficace è basato sul seguente teorema noto come ‘principio di induzione’:

(xviii) *Ipotesi: $\mathcal{P}_1$ è vera e¹⁴ $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$. Tesi: $\mathcal{P}_n$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione Denotiamo con I l’insieme dei numeri naturali n per cui $\mathcal{P}_n$ è vera. Per ipotesi $1 \in I$ e se $n \in I$ allora $n + 1 \in I$. Questo significa che I è induttivo e quindi, per definizione di $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subseteq I$; ma, per definizione di I , $I \subseteq \mathbb{N}$ e quindi $I = \mathbb{N}$, che è la tesi. ■

Il principio di induzione è anche alla base delle *definizione ricorsive*¹⁵, ossia di tutte quelle definizioni che dipendono da $n \in \mathbb{N}$ e da k con $1 \leq k \leq n$. Ad esempio, sono ricorsive le seguenti definizioni:

potenza n -esima: se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $a^1 := a$ e, per ogni $n \geq 2$, $a^{n+1} := a^n \cdot a$;

n fattoriale : $0! := 1$, $1! := 1$ e, per ogni $n \geq 1$, $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$;

sommatoria: dati, per ogni $k \in \mathbb{N}$, numeri $a_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^1 a_k := a_1$ e $\sum_{k=1}^{n+1} a_k := a_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k$.

produttoria: dati, per ogni $k \in \mathbb{N}$, numeri $a_k \in \mathbb{R}$, $\prod_{k=1}^1 a_k := a_1$ e $\prod_{k=1}^{n+1} a_k := a_{n+1} \cdot \prod_{k=1}^n a_k$.

Esempi di affermazioni che possono essere dimostrate usando il principio d’induzione sono:

(xix) (Somma geometrica) Sia $1 \neq x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Allora $\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$.

(xx) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, si ha¹⁶: $b^n - a^n = (b - a) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$.

(xxi) (Binomio di Newton) Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ dove¹⁷

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

(xxii) (Disuguaglianza di Bernoulli) Se $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$, allora¹⁸ $(1+x)^n \geq 1+nx$.

¹³Il simbolo ‘ $\cup$ ’ è l’unione insiemistica: $A \cup B$ è l’insieme i cui elementi sono o elementi di A o elementi di B , mentre ‘ $\cap$ ’ è il simbolo di intersezione insiemistica: $A \cap B$ denota l’insieme i cui elementi che appartengono sia ad A sia a B ; infine $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ sono gli elementi di A che non sono elementi di B .

¹⁴Il simbolo ‘ $\implies$ ’ indica implicazione logica: $P \implies Q$ significa che dalla validità di P segue la validità di Q : se P è vera, allora è vera anche Q ; cfr. nota 9.

¹⁵Per essere più precisi, le definizioni ricorsive sono basate sul ‘Teorema di ricorsione’, che a sua volta è conseguenza diretta del principio di induzione.

¹⁶Qui si usi la convenzione che $a^0 = 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

¹⁷ $\binom{n}{k}$ si chiama ‘coefficiente binomiale’ e si legge ‘ n sopra k ’.

¹⁸Spesso, come d’uso comune, omettiamo il segno di moltiplicazione indicando con ab il prodotto $a \cdot b$.

$$(xxiii) \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(xxiv) \quad 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$(xxv) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

$$(xxvi) \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

A titolo d'esempio, dimostriamo (xxii): Denotiamo con $\mathcal{P}_n$ l'affermazione (xxii). $\mathcal{P}_1$ è (ovviamente) vera col segno di uguale. Assumiamo che $\mathcal{P}_n$ sia vera. Allora¹⁹,

$$(1+x)^{n+1} := (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+nx+x = 1+(n+1)x,$$

e quindi anche $\mathcal{P}_{n+1}$ è vera. Dunque dal principio di induzione segue che $\mathcal{P}_n$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

Altre semplici (ma non altrettanto facili da dimostrare) conseguenze del principio di induzione concernono proprietà fondamentali (e intuitivamente ovvie) dei numeri naturali, quali:

(xxvii) se $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ sono tali che $n < x < n+1$, allora $n \notin \mathbb{N}$.

(xxviii) Se $n, m \in \mathbb{N}$ e $n > m$, allora $n - m \in \mathbb{N}$.

(xxix) (Principio del minimo) Se $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, allora A ha un minimo²⁰.

Insiemi finiti e infiniti

Un'altra proprietà fondamentale di $\mathbb{N}$ è che $\mathbb{N}$ è un 'insieme infinito' (infatti, in un senso preciso, è il più piccolo insieme infinito). La parola 'infinito' non compare negli assiomi e dunque ogni volta che si usa ne va precisato il significato matematico (in termini degli assiomi). Il concetto fondamentale legato alla 'numerosità' di insiemi è quello di *uguale numerosità*, che, a sua volta, è legato al concetto di 'funzione biunivoca'.

Dati due insiemi non vuoti A e B una funzione $\phi : A \rightarrow B$ (si legga: una funzione ϕ da A in B) è una 'legge' o 'regola' che ad ogni elemento x di A associa un *unico* elemento $y =: \phi(x)$ di B (un po' più precisamente, una funzione ϕ da A in B è la collezione di tutte le coppie $(x, \phi(x))$ con $x \in A$ e $\phi(x) \in B$); l'insieme A si chiama *dominio* della funzione ϕ e B il *codominio*; l'*immagine* è il sottoinsieme di B dato dall'insieme dei valori di ϕ , ossia, da $\{\phi(x) \mid x \in A\}$ che si denota con $\phi(A)$ o con $\text{im}(\phi)$. Una funzione $\phi : A \rightarrow B$ si dice *iniettiva* se $\phi(x) = \phi(x')$, per qualche $x, x' \in A$, implica che $x = x'$ (in altri termini, se $x \neq x'$ sono punti diversi di A , allora $\phi(x) \neq \phi(x')$); una funzione $\phi : A \rightarrow B$ si dice *suriettiva* se per ogni $y \in B$ esiste un $x \in A$ tale che $y = \phi(x)$, ossia ogni punto $y \in B$ è anche un punto dell'immagine di ϕ ; una funzione $\phi : A \rightarrow B$ iniettiva e suriettiva si dice *biunivoca*.

Diremo che due insiemi non vuoti A e B hanno la stessa numerosità, o, come è d'uso più comune, hanno la stessa *cardinalità* o sono *equipotenti* se esiste una funzione biunivoca (ossia, iniettiva e suriettiva) $\phi : A \rightarrow B$ (quindi ad ogni elemento di A corrisponde uno ed un solo

elemento di B); in tal caso scriveremo $A \cong B$ o anche $A \stackrel{\phi}{\cong} B$.

Definiamo ora $\mathcal{F}_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$: $\mathcal{F}_n$ è l'insieme dei primi n numeri naturali (ad esempio, $\mathcal{F}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$). Infine, diremo che A è un *insieme finito* se $\mathcal{F}_n \cong A$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ e diremo che n è la sua cardinalità o che A ha n elementi²¹; un insieme si dice *infinito* se non è finito.

¹⁹La prima disuguaglianza segue da $\mathcal{P}_n$ e dall'ipotesi che $x \geq -1$ e che quindi $1+x \geq 0$, il che permette di usare la (xiii); la seconda disuguaglianza segue da (xv) e dagli assiomi.

²⁰Un elemento m di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $m \leq x$, per ogni $x \in A$ prende il nome di *minimo* di A ; un elemento M di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ tale che $M \geq x$, per ogni $x \in E$ prende il nome di *massimo* di E .

²¹Si dimostra che se $\mathcal{F}_n \cong \mathcal{F}_m$ allora $n = m$ e quindi la definizione data è ben posta.

(xxx) $\mathbb{N}$ è infinito.

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che $\mathbb{N}$ sia finito: questo significa che esiste $n \in \mathbb{N}$ ed una funzione biunivoca $\phi : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathbb{N}$. Sia $N = \sum_{k=1}^n \phi(k) \in \mathbb{N}$. Chiaramente, $N + 1 > \phi(k)$ per ogni $k \in \mathcal{F}_n$ ma questo implica, in particolare, che $N + 1 \neq \phi(k)$ per ogni $k \in \mathcal{F}_n$, ossia che ϕ non è suriettiva: contraddizione. ■

Numeri interi e razionali

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$; i numeri interi $\mathbb{Z}$ sono definiti come $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$, dove $-\mathbb{N}$ denota l'insieme degli opposti dei numeri naturali.

$\mathbb{Q}$ è definito come l'insieme dei numeri reali della forma $\frac{m}{n} := m/n := m \cdot n^{-1}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$.

(xxxi) $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto a somma e prodotto; $\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto a somma, prodotto e differenza (somma con opposti); $\mathbb{Q}$ è chiuso rispetto a somma, prodotto, differenza e divisione (moltiplicazione per reciproci di numeri diversi da 0).

2 Assioma di completezza, estremo superiore. Radici

Una conseguenza fondamentale dell'assioma di completezza (D) – che finora non è mai stato utilizzato – è l'esistenza de 'l'estremo superiore' per insiemi non vuoti e limitati superiormente. Un insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato superiormente* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in A$; un tale numero M prende il nome di *maggiorante* di A .

(xxxii) Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente. Allora, l'insieme dei maggioranti di A ha un minimo²².

Dimostrazione Denotiamo con B l'insieme di tutti i maggioranti di A . Per ipotesi $B \neq \emptyset$ e, per ogni $M \in B$ si ha che $x \leq M$, per ogni $x \in A$ (per definizione di maggiorante). Dunque, per (D), esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq s \leq M$ per ogni $x \in A$ e per ogni $M \in B$, il che significa che s è un maggiorante di A (essendo $x \leq s$ per ogni $x \in A$) e che s è il minimo di B (essendo $s \leq M$ per ogni $M \in B$). ■

Il minimo dei maggioranti di un insieme A (che esiste per (xxxii) quando A è non vuoto e limitato superiormente) prende il nome di *estremo superiore di A* e si denota con $\sup A$. Si noti che se A ha un massimo M , allora $\sup A = M$, ma può, naturalmente, capitare che $\sup A \notin A$ (ad esempio, $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} = 1$).

Una utile caratterizzazione dell'estremo superiore che segue immediatamente dalle definizioni è la seguente:

(xxxiii) $s \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di $A \neq \emptyset$ se e solo se s è un maggiorante di A e per ogni $t < s$ esiste $x \in A$ tale che $t < x$.

Una discussione del tutto analoga vale nel caso di insiemi non vuoti limitati inferiormente²³.

Due conseguenze elementari ma fondamentali di (xxxii) (e quindi di (D)) sono le seguenti²⁴:

(xxxiv) (Proprietà archimedeana) $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente, ossia, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$.

²²Come detto sopra, $M \in \mathbb{R}$ tale che $M \geq x$, per ogni x in $E \neq \emptyset$ è un maggiorante di E ; $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq x$, per ogni x in $E \neq \emptyset$ è un minorante di E ; E è limitato inferiormente se esiste un minorante per E ; infine, E è limitato se è limitato inferiormente e limitato superiormente.

²³Ossia, se $A \subseteq \mathbb{R}$ è non vuoto e limitato inferiormente allora l'insieme dei minoranti di A ha un massimo che prende il nome di *estremo inferiore di A* . Infatti, è facile vedere che $\inf A = -\sup(-A)$, dove $-A$ denota l'insieme degli opposti di A .

²⁴La (xxxiv) può sembrare 'ovvia', ma per la sua dimostrazione è necessario usare l'assioma di completezza (D), ossia è impossibile dimostrare (xxxiv) usando solo gli assiomi algebrici di $\mathbb{R}$.

La (xxxv), in altre parole, dice che un qualunque numero reale può sempre essere approssimato arbitrariamente bene da numeri razionali.

(xxxv) (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) Per ogni $x < y$ in $\mathbb{R}$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ tale che $x < r < y$.

Dimostrazione Se $q \in \mathbb{N}$ è tale che $q > (y - x)^{-1}$ e $p = [xq]$, dove $[y] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq y\}$ denota la ‘parte intera di’²⁵ y , allora $r = (p + 1)/q \in \mathbb{Q}$ verifica $x < r < y$. ■

Radici e potenze razionali

Possiamo ora dare la definizione di radice n -esima di un qualunque numero reale x non negativo:

(xxxvi) Dati $0 \leq x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico numero $y \geq 0$ tale che $y^n = x$ e tale numero coincide con il²⁶ $\sup\{t \geq 0 \mid t^n \leq x\}$ e si denota con $\sqrt[n]{x}$ o con $x^{1/n}$.

La parte centrale (e non immediata) della dimostrazione consiste nel verificare che l'estremo superiore $s = \sup R_n$ soddisfa l'equazione $s^n = x$. L'unicità, invece, è una immediata conseguenza di (xx) da cui segue che se a e b sono non negativi, allora $a = b$ se e solo se $a^n = b^n$.

Se n è dispari²⁷ si può estendere la definizione della radice a $x < 0$ ponendo $x^{1/n} := -(-x)^{1/n}$, in tal modo si ha ancora che $(x^{1/n})^n = x$.

Come già sapevano gli antichi greci nessun razionale al quadrato coincide con 2:

(xxxviii) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che $\sqrt{2} = p/q \in \mathbb{Q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ e coprìmi²⁸. Dalla proposizione (xxxvi) seguirebbe che $2 = p^2/q^2$ e quindi che p^2 è pari. Ma allora (poiché il quadrato di un numero dispari è dispari) si ha che anche p è pari: $p = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$. Ne segue che $2q^2 = 4k^2$ ossia $q^2 = 2k^2$ e quindi, per lo stesso motivo, anche q è pari e p e q avrebbero 2 come divisore comune contraddicendo l'ipotesi che sono coprìmi. ■

L'esistenza dei numeri *irrazionali* ossia reali ma non razionali mostra che $\mathbb{Q}$, sebbene soddisfi i primi quindici assiomi algebrici, non soddisfa (D): gli insiemi $A := \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq \sqrt{2}\}$ e $B := \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq \sqrt{2}\}$ sono non vuoti e tali che $x \leq y$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$ ma l'unico numero che separa A e B è $\sqrt{2}$ che per (xxxvii) non appartiene a $\mathbb{Q}$.

Passiamo ora a discutere la definizione e le proprietà delle potenze con esponente razionale. Se $n, m \in \mathbb{N}$, dalla definizione di potenza e dal principio di induzione seguono facilmente le tre proprietà fondamentali delle potenze, ossia:

(xxxviii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}$ si ha: (i) $x^n x^m = x^{n+m}$; (ii) $(x^n)^m = x^{nm}$; (iii) $x^n y^n = (xy)^n$.

Queste proprietà si estendono facilmente a $\mathbb{Z}$ se si definisce (per $neq 0$) $x^0 := 1$ e $x^{-n} := 1/x^n$. Per estenderle ulteriormente a $\mathbb{Q}$, bisogna definire $x^{p/q}$ per $x > 0$. Dalla unicità delle radici e da (xxxvii) segue facilmente che

$$(x^p)^{1/q} = (x^{1/q})^p, \quad (x^{dp})^{1/(dq)} = (x^p)^{1/q}$$

e dunque una qualunque delle due espressioni nella prima equazione può essere usata per definire x^r con $r = p/q$, e la seconda equazione garantisce che il valore non dipende da eventuali fattori comuni di p e q . A questo punto non è difficile dimostrare che

(xxxix) $\forall x, y > 0, \forall r, s \in \mathbb{Q}$ si ha: (i) $x^r x^s = x^{r+s}$; (ii) $(x^r)^s = x^{rs}$; (iii) $x^r y^r = (xy)^r$.

²⁵Che tale definizione sia ben posta segue dalla proprietà archimedeica e dall'esistenza dell'estremo superiore.

²⁶Si noti che $0 \in E := \{t \geq 0 \mid t^n \leq x\}$ e che un maggiorante di E è dato da $1 + x$ e quindi E è non vuoto e limitato superiormente.

²⁷Un numero intero n si dice *pari* se $n = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, si dice *dispari* se $n = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$.

²⁸Ad ogni razionale r è possibile associare una ed una sola coppia $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tali che $r = p/q$ e tali che l'unico divisore positivo comune è 1 ($d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$, è un divisore di $n \in \mathbb{Z}$ se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $n = d \cdot k$; due numeri interi il cui unico divisore comune positivo è 1 si dicono coprìmi).

3 Funzioni reali

Funzioni elementari

Descriviamo brevemente alcune funzioni ‘elementari’ con dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$.

Il grafico di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è il sottoinsieme di $A \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dato da²⁹

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A \text{ e } y = f(x)\} .$$

Dunque, il dominio è *parte integrante della definizione* di una funzione. Ad esempio, la funzione³⁰ $x \in \mathbb{Q} \mapsto 1$ è diversa dalla funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto 1$ anche se il valore della funzione è lo stesso.

• **Polinomi.** Un *polinomio di grado* $n \in \mathbb{N}_0$ è una funzione $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ossia con dominio $\mathbb{R}$) della forma

$$x \in \mathbb{R} \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k , \quad (a_n \neq 0) ,$$

dove i coefficienti a_k sono numeri reali e $a_n \neq 0$.

Una ‘retta’ (non parallela all’asse delle y) è un polinomio di grado $n \leq 1$; una ‘parabola’ (con asse di simmetria parallelo all’asse delle y) è un polinomio di secondo grado. Le caratteristiche di una parabola vengono facilmente descritte notando che

$$ax^2 + bx + c = a \left((x - x_0)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) , \quad x_0 := -\frac{b}{2a} , \quad \Delta := b^2 - 4ac .$$

• **Radici.** Dato $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mapsto \sqrt[n]{x} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ è la funzione *radice n -esima*. Se n è dispari la radice n -esima ha dominio $\mathbb{R}$: $x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$.

• **Valore assoluto.** La funzione³¹

$$x \in \mathbb{R} \mapsto |x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x , & \text{se } x \geq 0 \\ -x , & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

prende il nome di *valore assoluto* o *modulo* di x . È facile verificare che il valore assoluto verifica le seguenti proprietà³²:

(xl) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha: (i) $-|x| \leq x \leq |x|$, (ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$, (iii) $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

• **Segno di x .** La funzione ‘segno di x ’ è definita come

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 , & \text{se } x > 0 , \\ -1 , & \text{se } x < 0 \\ 0 , & \text{se } x = 0 . \end{cases}$$

Si noti che per $x \neq 0$, $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$; (il valore in $x = 0$ è ‘convenzionale’).

• **Parte intera di x .** La funzione ‘parte intera’ $x \in \mathbb{R} \mapsto [x] := \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ (già discussa sopra) verifica, per ogni $x \in \mathbb{R}$:

(xli) (i) $[x] \in \mathbb{Z}$; (ii) $n = [x]$ è l’unico intero n tale che $n \leq x < n + 1$; (iii) $[x + 1] = [x] + 1$.

²⁹In effetti, formalmente una funzione è *definita* dal suo grafico.

³⁰La notazione ‘ $x \in A \mapsto f(x) \in B$ ’ è equivalente alla notazione ‘ $f : A \rightarrow B$ ’.

³¹Dati $a_j \in \mathbb{R}$, $\max\{a_1, \dots, a_n\}$ denota il valore più grande tra i numeri reali $a_1, \dots, a_n$; più precisamente, si può dare questa definizione ricorsivamente sul numero degli a_j : $\max\{a_1\} := a_1$, $\max\{a_1, a_2\} = a_1$ se $a_1 \geq a_2$, a_2 altrimenti; infine $\max\{a_1, \dots, a_{n+1}\} := \max\{a_{n+1}, \max\{a_1, \dots, a_n\}\}$. Analogamente, si definisce $\min\{a_1, \dots, a_n\}$.

³²La (ii) prende il nome di *disuguaglianza di Cauchy* o ‘triangolare’.

- *Parte frazionaria di x .* La funzione ‘parte frazionaria di x ’ è definita come

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \{x\} := x - [x].$$

(xlii) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \{x\} < 1$; inoltre $x \rightarrow \{x\}$ è una funzione ‘periodica di periodo 1’, ossia $\{x+1\} = \{x\}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione Da (xli) segue che $[x] \leq x < [x] + 1$, ossia $0 \leq x - [x] = \{x\} < 1$.

Inoltre, da $[x] \leq x < [x] + 1$ segue anche che $[x] + 1 \leq x + 1 < ([x] + 1) + 1$, che (per l’unicità in (xli)) implica che $[x+1] = [x] + 1$. ■

- *Funzioni caratteristiche o indicatrici.* Dato un insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ la *funzione caratteristica* (o *indicatrice*) di A è definita come

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

In questi esempi il dominio è sempre $\mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}_+$, ma, naturalmente, non è sempre questo il caso.

Ad esempio la funzione $x \rightarrow \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ ha come dominio ‘massimale’ $A := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$.

Una classe che riveste un ruolo particolarmente importante in analisi matematica sono le funzioni con dominio $\mathbb{N}$:

- *Successioni.* Una funzione $f : n \in \mathbb{N} \mapsto f_n \in \mathbb{R}$, ossia una funzione con dominio³³ $\mathbb{N}$ e codominio $\mathbb{R}$ prende il nome di *successione* (o ‘successione reale’). Notazioni comuni per una successione sono anche³⁴ $\{f_n\}$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{x_n\}$, $\{a_n\}$, etc. Esempi di successioni sono: $\{n\}$, $\{1/n\}$, $\{2^n\}$, $\{n^5 - \frac{1}{n}\}$, ...

Funzioni monotòne

Una caratteristica fondamentale di $\mathbb{R}$ è che un insieme *totalmente ordinato*. È quindi naturale che giochino un ruolo importante le funzioni che conservino (o invertano) l’ordine. Tali funzioni sono dette *monotòne*. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice:

- (i) *crescente* se dati $x, y \in A$, $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$;
- (ii) *strettamente crescente* se dati $x, y \in A$, $x < y \implies f(x) < f(y)$;
- (iii) *decescente* se dati $x, y \in A$, $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$;
- (iv) *strettamente decrescente* se dati $x, y \in A$, $x < y \implies f(x) > f(y)$.

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *monotòna* se soddisfa una delle precedenti quattro proprietà; si dice *strettamente monotòna* se verifica (ii) o (iv).

Esempi:

- la funzione parte intera è crescente (ma non strettamente crescente);
- la funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ è strettamente crescente;
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ non è monotòna, ma la funzione $x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mapsto x^2$ è strettamente crescente e $x \in \overline{\mathbb{R}}_- \mapsto x^2$ è strettamente decrescente;
- la funzione $x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mapsto \sqrt{x}$ è strettamente crescente e, più in generale:
- $x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mapsto x^r$ con $r \in \mathbb{Q}$ e $r > 0$, è strettamente crescente;
- se $a > 1$ la funzione $r \in \mathbb{Q} \mapsto a^r$ è strettamente crescente;

³³Nel caso di successioni (funzioni con dominio $\mathbb{N}$) si preferisce la lettera n al posto della x per la ‘variabile indipendente’ e la notazione f_n o x_n per il valore della funzione nel punto n anziché $f(n)$ o $x(n)$.

³⁴Non si confonda una successione $\{x_n\}$, che è appunto una funzione e quindi, formalmente, un sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, con l’immagine di una successione, ossia col sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dato da $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- se $0 < a < 1$, $r \in \mathbb{Q} \mapsto a^r$ è strettamente decrescente.

Funzioni esponenziali

Vogliamo definire le funzioni esponenziali (su tutto $\mathbb{R}$) ossia le funzioni in cui la ‘variabile indipendente x ’ appare in esponente. Si noti che questo, in particolare, implica il dare significato a espressioni quali $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Fissiamo una ‘base’ $a > 1$. Il fatto che $x \in \mathbb{Q} \mapsto a^x$ è una funzione strettamente crescente suggerisce di porre, per definizione,

$$a^x := \sup\{a^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ e } r \leq x\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Infatti, si dimostra che tale definizione è ben posta, che estende la definizione data precedentemente quando x è razionale³⁵ e che $x \mapsto a^x$ ‘eredita’ le proprietà fondamentali (xxxix), ossia: $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = x^{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Se la base (sempre positiva) è minore di 1, $0 < a < 1$, allora si definisce $a^x := (a^{-1})^x$ e si verifica facilmente che³⁶:

$$(xlili) \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (a, b > 0).$$

Si noti che $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x > 0$ è strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

La funzione esponenziale ‘naturale’ ha per base il numero di Nepero e che è un numero irrazionale tra 2 e 3 e che verrà definito nella lezione sui limiti; spesso la funzione esponenziale si denota $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x) := e^x \in \mathbb{R}_+$.

Potenze reali

Se fissiamo $\alpha \in \mathbb{R}$ e consideriamo l’espressione x^α al variare della base $x > 0$ otteniamo la funzione *potenza α -esima* $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}_+$; da (xlili) segue immediatamente che le potenze reali verificano le seguenti proprietà:

$$(xliv) \quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha, \quad \forall x, y > 0 \in \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Funzioni iperboliche

Il *seno iperbolico*, il *coseno iperbolico*, la *tangente iperbolica* e la *cotangente iperbolica* sono definite, per ogni $x \in \mathbb{R}$ le prime tre e per $x \neq 0$ la quarta, come:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \cotanh x := \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Dalle proprietà dell’esponenziale seguono facilmente le seguenti proprietà:

$$(xlv) \quad \text{Per ogni } x, y \in \mathbb{R} \text{ si ha: (i) } \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \\ \text{(ii) } \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y. \text{ (iii) } \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

Funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche seno e coseno possono essere definite nel seguente modo³⁷. Consideriamo la ‘circonferenza unitaria’ in $\mathbb{R}^2$, ossia, l’insieme dato da

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

³⁵In tal caso a^x è il massimo dell’insieme $\{a^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ e } r \leq x\}$ e quindi coincide con il suo estremo superiore.

³⁶Naturalmente se $a = 1$, $a^x = 1$ per ogni x e la (xlili) è banalmente vera.

³⁷È possibile definire le funzioni trigonometriche in vari modi. Quello presentato qui ha il vantaggio di rendere subito evidenti le proprietà note dalla geometria euclidea, ma presenta alcuni inconvenienti: innanzitutto, la sua definizione completa richiederebbe una discussione, qui solamente accennata, della lunghezza degli archi di circonferenza e degli ‘orientamenti’ della circonferenza, ma, soprattutto, non è una definizione efficiente dal punto di vista funzionale: si provi, ad esempio, a calcolare le prime due cifre decimali del valore di $\cos 1$. Una definizione più ‘diretta’ è quella per serie; cfr. (lxxvi). Per inciso, la geometria euclidea è una diversa (e bellissima) teoria assiomatica basata sui ‘postulati di Euclide’ (gli *Elementi di Euclide* sono considerati il testo scientifico più influente mai esistito); è possibile ridimostrare all’interno dell’impianto assiomatico dei numeri reali le proposizioni euclidee: è questo un (non breve) percorso interessante di per sé.

Definiamo 2π la lunghezza³⁸ S^1 . Fissiamo ora $0 \leq t < 2\pi$ e prendiamo il punto $(x, y) \in S^1$ tale che l'arco di circonferenza 'che va da $(0, 0)$ a (x, y) in senso antiorario sia lungo³⁹ t ', allora, per definizione, $\cos t = x$ e $\sin t = y$; si estende poi tale definizione a tutti i numeri $t \in \mathbb{R}$ in modo da ottenere funzioni di periodo⁴⁰ 2π . Da questa definizione seguono facilmente le seguenti proprietà:

$$(xlvii) \quad \begin{cases} \sin^2 t + \cos^2 t := (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1, & \forall t \in \mathbb{R}; \\ \cos(t + 2\pi) = \cos t, \sin(t + 2\pi) = \sin t, & \forall t \in \mathbb{R}; \\ \cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \sin 0 = \sin \pi = \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3}{2}\pi = 0, \cos \pi = \sin \frac{3}{2}\pi = -1; \\ 0 < t \cos t < \sin t < t, & \forall 0 < t < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

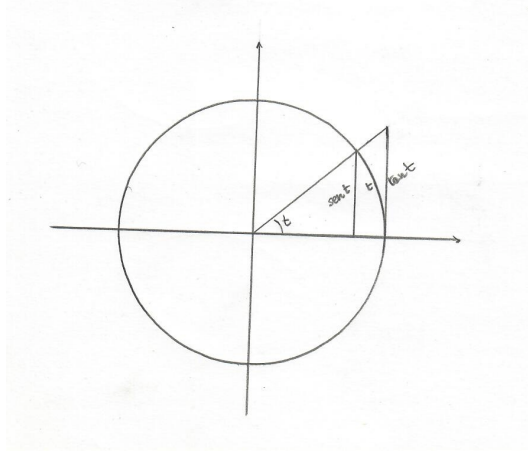


Figura 1: $0 < t \cos t < \sin t < t, \quad \forall 0 < t < \frac{\pi}{2}$

Meno immediate da dimostrare sono le fondamentali formule di addizione⁴¹:

$$(xlviii) \quad \begin{cases} \sin(t + s) = \sin t \cos s + \cos t \sin s, & \forall t, s \in \mathbb{R}, \\ \cos(t + s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s, & \forall t, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Da tali formule seguono, poi, facilmente, molte altre formule della trigonometria, ad esempio, le seguenti identità valide $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$(xlviii) \quad \begin{cases} \sin 2t = 2 \sin t \cos t, & \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \\ \sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t, & \cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t, \\ \cos(t - \frac{\pi}{2}) = \sin t, & \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t, \\ \cos(t + \pi) = -\cos t, & \sin(t + \pi) = -\sin t, \end{cases}$$

e i valori speciali

³⁸Ovviamente, questa frase richiede una discussione: brevissimamente, si possono considerare 'poligoni chiusi (senza autointersezioni) iscritti in S^1 ', e poi prendere l'estremo superiore delle lunghezze di tutte le poligoni iscritte in S^1 : per definizione tale estremo superiore è il numero reale positivo 2π ; naturalmente, la lunghezza di una poligonale è la somma delle lunghezze dei segmenti che la compongono e la lunghezza di un segmento $\sigma := \{(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ di estremi (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è data da $\ell(\sigma) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

³⁹Come sopra, la lunghezza di archi di circonferenza (sottoinsiemi 'connessi' di S^1) si possono definire tramite estremi superiori di lunghezze di poligoni iscritti nell'arco; l'orientamento 'antiorario' è intuitivamente ovvio (ma non altrettanto ovvio ne è una definizione rigorosa).

⁴⁰In altri termini se, per qualche $0 \neq k \in \mathbb{Z}$, $2\pi k \leq t < 2\pi(k+1)$, si pone $\cos t := \cos(t - 2\pi k)$ e $\sin t := \sin(t - 2\pi k)$.

⁴¹La dimostrazione 'euclidea' – ossia, basata sui postulati di Euclide – è, come noto, facile: (cfr. Fig 2); rendere rigorosa tale dimostrazione nell'ambito degli assiomi dei numeri reali è, però, meno immediato, poiché implicherebbe introdurre le nozioni di triangoli e angoli e ridimostrare una serie di semplici proprietà geometriche. Alla fine, il percorso puramente analitico – ossia, la definizione di seno e coseno per serie e la dimostrazione analitica di tutte le proprietà fondamentali – risulta essere più diretto, istruttivo e coerente.

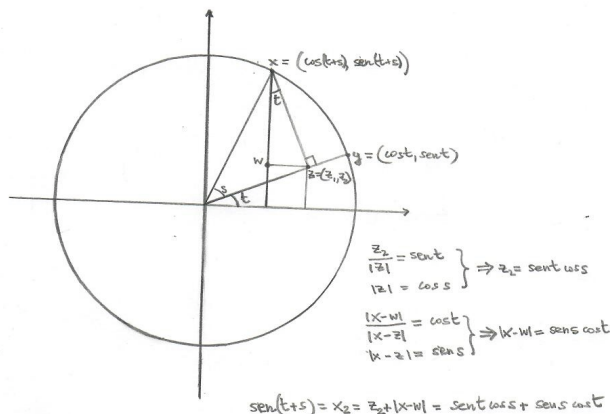


Figura 2: Formula di addizione per i seno

(xlix) $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Altre funzioni elementari della trigonometria sono la *tangente* e la *cotangente* definite, rispettivamente, come

$$\begin{cases} x \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\} \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}, \\ x \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\} \mapsto \cotan x := \frac{\cos x}{\sin x}; \end{cases}$$

tali funzioni sono periodiche di periodo π .

Funzioni composte e inverse

Siano A, B e C insiemi non vuoti e siano $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$. Si chiama *funzione composta* (o ‘composizione di g con f ’) e si denota con $g \circ f$ la funzione

$$g \circ f: x \in A \mapsto g \circ f(x) := g(f(x)) \in C.$$

Sia $A \neq \emptyset$; sia $f: A \rightarrow B$ una funzione biunivoca (ossia, iniettiva e suriettiva). Si chiama *funzione inversa di f* la funzione $g: B \rightarrow A$ che a $y \in B$ associa l’unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$; equivalentemente, g è l’unica funzione da B in A tale che $g \circ f = \text{id}$ dove id è la *funzione identità*: $\text{id}(x) = x$.

Normalmente la funzione inversa di f si denota con f^{-1} .

Se f è strettamente crescente è invertibile (essendo iniettiva) e l’inversa è anche strettamente crescente; analogamente, se f è strettamente decrescente è invertibile (essendo iniettiva) e l’inversa è anche strettamente decrescente.

Esempi.

- Da (xxxvi) segue che la radice n -esima (con dominio $\overline{\mathbb{R}}_+$ se n è pari e $\mathbb{R}$ se n è dispari) è la funzione inversa di $x \mapsto x^n$.
- Da (ii) di (xxxix) segue che $x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mapsto x^{q/p} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ è l’inversa di $x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mapsto x^{p/q} \in \overline{\mathbb{R}}_+$.
- Fissato $a > 0, a \neq 1$, la funzione $y \in \mathbb{R}_+ \mapsto \log_a y \in \mathbb{R}$, detta *logaritmo in base a* , è la funzione inversa della funzione esponenziale⁴³ $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in \mathbb{R}_+$; ossia, per

⁴²Se $B \subseteq \mathbb{R}$, bisognerà non confondere il valore $f^{-1}(x)$ della funzione inversa in x con il reciproco di $f(x)$, $(f(x))^{-1}$.

⁴³Se $a > 0$ e $a \neq 1$ la funzione esponenziale $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ è strettamente monotona e quindi invertibile; inoltre, l’immagine dell’esponenziale è $\mathbb{R}_+$. Quest’ultima affermazione è non banale e si può dimostrare essenzialmente in due modi: o usando (xxxii) per dimostrare che l’immagine degli esponenziali è $\mathbb{R}_+$ oppure usando le proprietà delle funzioni continue (si veda la Lezione 4).

ogni $y > 0$ esiste uno ed un solo $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$ e tale x è dato da $x = \log_a y$. Dall'unicità e dalle proprietà dell'esponenziale seguono facilmente le proprietà fondamentali dei logaritmi (nelle seguenti formulae x e y sono numeri reali strettamente positivi e le basi a e b sono numeri reali strettamente positivi e diversi da 1):

$$(1) \quad (i) \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad (ii) \quad \log_a x^y = y \log_a x; \quad (iii) \quad \log_a x = -\log_{a^{-1}} x; \\ (iv) \quad \log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

- Il seno iperbolico è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e al sua inversa 'arcoseno iperbolico' $\sinh^{-1} x$ si calcola facilmente in termini del logaritmo: $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$. L'inversa della funzione⁴⁴ $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \cosh x$ è data dall'arco coseno iperbolico' $\cosh^{-1} = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$. La tangente iperbolica è strettamente crescente e la sua inversa è data da $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$.
- Le funzioni trigonometriche non sono invertibili (essendo periodiche) ma lo sono su opportuni sottoinsiemi del loro dominio di definizione e quindi su tali domini possono essere invertite⁴⁵:
 - (*arcoseno*) La funzione seno è strettamente crescente su, ad esempio, l'insieme $I := \{x \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\}$: la funzione inversa di $x \in I \mapsto y = \sin x \in J := \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ prende il nome di *arcoseno* di y e si denota $\arcsin y$: dunque, per $y \in J$, $x = \arcsin y$ è l'unico numero in I tale che $\sin x = y$.
 - (*arcocoseno*) L'inversa della funzione $x \in I := \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\} \mapsto \cos x \in J := \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$: per $y \in J$, $x = \arccos y$ è l'unico numero in I tale che $\cos x = y$.
 - (*arcotangente*) L'inversa della funzione $x \in I := \{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\} \mapsto \tan x \in \mathbb{R}$ prende il nome di *arcotangente*: per $y \in \mathbb{R}$, $x = \arctan y$ è l'unico numero in I tale che $\tan x = y$.
 - (*arcocotangente*) L'inversa della funzione $x \in I := \{x \mid 0 < x < \pi\} \mapsto \cotan x \in \mathbb{R}$ prende il nome di *arcocotangente*: per $y \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{arccotan} y$ è l'unico numero in I tale che $\cotan x = y$.

Si noti che l'arcoseno e l'arcotangente sono strettamente crescenti, mentre l'arcocoseno e l'arcocotangente sono strettamente decrescenti.

Parità

Un'altra proprietà notevole di alcune funzioni è la *parità*: una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *pari* se $f(-x) = f(x)$, si dice *dispari* se $f(-x) = -f(x)$. Ad esempio, sono pari le funzioni x^{2n} , $|x|$, $\cosh x$ e $\cos x$; sono dispari le funzioni $\operatorname{sgn}(x)$, x^{2n+1} , $\sinh x$, $\sin x$, $\tanh x$ e, sul loro dominio di definizione, $\cotanh x$, $\tan x$ e $\cotan x$.

4 Limiti

Il concetto di limite vuole esprimere 'lo stabilizzarsi' dei valori di una funzione f quando il suo argomento 'si avvicina' ad un prefissato elemento x_0 . Intuitivamente, una funzione f avrà un limite $L \in \mathbb{R}$ quando i valori $f(x)$ sono arbitrariamente vicini a L se x è preso sufficientemente vicino a x_0 .

Per tradurre in matematica il concetto di 'vicino a' definiamo una classe di sottoinsiemi particolarmente importante di $\mathbb{R}$ e cioè gli 'gli intervalli di $\mathbb{R}$ ': essi sono i sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ 'senza buchi'. Più precisamente:

⁴⁴Il coseno iperbolico è strettamente decrescente su $\mathbb{R}_-$ e strettamente crescente su $\mathbb{R}_+$.

⁴⁵Scegliendo domini diversi su cui le funzioni sono strettamente monotone si ottengono altre funzioni inverse (con diverso codominio); quelle descritte in questa lista vengono normalmente chiamate *rami principali*.

$I \subseteq \mathbb{R}$ è un *intervallo* di $\mathbb{R}$ se $I \neq \emptyset$ e comunque presi due elementi x e y di I con $x \leq y$ si ha che $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\} \subseteq I$. Esempi di intervalli sono: $\{\sqrt{2}\}$, $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}_-$, $\mathbb{R}_+$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$; non è un intervallo $\{0, 1\}$ o $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x < 1/2\}$. Se un intervallo è limitato superiormente (o inferiormente) il suo estremo superiore (o inferiore) può appartenere o può non appartenere all'intervallo; notazioni standard per intervalli limitati sono: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ e la parentesi tonda è sostituita da quella quadrata se l'estremo appartiene all'intervallo; ad esempio $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\} = [0, 1)$. Un intervallo che non contiene i suoi estremi superiore o inferiore (qualora esistano) si dice *intervallo aperto*.

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ un *intorno* di x_0 è un intervallo aperto che contiene x_0 ; si noti, in particolare, che x_0 non può essere un estremo di un suo intorno. Diremo anche che un punto $x_0 \in A$ è *interno* ad A se A contiene un intorno di x_0 .

Infine, per poter formulare propriamente l'espressione ' x tende a x_0 ' diremo che un punto x_0 è un *punto di accumulazione* (o '*un punto limite*') di A se per ogni intorno U di x_0 si ha che $A \cap U \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, ossia, se ogni intorno di x_0 contiene elementi di A diversi da x_0 . È importante notare che un punto di accumulazione per un insieme A può appartenere o può non appartenere all'insieme A : ad esempio, 1 è un punto di accumulazione sia per $[0, 1]$ che per $[0, 1)$.

Limiti finiti

Dati una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione di A , si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il *limite di f per x che tende a x_0* se comunque preso un intorno V di L esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \in V$ per ogni $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$; in tal caso scriveremo $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Due osservazioni:

- (i) in tale definizione il valore di f in x_0 non gioca alcun ruolo; in particolare, x_0 potrebbe non appartenere al dominio di f ;
- (ii) dato un qualunque intorno V di $L \in \mathbb{R}$ è sempre possibile prendere un intorno di L contenuto in V e che sia *simmetrico* rispetto a L , ossia, un intorno $V' = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \subseteq V$ per un opportuno⁴⁶ $\varepsilon > 0$. Quindi, nella definizione di limite possiamo direttamente assumere che V sia un intorno simmetrico di L . Infine, osserviamo che dire che $y \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ è equivalente a dire che $L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$, ossia che $|y - L| < \varepsilon$.

- (iii) In vista di (i) e (ii), la definizione di limite può essere riformulata così: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ se $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta$.

Esempi.

- $\lim_{x \rightarrow -1} |x| = 1$.

Per dimostrare questa affermazione dobbiamo far vedere che, $\forall \varepsilon > 0$, esiste un intorno U di -1 tale che $||x| - 1| < \varepsilon$. Scegliamo $U = (-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$. Allora, se $x \in U$, ossia, se $|x + 1| < \varepsilon$, da (iii) di (xl) segue che $||x| - 1| = ||x| - |-1|| \leq |x + 1| < \varepsilon$. ■

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$.

Si ricordi che il dominio della radice è $A = \overline{\mathbb{R}}_+$. Fissiamo un qualunque $\varepsilon > 0$. Scegliamo $U = (-\varepsilon^2, \varepsilon^2)$. Allora se $x \in A \cap U \setminus \{0\}$ (ossia, se $0 < x < \varepsilon^2$), si ha

$$-\varepsilon < 0 < \sqrt{x} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Si osservi che nel primo esempio abbiamo scelto $\delta = \varepsilon$, mentre nel secondo esempio abbiamo preso $\delta = \varepsilon^2$ (che, se $\varepsilon < 1$, è più piccolo di ε).

Si osservi anche che, in questi due esempi, il valore del limite L coincide con il valore della funzione in⁴⁷ x_0 . Ma non è sempre questo il caso, come i seguenti due esempi mostrano.

⁴⁶Ad esempio, se $V = (a, b)$ con $a < L < b$ possiamo prendere $\varepsilon = \min\{b - L, L - a\}$.

⁴⁷Come vedremo tra poco, quando ciò accade, diremo che la funzione f è *continua* in x_0 .

- Sia $f(x) = \operatorname{sgn}^2(x)$. Si noti che il dominio di f è $\mathbb{R}$ e che $f(x) = 1$ per ogni $x \neq 0$ mentre $f(0) = 0$. In particolare, per ogni intorno U di $x_0 = 0$ si ha che $f(x) = 1$ per ogni $x \in U \setminus \{0\}$ e da questo segue immediatamente che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$.
- Consideriamo la funzione con dominio $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ data da $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. In questo caso $x_0 = 0$ non appartiene al dominio di definizione di f ma ne è comunque un punto di accumulazione e quindi ha senso studiare il $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ed infatti $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Per dimostrare ciò, fissiamo $\varepsilon > 0$ e prendiamo $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Allora se $x \in A \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ (ossia se $0 < |x| < \varepsilon$) si ha che

$$|f(x) - L| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Naturalmente, non sempre il limite esiste:

- La funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto [x]$ non ammette limite per x che tende a $x_0 = n \in \mathbb{Z}$. Infatti, se U è un intorno di $n \in \mathbb{Z}$ si ha che $[x] \leq n - 1$ per ogni $x \in U$ con $x < n$, mentre $[x] \geq n$ per ogni $x \in U$ e $x > n$. Da questo segue che se $\varepsilon < 1$ non esiste alcun intorno di n tale che $|[x] - [y]| < \varepsilon$ per ogni $x, y \in U$ e questo implica che $x \rightarrow [x]$ non ammette limite per x che tende a⁴⁸ $n \in \mathbb{Z}$.

L'esistenza del limite di una funzione è una informazione *locale*. Il seguente semplice 'teorema di permanenza del segno' esprime bene questo fatto:

(li) Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ e x_0 un punto d'accumulazione per A . Allora, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x)$ ha lo stesso segno di⁴⁹ L per ogni $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

Dimostrazione Assumiamo $L > 0$ (lasciando l'analoga dimostrazione del caso $L < 0$ per esercizio). Scegliamo $\varepsilon = L > 0$. Dalla definizione di limite segue che esiste un intorno U di x_0 tale che $|f(x) - L| < \varepsilon = L$ per ogni $x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$, il che implica⁵⁰ $f(x) - L > -\varepsilon$, ossia, $f(x) > L - \varepsilon = 0$. $\blacksquare$

I limiti si 'comportano bene' rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine di $\mathbb{R}$. Ad esempio, non è difficile dimostrare i seguenti risultati, molto utili nel calcolo dei limiti:

(lii) (Algebra dei limiti, teoremi di confronto, cambio di variabili)

Siano f, g, h funzioni con un dominio comune A , $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A e assumiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, con $L, M \in \mathbb{R}$. Allora, si ha che:

$$(i) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (af(x) + bg(x)) = aL + bM;$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = LM;$$

$$(iii) \quad \text{se } g(x), M \neq 0, \text{ allora } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M};$$

Inoltre, valgono i seguenti 'teoremi di confronto':

$$(iv) \quad \text{se } f(x) \leq g(x), \text{ allora } L \leq M,$$

$$(v) \quad \text{se } f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ e } L = M, \text{ allora } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L.$$

Infine, si ha il seguente 'teorema di cambio di variabili':

⁴⁸Si noti che se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di x_0 tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni $x, y \in U \cap A \setminus \{x_0\}$; infatti dalla definizione di limite segue che, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di x_0 tale che $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ per ogni $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ e quindi, $\forall x, y \in U \cap A \setminus \{x_0\}$, si ha: $|f(x) - f(y)| = |(f(x) - L) + (L - f(y))| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < 2(\varepsilon/2) = \varepsilon$. $\blacksquare$

⁴⁹Due numeri reali a e b hanno lo stesso segno se $a \cdot b > 0$.

⁵⁰Si noti che $|x| \leq c$ se e solo se $-c \leq x \leq c$.

(vi) Supponiamo che: $\text{im}(f) \subseteq B$, L sia un punto di accumulazione di B e $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ sia tale che $\lim_{y \rightarrow L} F(y) \in \mathbb{R}$. Se f è iniettiva vicino⁵¹ a x_0 , allora $\lim_{y \rightarrow L} F(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} F \circ f(x)$.

Continuità

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ è un punto d'accumulazione per A , diremo che f è *continua in x_0* (o che ' x_0 è un punto di continuità per f ') se⁵² $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Gli elementi di un insieme A che non sono d'accumulazione per A si chiamano *punti isolati* di A ; è facile vedere che $x_0 \in A$ è un punto isolato di A se e solo se esiste un intorno U di x_0 tale che $U \cap A = \{x_0\}$. Ad esempio, tutti i punti di $\mathbb{Z}$ sono isolati, mentre $\mathbb{Q}$ non ha punti isolati. Un punto isolato del dominio di una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è, per definizione, un punto di continuità per f . Dunque: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ se x_0 è un punto isolato di A oppure se il limite di f per x che tende a x_0 esiste e coincide col valore di f in x_0 . È facile vedere che

(liii) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall x \in A$ tale che $|x - x_0| < \delta$.

Se tutti i punti di A sono di continuità per f diremo che f è *continua su A* e scriveremo $f \in C(A)$ o anche $f \in C(A, \mathbb{R})$ se si vuole specificare il codominio. Da (lii) segue immediatamente che

(liv) Se f e g sono continue in x_0 , allora $f + g$, fg e f/g (nel caso in cui $g \neq 0$) sono continue in x_0 .

Non è difficile mostrare anche che la composizione di funzioni continue è continua:

(lv) Sia $f : A \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0) \in B$. Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0 , allora $g \circ f$ è continua in x_0 .

Forse la proprietà più importante delle funzioni continue è il seguente 'teorema di esistenza degli zeri':

(lvi) Sia $f \in C([a, b])$ tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

In altre parole, una funzione continua su intervallo chiuso e limitato I che assume 'segni opposti' agli estremi di I ha almeno uno 'zero' (ossia un punto dove si annulla) all'interno di I . L'idea della dimostrazione è molto semplice: supponiamo, per fissare le idee, che $f(a) > 0$ e definiamo $P := \{x \in [a, b] \mid f(t) > 0, \forall a \leq t \leq x\}$: chiaramente $a \in P$ e b è un maggiorante di P e quindi P ha un estremo superiore $x_0 = \sup P$. Usando il teorema della permanenza del segno si dimostra poi che si deve avere $f(x_0) = 0$ (poiché i due casi contrari, ossia, $f(x_0) > 0$ o $f(x_0) < 0$ portano a contraddizioni con la definizione di x_0). Si noti che dalla dimostrazione segue anche che f ha lo stesso segno di $f(a)$ (e in particolare è diversa da zero) sull'intervallo $[a, x_0)$.

(lvii) (Teorema dei valori intermedi) Sia I un intervallo e $f \in C(I)$. Allora $f(I)$ è un intervallo (equivalentemente, f assume tutti valori tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in I$).

Dimostrazione Se $x_1 = x_2$ o $f(x_1) = f(x_2)$ la tesi è banalmente vera. Assumiamo $x_1 < x_2$ e supponiamo, per fissare le idee, che $y_1 := f(x_1) < y_2 := f(x_2)$. Sia $y_1 < y_0 < y_2$ e si consideri la funzione $F(x) := f(x) - y_0$. Allora, $F \in C([x_1, x_2])$ e $F(x_1) < 0 < F(x_2)$ e quindi (lvi) implica che esiste $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $F(x_0) = 0$ ossia $f(x_0) = y_0$. ■

Per quanto riguarda la continuità delle funzioni inverse vale il seguente risultato:

(lviii) Sia I un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona e $B := \text{im}(f)$ la sua immagine. Allora la funzione inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ è continua su B .

⁵¹Ossia, esiste un intorno U di x_0 tale che f è iniettiva su $U \setminus \{x_0\}$. In generale, una proprietà $\mathcal{P}$ è vera 'vicino a x_0 ' se esiste un intorno U di x_0 tale che la proprietà $\mathcal{P}$ è vera per $x \in U \setminus \{x_0\}$.

⁵²Si noti che per poter considerare il limite per x che tende a x_0 , x_0 deve essere un punto di accumulazione per A .

Si noti che *non si fa alcuna ipotesi sulla continuità di f* che può dunque essere anche discontinua. La breve dimostrazione di (lviii) si basa sulla definizione di estremo superiore e inferiore.

Infine, menzioniamo brevemente due risultati sulla continuità, più delicati dei precedenti e la cui dimostrazione richiede una discussione della ‘topologia standard’⁵³ di $\mathbb{R}$. Enunciamo questi due teoremi fondamentali in un caso speciale, ossia, nel caso di intervalli ‘compatti’ $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

(lix) (Teorema di Weierstrass) *Una funzione continua $f : E := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ assume massimo e minimo su E .*

Questo significa che esistono $x_m, x_M \in E$ tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in E$.

(lx) (Teorema di Heine–Cantor) *Una funzione continua $f : E := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua su E , ossia, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, per ogni $x, y \in E$ con $|x - y| < \delta$.*

L’avverbio ‘uniformemente’ si riferisce al fatto che δ dipende solo da ε , mentre nella definizione di continuità in un punto y , δ dipende, in generale, sia da ε che da y .

Questi due teoremi si generalizzano al caso di insiemi E compatti⁵⁴.

Limiti infiniti

$\mathbb{R}$ non è limitato e, dunque, sia il dominio che l’immagine di una funzione possono essere non limitati, il che porta in modo naturale a estendere la nozione di limite anche in casi illimitati. Cominciamo con l’estendere la nozione di estremo superiore e inferiore al caso di insiemi non limitati:

Definizione. Se $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme non limitato superiormente, poniamo $\sup A = +\infty$ e diremo anche che $+\infty$ è un punto di accumulazione per A . Se $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme non limitato inferiormente, poniamo $\inf A = -\infty$ e diremo anche che $-\infty$ è un punto di accumulazione per A .

Osserviamo che i simboli ‘ $+\infty$ ’ (più infinito) e ‘ $-\infty$ ’ (meno infinito) non appaiono negli assiomi dei numeri reali e servono esclusivamente a sviluppare il linguaggio matematico: è fondamentale avere sempre chiara qual è la traduzione di affermazioni in cui tali simboli intervengano in termini rigorosi (ossia, in termini degli assiomi). Ad esempio, $\inf A = -\infty$ significa, per definizione, che $A \neq \emptyset$ e che A non ha minoranti, ossia, $\forall m \in \mathbb{R}$, $\exists x \in A$ tale che $x < m$.

Coerentemente, i simboli $\pm\infty$ verranno usati nella notazione relativa agli intervalli: ad esempio l’intervallo non limitato superiormente $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ verrà denotato $[1, +\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, etc.

La maniera più semplice di estendere la nozione di limite è di dire cosa significa ‘essere vicino a $\pm\infty$ ’, ossia di introdurre ‘intorni di $\pm\infty$ ’.

Definizione. Un intorno di $+\infty$ è un intervallo aperto non limitato superiormente $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ con $a \in \mathbb{R}$. Un intorno di $-\infty$ è un intervallo aperto non limitato inferiormente $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ con $a \in \mathbb{R}$.

Possiamo ora dare una definizione che generalizzi la definizione di limite data nel ‘caso finito’ a casi in cui il punto di accumulazione o il limite (o entrambi) possano essere infiniti:

Definizione. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia x_0 un punto di accumulazione (finito o infinito) per A e L un numero reale o $\pm\infty$. Si dice che L è il *limite di f per x che tende a x_0 se comunque preso un intorno V di L esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \in V$ per ogni $x \in U \cap A$* ⁵⁵ *e $x \neq x_0$; in tal caso scriveremo $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.*

Esempi.

⁵³Fondamentalmente, la topologia (standard) di $\mathbb{R}$ studia le proprietà degli insiemi *aperti*: un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se ogni suo punto è interno, ossia, se per ogni $x_0 \in A$ esiste un intorno di x_0 contenuto in A .

⁵⁴Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se e solo se è limitato e il suo complementare è aperto.

⁵⁵Si noti che, nel caso in cui $x_0 = \pm\infty$, la specifica $x \neq x_0$ è pleonastica poiché, secondo le definizioni date, gli intorni di $\pm\infty$ non contengono il ‘punto’ $\pm\infty$ (al contrario degli intorni di punti di $\mathbb{R}$).

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$.

Fissiamo un intorno arbitrario⁵⁶ $V = (M, +\infty)$ di $+\infty$. Scegliamo ora $m = -\sqrt[4]{M}$ e poniamo $U = (-\infty, m)$. Allora se $x < m$ si ha che $x^4 > m^4 = M$. ■

- $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{|x|} = -\infty$.

Fissiamo un intorno $V = (-\infty, m)$ di $-\infty$ con $m < 0$. Scegliamo $\delta = 1/|m|$. Allora se $0 < |x| < \delta$ si ha che $1/\delta < 1/|x|$ e quindi che $-1/|x| < -1/\delta = m$. ■

Si noti, invece, che $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ non esiste⁵⁷.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-2n}{1+n} = -2$.

Qui si sta considerando la funzione (successione) $n \in \mathbb{N} \mapsto x_n = \frac{1-2n}{1+n}$, con dominio dato da $\mathbb{N}$, il cui *unico* punto di accumulazione è $+\infty$ (essendo $\mathbb{N}$ non limitato superiormente). Quindi, in questo caso, $x_0 = +\infty$ e $L = -2$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ cosicché l'intorno di $L = -2$ sarà dato da $V = (-2 - \varepsilon, -2 + \varepsilon)$. Scegliamo poi l'intorno di $x_0 = +\infty$ dato da $U = (3/\varepsilon, +\infty)$. Allora se $n \in \mathbb{N}$ e $n > 3/\varepsilon$, si ha

$$|x_n - L| = |x_n + 2| = \frac{3}{1+n} < \frac{3}{n} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

È facile, infine, mostrare che vale la seguente generalizzazione della proposizione (lii):

(lxi) La proposizione (lii) vale anche se $x_0 = \pm\infty$; inoltre, i punti (iv), (v), (vi) valgono anche nel caso in cui i valori dei limiti siano infiniti.

Le successioni, ossia le funzioni con dominio $\mathbb{N}$ sono, come visto, esempi di funzione ‘semplici’ (il dominio è il più semplice ‘insieme infinito’, con unico punto di accumulazione $+\infty$) eppure esse sono fondamentali nello studio dell’analisi su $\mathbb{R}$ (o anche su insiemi più complicati). Come semplice esempio, enunciamo il seguente ‘teorema ponte’ che caratterizza la continuità in termini di limiti di successioni:

(lxii) (Teorema ponte) Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Allora, f è continua in x_0 se e solo se comunque presa una successione $\{x_n\}$ con $x_n \in A$ che converge a x_0 si ha che la successione $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$.

Dimostriamo il ‘solo se’ del teorema (ossia, che se f è continua, $x_n \in A$ e⁵⁸ $x_n \rightarrow x_0$, allora $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$): sia V un intorno di $f(x_0)$; allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \in V$ per ogni $x \in U \cap A$ e poiché $x_n \rightarrow x_0$ esiste N tale che $x_n \in U$ per ogni $n > N$ e quindi, per tali n , $f(x_n) \in V$. ■

Limiti laterali e limiti di funzioni monotone

L’ordine totale di $\mathbb{R}$ permette un’altra generalizzazione del concetto di limite, cioè quella di ‘limite laterale’, in cui i numeri nel dominio di una funzione vicino a⁵⁹ $x_0 \in \mathbb{R}$ vengono presi solo ‘a sinistra’ (più piccoli) oppure ‘a destra’ (più grandi) di x_0 . In tal modo possiamo fare ‘limiti da sinistra’ o ‘limiti da destra’. Più precisamente, per $x_0 \in \mathbb{R}$ definiamo *intorno sinistro* di x_0 un intervallo della forma (a, x_0) con $a \in \mathbb{R}$, $a < x_0$ e per $x_0 \in \mathbb{R}$ definiamo *intorno destro* di x_0 un intervallo della forma (x_0, a) con⁶⁰ $x_0 < a \in \mathbb{R}$. Diremo che L (numero reale o $\pm\infty$)

⁵⁶Senza perdita di generalità possiamo sempre assumere che gli intorni di $+\infty$ siano della forma $(M, +\infty)$ con $M > 0$ e che gli intorni di $-\infty$ siano della forma $(-\infty, m)$ con $m < 0$.

⁵⁷In ogni intorno di 0 $x \mapsto 1/x$ assume valori arbitrariamente piccoli (negativi ma grandi in valore assoluto) e arbitrariamente grandi.

⁵⁸La notazione $x_n \rightarrow x_0$ significa $\lim x_n = x_0$.

⁵⁹Nel caso di limiti laterali è inutile considerare punti di accumulazione infiniti (in tal caso, infatti, il limite è necessariamente ‘laterale’).

⁶⁰Si noti che secondo queste definizioni x_0 non appartiene mai agli intorni sinistri/destri di x_0 (come nel caso degli intorni di $\pm\infty$); cosa d’altra parte naturale visto che nel concetto di limite il punto x_0 va comunque escluso.

è il *limite sinistro* [rispettivamente, *destro*] di f per x che tende a x_0 da sinistra [destra], e scriveremo $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = L$ [$\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = L$], se comunque preso un intorno V di L esiste un intorno sinistro [destro] U di x_0 tale che $f(x) \in V$ per ogni⁶¹ $x \in A \cap U$.

Chiaramente:

(lxiii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esiste ed è uguale ad L se e solo se esistono entrambi i limiti laterali di f per x che tende a x_0 (da sinistra e destra) e coincidono⁶².

Le funzioni monotone si ‘comportano’ particolarmente bene rispetto ai limiti. Ad esempio, è facile vedere che $\lim_{x \rightarrow n -} [x] = n - 1$ e $\lim_{x \rightarrow n +} [x] = n$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Infatti, più in generale, si ha:

(lxiv) Le funzioni monotone ammettono sempre limiti laterali (eventualmente infiniti).

Dimostrazione Per fissare le idee, consideriamo il caso del limite sinistro di una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e limitata superiormente. Sia x_0 un punto di accumulazione sinistro per A , sia⁶³ $M = \sup_A f \in \mathbb{R}$ e sia $L = \sup_{A \cap (-\infty, x_0)} f$. Dimostriamo che $L = \lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x)$. Fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, da (xxxiii) e dalla definizione di L segue che esiste $\bar{x} \in A \cap (-\infty, x_0)$ (ossia $\bar{x} \in A$ e $\bar{x} < x_0$) tale che $f(\bar{x}) > L - \varepsilon$. Sia U l'intorno sinistro di x_0 dato da $(\bar{x}, x_0)$. Allora, per ogni $x \in U$ si ha $L - \varepsilon < f(\bar{x}) \leq f(x) \leq L < L + \varepsilon$. ■

Si noti che la dimostrazione dà più informazioni dell'enunciato: nel caso di f crescente abbiamo visto che $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = \sup_{A \cap (-\infty, x_0)} f$; analogamente, si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = \inf_{A \cap (x_0, +\infty)} f$, mentre nel caso decrescente inf e sup vanno scambiati.

Alcuni limiti notevoli

(lxv) (i) $\forall a > 1, p \in \mathbb{Z}: \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n \cdot n^p = +\infty$. (ii) $\forall |a| < 1, p \in \mathbb{Z}: \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n \cdot n^p = 0$.
 (iii) $\forall p \in \mathbb{Z}: \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$. (iv) $\forall a > 0: \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Dimostrazione Cominciamo col dimostrare che⁶⁴ $\lim a^n / \sqrt[n]{n} = +\infty$: poniamo $x := a - 1 > 0$; allora, dalla disuguaglianza di Bernoulli (xxii) segue che $a^n / \sqrt[n]{n} = (1+x)^n / \sqrt[n]{n} \geq (1+n)/\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{n} x$ e per confronto⁶⁵ $\lim a^n / \sqrt[n]{n} = +\infty$.

(i): Assumiamo $p < 0$, ossia, $p = -m$ con $m \in \mathbb{N}$. Allora, $a^n n^p = a^n / n^m = (b/\sqrt[n]{n})^{2m}$ con $b = \sqrt[2]{a} > 1$ e quindi la tesi è vera per quanto visto sopra⁶⁶. Se $p \geq 0$, $a^n \cdot n^p \geq a^n / n$ e la tesi segue dal caso precedente con $m = 1$.

(ii): Se $a = 0$ il risultato è ovvio; se $0 < |a| < 1$ poniamo $b := 1/|a|$ cosicché $b > 1$ e $|a^n \cdot n^p|^{-1} = b^n \cdot n^{-p}$, il cui limite è $+\infty$ per (i), il che implica la tesi⁶⁷.

(iii) Sia $\varepsilon > 0$. Da (i) (con $a = 1 + \varepsilon$ e $p = -1$) segue che esiste N tale che $(1 + \varepsilon)^n / n > 1$,

⁶¹Naturalmente, affinché queste definizioni abbiano senso bisogna assumere che x_0 sia un punto di accumulazione sinistro [o destro], ossia che per ogni intorno sinistro [destro] U di x_0 , $A \cap U \neq \emptyset$.

⁶²Se f ha limiti laterali in x_0 diversi, diremo che f ha una *discontinuità di salto* in x_0 . Diremo anche che ‘ f ha una *discontinuità eliminabile* in x_0 ’, se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ ma $L \neq f(x_0)$; infine se non esiste (finito) il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ diremo che ‘ f ha una *discontinuità essenziale* in x_0 ’. Si noti che nel caso di discontinuità eliminabile x_0 appartiene al dominio di f , ma negli altri due casi si possono considerare anche punti di $\mathbb{R}$ che non appartengano al dominio di f (ma ne devono essere, comune, punti d'accumulazione).

⁶³ $\sup_A f := \sup\{f(x) \mid x \in A\}$.

⁶⁴Poiché le successioni (viste come funzioni) hanno dominio $\mathbb{N}$ che ha $+\infty$ come unico punto di accumulazione, a volte si trascurava nella notazione ‘ $n \rightarrow +\infty$ ’, non essendoci alcuna ambiguità.

⁶⁵ $\forall M > 0$ se $n > (M/x)^2$, allora $n \cdot x > M$ ossia $\lim x\sqrt[n]{n} = +\infty$; inoltre, dalla definizione di limite infinito segue immediatamente che se $a_n \geq b_n$ e $\lim b_n = +\infty$ allora $\lim a_n = +\infty$ (‘confronto’).

⁶⁶Si noti che se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, allora $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^m = +\infty$ per ogni $m > 0$.

⁶⁷Dalla definizione di limite infinito segue immediatamente che se $\lim a_n = +\infty$, allora $\lim 1/a_n = 0$. Si osservi anche che dalla definizione di limite segue immediatamente che $\lim x_n = 0$ se e solo se $\lim |x_n| = 0$.

che equivale a $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$; quindi se $n > N$, $1 - \varepsilon < 1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$.

(iv) Segue facilmente da (iii) per confronto. ■

(lxvi) La successione $e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente e limitata; il suo limite è per definizione il numero di Nepero (o di Eulero) e .

Per verificare questa affermazione si mostra (oltre alla crescita di e_n) che la successione $E_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è strettamente decrescente. Osservando che $e_n < E_n$ per ogni n , si ha che, se $m < k < n$, allora $e_m < e_k < E_k < E_n$. Da **(lxiv)** e **(lii)** segue, dunque, che esistono i limiti $\lim e_n$ e $\lim E_n$ e che $\lim e_n \leq \lim E_n$; d'altra parte $\lim E_n = \lim e_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim e_n$, ossia, i due limiti coincidono e il loro valore comune è per definizione l'importantissimo numero di Nepero denotato e .

Da **(lxv)** e **(lxvi)** segue che:

(lxvii) Per ogni $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x x^\alpha = +\infty$. Per ogni $0 < a < 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x x^\alpha = 0$. Per ogni $a > 1$, $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_a x)/x^\alpha = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (\log_a x) x^\alpha = 0$.

Limiti fondamentali legati all'esponenziale e al logaritmo sono:

(lxviii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Limiti fondamentali legati alle funzioni trigonometriche/iperboliche sono⁶⁸:

(lxix) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$.

Infine, il seguente limite è notevolissimo e significativamente più difficile da dimostrare dei precedenti⁶⁹:

(lxx) (Formula di Stirling) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n} = 1$.

Continuità delle funzioni elementari

Discutiamo, ora, la continuità delle funzioni elementari.

Chiaramente $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ e dunque la funzione identità $x \mapsto x$ è continua su $\mathbb{R}$. Dall'algebra dei limiti segue che i *polinomi sono funzioni continue* su $\mathbb{R}$.

La radice ennesima $x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow \sqrt[n]{x}$ è la funzione inversa di $y \in \mathbb{R}_+ \mapsto y^n$ e dunque, per **(lviii)**, è continua sul suo dominio di definizione.

Da **(xl)**–(iii) segue immediatamente che $|x|$ è continua su $\mathbb{R}$.

La funzione $x \rightarrow \operatorname{sgn}(x)$ è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ed ha una discontinuità di salto in 0 essendo $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$. Analogamente, le funzioni parte intera e parte frazionaria sono continue su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ e hanno discontinuità di salto in $n \in \mathbb{Z}$.

L'esponenziale $x \rightarrow e^x$ è continua su $\mathbb{R}$, infatti, dal terzo limite in **(lxviii)** segue che⁷⁰ $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, e quindi che e^x è continua in $x = 0$. Da **(xlili)**–(i), e l'algebra dei limiti, segue,

poi, che $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0+y} = e^{x_0} \lim_{y \rightarrow 0} e^y = e^{x_0}$. La continuità di a^x su $\mathbb{R}$ segue osservando che $a^x = e^{(\log a)x}$.

Per $0 < a \neq 1$, $x \rightarrow \log_a x$ è continua essendo l'inversa di una funzione strettamente monotona su $\mathbb{R}$ (cfr. **(lviii)**).

La continuità delle funzioni iperboliche e delle loro inverse segue dalla continuità di e^x e da

⁶⁸I limiti relativi al seno e coseno seguono facilmente dalla definizione per serie; vedi **(lxvii)**.

⁶⁹È, invece, elementare dimostrare (usando le definizioni date in **(lxvi)**) che, per ogni numero naturale n , si ha: $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$, e che vale la disuguaglianza stretta per $n \geq 2$.

⁷⁰Si osservi che se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = L \cdot 0 = 0$.

(lviii).

Analogamente a quanto visto per l'esponenziale, dal primo e terzo limite in (lxix) segue che $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ e che $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, ossia, che seno e coseno sono continue in 0. Dalle formule di addizione segue poi la continuità su tutto $\mathbb{R}$. La continuità delle funzioni trigonometriche inverse segue di nuovo da (lviii).

Serie

Data una successione $\{a_k\}$ possiamo considerare la successione ottenuta addizionando ricorsivamente i termini a_k , ossia la successione ('somme parziali')

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k;$$

questa nuova successione $\{s_n\}$ prende il nome di 'serie numerica con termini $\{a_k\}$ '.

Di solito il simbolo⁷¹ $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ha una doppia interpretazione: può indicare sia il valore del limite $\lim s_n$ quando questo esiste (finito o infinito), sia la serie stessa $\{s_n\}$. Ad esempio quando si parla del 'comportamento della serie $\sum a_n$ ' ci si riferisce al comportamento della successione

$\{s_n\}$, mentre quando si scrive ' $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$ ' si intende, evidentemente, che $\lim s_n = L$.

Più precisamente, si dice che *una serie è convergente* se esiste il limite (finito) $\lim s_n = L \in \mathbb{R}$; *una serie è divergente* se $\lim s_n = \pm\infty$; se $\{s_n\}$ non ha limite (finito o infinito) diremo che la serie è *irregolare*.

Osservazioni ed esempi.

- (Serie geometrica di ragione x). Da (xix), (lxv) e l'algebra dei limiti (lii) segue che la serie geometrica di ragione x , $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$, converge a $x/(1 - x)$ se $|x| < 1$, diverge a $+\infty$ se $x \geq 1$, è irregolare se $x \leq -1$.

- Se una serie $\sum a_k$ converge, cioè $\lim s_n = L \in \mathbb{R}$, allora⁷² $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = L - L = 0$. Ossia:

(lxxi) *La successione dei termini di una serie convergente tende sempre a 0.*

- Una serie i cui termini soddisfano $a_k > 0$ si dice *a termini positivi*. La successione delle somme parziali s_n di una serie a termini positivi è chiaramente una successione strettamente crescente e quindi (proposizione (lxiv)) o converge ad un numero positivo o diverge a $+\infty$. Ad esempio, da (xxvi) segue che un maggiorante di $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ è 2 e quindi⁷³ la serie è convergente:

$$(lxxii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

D'altra parte, da (xxv), per confronto, segue che la cosiddetta serie armonica diverge:

$$(lxxiii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

⁷¹O anche $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ o, ancora più semplicemente, $\sum a_k$.

⁷²Si osservi che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+m} = L$ per ogni m .

⁷³La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} =: \zeta(x)$ è nota come funzione zeta di Riemann.

- Lo studio delle serie è argomento fondamentale in ogni ramo della matematica. Strumenti utili per tale studio sono i *criteri di convergenza*, ossia, condizioni sufficienti sui termini della serie che garantiscono la convergenza o la divergenza di una serie. Alcuni criteri standard sono i seguenti:

- (lxxiv) (i) (Criterio della radice) Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim \sqrt[n]{a_n} = \theta$. Allora se $\theta > 1$ la serie diverge, se $\theta < 1$ la serie converge.
- (ii) (Criterio del rapporto) Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim a_{n+1}/a_n = \theta$. Allora se $\theta > 1$ la serie diverge, se $\theta < 1$ la serie converge.
- (iii) (Criterio di convergenza assoluta) Sia $\sum a_n$ una serie. Se la serie $\sum |a_n|$ converge, allora converge anche la serie $\sum a_n$ e si ha $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$; in tal caso si dice che la serie converge assolutamente.
- (iv) (Criterio di Leibniz) Sia $\{a_n\}$ una successione decrescente con limite 0, allora la serie a segni alterni $\sum (-1)^n a_n$ converge.

- (Serie esponenziale). Dato $x \in \mathbb{R}$, si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, dove, per $n = 0$, $x^0 = 1$ per ogni x . Per $x = 0$, la serie vale 1 e per $x \neq 0$ consideriamo direttamente la convergenza assoluta. Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1}$ tende a $\theta = 0$, per (lxxiv)–(ii) la serie converge per ogni x . Dunque $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ definisce una funzione con dominio e codominio $\mathbb{R}$. Infatti, si dimostra la seguente notevole identità:

(lxxv) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

- (Serie trigonometriche) Analogamente, sempre col criterio del confronto, è facile vedere che anche le serie a segni alterni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

convergono assolutamente per ogni x ed inoltre si ha che⁷⁴

(lxxvi) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

5 Derivate

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, la derivata di f in x_0 è data dal limite, se esiste,

(lxxvii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x, x_0)$

e si denota usualmente con⁷⁵ $f'(x_0)$ o $Df(x_0)$; il rapporto $R_f(x, x_0) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si chiama *rapporto incrementale* e descrive il tasso di variazione dei valori di una funzione f rispetto ad una variazione da x_0 a x .

Geometricamente, il rapporto incrementale rappresenta il ‘coefficiente angolare’ della retta passante per i punti del piano $\mathbb{R}^2$ dati da $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ e quindi, al limite, descrive il

⁷⁴Questa, come accennato sopra, è la definizione ‘più elementare’ delle funzioni trigonometriche.

⁷⁵Altri simboli che denotano la derivata sono $\partial_x f(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$.

coefficiente angolare della ‘retta tangente’⁷⁶ a f (ossia, al grafico di f) nel punto $(x_0, f(x_0))$. Fisicamente, la derivata rappresenta la velocità istantanea di una particella vincolata a muoversi su di retta la cui posizione al tempo t è data dalla funzione $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$: essendo la velocità media tra i tempi t_0 e t data da $v_m(t) := (x(t) - x(t_0))/(t - t_0)$, prendendo il limite per t che tende a t_0 si ottiene, per definizione (e quando esiste), la *velocità istantanea*⁷⁷

$$v(t) := x'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

Alcune osservazioni:

- Se $f = c$ è costante, allora il suo rapporto incrementale $R_f(x, x_0) = (c - c)/(x - x_0) = 0$ e quindi la sua derivata è identicamente uguale a zero.

Se $f(x) = x$ è la funzione identità, il suo rapporto incrementale $R_f(x, x_0) = (x - x_0)/(x - x_0) = 1$ e quindi la sua derivata è identicamente uguale ad uno.

- Se poniamo, nella definizione di derivata, $x = x_0 + h$, si ha che $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

- Molti limiti calcolati nella sezione precedente sono delle derivate. Ad esempio, da (lxxviii) e (lxix) segue immediatamente⁷⁸:

$$(lxxviii) \quad (\log)'(1) = 1 = (\exp)'(0); (\sinh)'(0) = 1 = (\cosh)'(0); (\cos)'(0) = 0 = (\sinh)'(0).$$

- Se una funzione è derivabile in x_0 allora è continua in x_0 , infatti, per l'algebra dei limiti,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

- Sempre dall'algebra dei limiti segue immediatamente che

(lxxix) Se f e g sono derivabili in x_0 allora lo è anche la combinazione lineare $af + bg$ e si ha $(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)$.

Le altre principali regole di derivazione sono:

(lxxx) Assumiamo che f e g siano derivabili in x_0 . Allora⁷⁹:

- (i) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- (ii) se $f'(x_0) \neq 0$, allora $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$ e $\left(\frac{g}{f}\right)'(x_0) = \frac{g'(x_0)f(x_0) - g(x_0)f'(x_0)}{f^2(x_0)}$;
- (iii) se $y_0 = f(x_0)$ e F è derivabile in y_0 , $(F \circ f)'(x_0) = F'(y_0) \cdot f'(x_0)$;
- (iv) se f è iniettiva e continua in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $f'(x_0) \neq 0$ allora $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$
dove $y \mapsto f^{-1}(y)$ denota la funzione inversa di f e $y_0 = f(x_0)$.

Derivate delle funzioni elementari

Dalle regole di derivazioni (lxxx) (e da (lxxviii)) è facile ricavare le formule per le derivate delle funzioni elementari. Vediamone qualche esempio⁸⁰:

- $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$. Per induzione: per $n = 1$, la formula è vera (come visto sopra); assumiamo la formula valida per $n \geq 1$, allora, da (lxxx)–(i), segue che $x^{n+1} = x^n \cdot x$ è derivabile e $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^{n-1} \cdot x + x^n = (n+1)x^n$.

- Dalle proprietà del logaritmo, da (lxxix) e da (lxxviii), segue che, per ogni $x > 0$:

$$(\log x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\log(1+y)}{y} = \frac{1}{x},$$

(nella penultima uguaglianza abbiamo fatto il cambio di variabile $y = h/x$).

⁷⁶Più precisamente, se esiste la derivata in x_0 , la retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è, per definizione, la *retta tangente* a f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

⁷⁷Spesso si usa anche la notazione $\dot{x}(t_0)$ al posto di $x'(t_0)$.

⁷⁸Per le derivate di $\cos$ e $\cosh$ si noti che se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = L$, con $L \in \mathbb{R}$, allora, per l'algebra dei limiti, si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = L \cdot 0 = 0.$$

⁷⁹Quando scriviamo $F'(x_0)$ stiamo implicitamente affermando che F è derivabile in x_0 . La (i) viene, a volte, chiamata ‘regola di Leibniz’, la (iii) ‘regola della catena’.

⁸⁰La notazione $(f(x))' = g(x)$ è frequentemente usata al posto della più precisa notazione $f'(x) = g(x)$.

- Dalle proprietà dell'esponenziale, da (lxxix) e da (lxxviii), segue che, per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

- Dalle formule di addizione per il seno, da (lxxix) e da (lxxviii), segue che, per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x \right) = \cos x.$$

- Vediamo due applicazioni della derivazione di funzioni inverse. Sia $x \in (-1, 1) \mapsto \arcsen x \in (-\pi/2, \pi/2)$ la funzione inversa di $y \in (-\pi/2, \pi/2) \mapsto \sen y \in (-1, 1)$. Allora, da (lxxx)-(iv) e da quanto visto sopra, si ha che⁸¹:

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{(\sen y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Analogamente, sia $x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan x \in (-\pi/2, \pi/2)$ la funzione inversa di $y \in (-\pi/2, \pi/2) \mapsto \tan y \in (-1, 1)$. Allora:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

- Infine, vediamo un'applicazione di (lxxx)-(iv) ('regola della catena' o derivazione di funzioni composte) e calcoliamo la derivata della gaussiana $x \mapsto a e^{-cx^2}$, (dove a, c sono costanti positive). Ponendo, $f(x) = -cx^2$ e $F(y) = a e^y$, si ha che:

$$(a e^{-cx^2})' = a e^{-cx^2} \cdot (-cx^2)' = -2ac e^{-cx^2}.$$

Per una lista estesa di derivate elementari (tutte ottenibili con metodi analoghi a quelli usati qui) si veda, ad esempio, https://en.wikibooks.org/wiki/Calculus/Tables_of_Derivatives.

Teoremi elementari sulle derivate

Il rapporto incrementale di una funzione è positivo se e solo se la funzione è crescente. Questa semplice osservazione è alla base dei due seguenti teoremi fondamentali sulle derivate:

(lxxxii) (Teorema di Fermat) Se x_0 è un punto di massimo o minimo per una funzione⁸² $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ (per un qualche $\delta > 0$) e f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione Supponiamo x_0 punto di minimo (altrimenti si consideri $-f$). Per $x > x_0$, $R_f(x, x_0) \geq 0$ mentre per $x < x_0$ $R_f(x, x_0) \leq 0$. Dall'esistenza del limite di R_f (per x che tende a x_0) segue (proposizione (lxiii)) che i limiti laterali devono coincidere e poiché il limite destro è non negativo e il limite sinistro non positivo si deve avere $f'(x_0) = 0$. ■

(lxxxii) (Teorema del valor medio di Lagrange) Se f è continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , allora esiste $a < x_0 < b$ tale che $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$.

Dimostrazione Sia $F(x) := (f(x) - f(a)) \cdot (b - a) - (f(b) - f(a))(x - a)$. Si noti che F è continua sull'intervallo compatto $[a, b]$ ed inoltre $F(a) = F(b) = 0$. Quindi, per il teorema di Weierstrass (lix), F ha o massimo o minimo in un punto⁸³ $x_0 \in (a, b)$ e, dunque, per il teorema di Fermat (lxxxii), $F'(x_0) = 0$, il che è equivalente a $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$. ■

Alcuni importanti corollari immediati del teorema di Lagrange⁸⁴ sono i seguenti:

(lxxxiii) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile sull'intervallo I . Allora, valgono le seguenti affermazioni.

⁸¹Essendo $\sen y = x$ si ha che $\cos^2 y = 1 - \sen^2 y = 1 - x^2$ e poiché $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\cos y > 0$, e quindi $\cos y = \sqrt{1-x^2}$.

⁸² $x_0 \in A$ è un punto di massimo [rispettivamente, minimo] per una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se $f(x_0) \geq f(x)$ [rispettivamente, $f(x_0) \leq f(x)$] $\forall x \in A$. Un punto in cui si annulla la derivata si chiama *punto critico*. Dunque il teorema di Fermat asserisce che i punti di massimo o minimo (locale) di una funzione sono punti critici.

⁸³Per Weierstrass, F assume massimo e minimo in $[a, b]$ e se nessuno dei due fosse un punto in (a, b) , allora massimo e minimo sarebbero assunti in a o b dove la funzione ha lo stesso valore, ma questo significherebbe che la funzione è costante e si avrebbe una contraddizione.

⁸⁴ Il teorema di Lagrange è equivalente ai seguenti teoremi:

Teorema di Rolle. Sia f continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e $f(a) = f(b)$. Allora, $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Teorema del valor medio di Cauchy. Siano f, g continue su $[a, b]$ e derivabili su (a, b) . Allora, $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0)(g(b) - g(a)) = g'(x_0)(f(b) - f(a))$.

- (i) se $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, allora f è identicamente costante su I .
- (ii) $f'(x) \geq 0$ [risp., $f' \leq 0$], $\forall x \in I$ se e solo se f è crescente [risp., decrescente] su I .
- (iii) se $f'(x) > 0$ [risp., $f'(x) < 0$], $\forall x \in I$, allora f è strettamente crescente [risp., decrescente] su I .

Dimostriamo, ad esempio (iii): sia $f' > 0$ su I e siano $x < y$ punti di I ; allora, possiamo applicare il teorema di Lagrange con $a = x$ e $b = y$, per cui, $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x)$ per un qualche $x < x_0 < y$ e dunque $f(y) - f(x) > 0$, essendo $f'(x_0) > 0$. ■

Sebbene non sia elementare come i precedenti teoremi, includiamo in questa sezione la regola di de l'Hôpital, o, più propriamente, il teorema di Bernoulli-Hôpital, un risultato (molto amato dagli studenti) che, in certi casi, semplifica il calcolo dei limiti delle cosiddette forme indeterminate '0/0' o ∞/∞ .

(lxxxiv) (Teorema di Bernoulli-Hôpital) Si consideri l'intervallo (a, x_0) con $x_0 \in \mathbb{R}$ o $x_0 = +\infty$ e siano $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con $g' \neq 0$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (con $L \in \mathbb{R}$ o $L = \pm\infty$), allora⁸⁵

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ad esempio:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \cdot x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{(lxxxiv)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} = 1. \end{aligned}$$

Derivate successive

Se una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, è derivabile su I , allora $f' : x \in I \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ definisce una nuova funzione su I e, a sua volta, si può studiare la derivabilità di f' in un punto $x_0 \in I$: qualora la derivata di f' esista in x_0 , poniamo $(f')'(x_0) =: f''(x_0) =: D^2 f(x_0)$ e chiameremo tale numero la derivata seconda di f in x_0 . Naturalmente, tale procedimento può essere iterato, portando alla nozione di derivata terza (o del terzo ordine), di derivata quarta, e così via, iterativamente. Se una funzione è derivabile $n \in \mathbb{N}$ volte in I e la sua derivata n -esima $f^{(n)} = D^n f$ è continua in ogni punto di I diremo che f è di classe C^n e scriveremo $f \in C^n(I) = C^n(I, \mathbb{R})$.

La natura dei punti critici di una funzione può essere studiata usando la derivata seconda. Ad esempio, si ha:

(lxxxv) Sia f derivabile su di un intervallo I e derivabile due volte in un suo punto interno x_0 . Allora,

- (i) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo locale stretto per⁸⁶ f ;
- (ii) Se x_0 è un minimo locale, allora $f''(x_0) \geq 0$.

Applicando **(lxxxv)** a $-f$ si ottengono le analoghe affermazioni sui massimi locali (con le disuguaglianze inverse).

La derivata seconda è anche particolarmente importante in relazione alla 'curvatura' o 'convessità' del grafico: una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, si dice convessa su I se, comunque presi tre punti $a < x < b$ in I , la retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ nel punto x ha valore maggiore o uguale a $f(x)$; se vale sempre la disuguaglianza stretta diremo che f è strettamente convessa⁸⁷. Una funzione si dice [strettamente] concava se $-f$ è [strettamente] convessa.

⁸⁵La tesi continua a valere anche nel caso di intervallo (x_0, a) con $x_0 \in \mathbb{R}$ o $x_0 = -\infty$, o nel caso di x_0 interno ad un intervallo I .

⁸⁶Ossia, esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > f(x_0)$ per ogni $0 < |x - x_0| < \delta$.

⁸⁷Analiticamente, la convessità è equivalente a $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$, $\forall a < x < b$ in I .

(lxxxvi) Sia f derivabile due volte su un intervallo I . Allora, f è [strettamente] convessa su I se e solo se $f'' \geq 0$ [$f'' > 0$] su I .

A questo punto si hanno gli strumenti principali per poter descrivere in dettaglio il ‘comportamento’ di una funzione. Vediamo un semplice esempio.

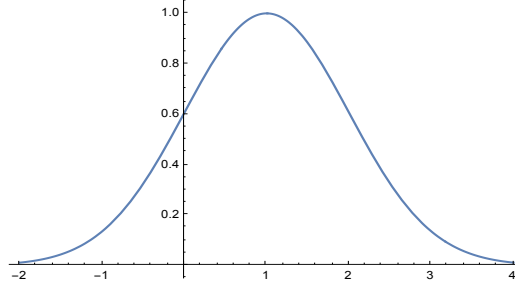


Figura 3: La gaussiana $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) := e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$

Sia⁸⁸ $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) := e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$. Innanzitutto, $f > 0$ sul suo dominio di definizione, che è $\mathbb{R}$. Poi, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = 0$, ossia l’asse delle x , $\{y = 0\}$, è un ‘asintoto orizzontale’ per⁸⁹ f . Poi, $f' = (1 - x)f(x)$ e quindi f ha un unico punto critico in $x = x_0 := 1$; infatti, osservando che $f(x) < 1 = f(1)$ per ogni $x \neq 1$ si vede che $x_0 = 1$ è un massimo globale stretto per f . Infine, $f''(x) = x(x - 2)f(x)$ e quindi $f'' = 0$ se e solo se $x = x_{\pm} := 1 \pm 1$ e $f'' > 0$ se $|x - 1| > 1$ e $f'' < 0$ se $|x - 1| < 1$, ossia, f è strettamente convessa in⁹⁰ $\{x \mid |x - 1| > 0\}$ e strettamente concava in $\{x \mid |x - 1| < 0\}$ e $x_{\pm}$ sono i punti di flesso⁹¹.

L’esistenza delle derivate successive di f in x_0 permette di approssimare la funzione f , in un intorno di x_0 , con opportuni polinomi di grado legato all’ordine di derivabilità di f . Più precisamente si ha:

(lxxxvii) (Formula di Taylor) Sia f definita in un intervallo E e derivabile $n \in \mathbb{N}$ volte in $x_0 \in E$. Allora,

(i) $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x; x_0)$ e il ‘resto n -esimo’ R_n (definito da questa

identità) soddisfa $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x; x_0)}{x^n} = 0$.

(ii) Se f è derivabile $n + 1$ in un intorno U di x_0 , allora per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$ esiste un punto

ξ tra x e x_0 tale che $R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$.

La formula in (lxxxvii)–(i) si chiama ‘formula di Taylor di f in x_0 di ordine n ’; la formula per R_n in (lxxxvii)–(ii) si chiama resto⁹² di Lagrange (cfr. il teorema del valor medio di Lagrange (lxxxii)).

La dimostrazione di (lxxxvii) si basa su un’applicazione iterata del teorema del valor medio di Cauchy (cfr. nota 84).

⁸⁸ f è una funzione ‘gaussiana’.

⁸⁹ Più in generale, la retta $r(x) = ax + b$ è un asintoto obliquo in $\pm\infty$ f se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - r(x) = 0$; se uno dei limiti laterali $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ diremo che f ha un asintoto verticale in x_0 .

⁹⁰ Il fatto che $f''(1) > 0$ e $f'(1) = 0$ conferma che 1 è un massimo locale stretto (ma già sappiamo che 1 è un massimo globale stretto).

⁹¹ Ossia, i punti in cui la derivata seconda cambia segno.

⁹² Un’altra forma comune e ‘più esplicita’ del resto si basa sul calcolo integrale (cfr. prossima sezione) secondo la quale $R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(y)(x - y)^n dy$ (‘resto in forma integrale’).

6 Integrali

La nozione di integrale nasce storicamente dall'esigenza di calcolare aree piane delimitate da curve. Vediamo un esempio.

Consideriamo il 'triangolo curvilineo' $\mathcal{T} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ e cerchiamo di calcolarne l'area. Naturalmente, il punto di partenza è che un rettangolo con base lunga b e altezza lunga h ha area $b \cdot h$ e l'idea è di approssimare $\mathcal{T}$ con l'unione di opportuni rettangoli con base sempre più piccola. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e dividiamo la 'base' $[0, 1]$ in n parti uguali ottenendo n intervalli $I_k := [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$, per $1 \leq k \leq n$, di lunghezza⁹³ $|I_k| = 1/n$. Chiaramente

$$\mathcal{T} = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{R}_k, \quad \text{dove } \mathcal{R}_k := \{(x, y) \mid x \in I_k \text{ e } 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Se R_k denota il rettangolo $I_k \times [0, (\frac{k-1}{n})^2]$ e R'_k denota il rettangolo $I_k \times [0, (\frac{k}{n})^2]$ si ha che $R_k \subseteq \mathcal{T}_k \subseteq R'_k$ e dunque⁹⁴

$$\text{area}(R_k) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{(k-1)^2}{n^3} \leq \text{area}(\mathcal{T}_k) \leq \text{area}(R'_k) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^3}$$

da cui, sommando su k , segue che⁹⁵

$$\sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} \leq \text{area}(\mathcal{T}) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3}.$$

Ora, prendendo il limite per $n \rightarrow +\infty$ in questa espressione, notando che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{1}{2n})}{3} = \frac{1}{3} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n}) \cdot (1 + \frac{1}{2n})}{3} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

otteniamo, grazie al teorema di confronto (lii)–(v), che $\text{area}(\mathcal{T}) = 1/3$.

Questo procedimento si può generalizzare facilmente e porta alla nozione di integrale di Riemann, di cui, ora, daremo una brevissima descrizione.

Sia E un intervallo limitato e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Una *partizione dell'intervallo* E è una famiglia finita di intervalli limitati e disgiunti $P = \{I_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ tali che $\cup_k I_k = E$; denotiamo con $\mathcal{P}(E)$ la famiglia di tutte le partizioni di E . Chiamiamo *somma inferiore* e *somma superiore di Riemann* di f su E rispetto alla partizione P i numeri reali

$$\underline{S}_E(f, P) := \sum_{k=1}^n (\inf_{I_k} f) \cdot |I_k|, \quad \bar{S}_E(f, P) := \sum_{k=1}^n (\sup_{I_k} f) \cdot |I_k|.$$

Non è difficile dimostrare che $\underline{S}_E(f, P) \leq \bar{S}_E(f, P')$ per ogni $P, P' \in \mathcal{P}(E)$ e dunque

$$\mathcal{J}_E^-(f) := \sup\{\underline{S}_E(f, P) \mid P \in \mathcal{P}(E)\} \leq \mathcal{J}_E^+(f) := \inf\{\bar{S}_E(f, P) \mid P \in \mathcal{P}(E)\}.$$

I numeri reali $\mathcal{J}_E^-(f)$ e $\mathcal{J}_E^+(f)$ si chiamano, rispettivamente, *integrale di Riemann inferiore* e *superiore* di f su E . Se $\mathcal{J}_E^-(f) = \mathcal{J}_E^+(f)$ diremo che f è *integrabile (secondo Riemann)* su E e chiameremo $\mathcal{J}_E(f) := \mathcal{J}_E^-(f) = \mathcal{J}_E^+(f)$ l'*integrale (di Riemann) di f su E* . La famiglia

⁹³Se I è un intervallo limitato, la sua *lunghezza* (o 'misura') è, per definizione, il numero non negativo $\sup I - \inf I$: tale numero, ovviamente, non dipende dal fatto che gli estremi appartengano o meno all'intervallo.

⁹⁴Qui c'è un punto delicato: ossia, stiamo scrivendo 'area($\mathcal{T}_k$)' senza aver definito cos'è l'area, ma usandone una idea intuitiva. In effetti, più avanti *definiremo* le aree tramite gli integrali.

⁹⁵Si ricordi ((xxiv)) che $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

delle funzioni integrabili secondo Riemann su E verrà denotata $\mathcal{R}(E)$.

Ad esempio, la funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ identicamente uguale a $h \in \mathbb{R}$ è integrabile su E ed il suo integrale è⁹⁶ $(b-a) \cdot h$ dove $a = \inf E$ e $b = \sup E$; invece, la funzione $f : x \in [0, 1] \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ che vale $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è integrabile secondo Riemann, poiché $\mathcal{J}_E^-(f) = 0$ e $\mathcal{J}_E^+(f) = 1$.

Dalle definizioni date sopra, segue facilmente⁹⁷ che:

(lxxxviii) $f \in \mathcal{R}(E)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una partizione $P = \{I_k \mid 1 \leq k \leq n\} \in \mathcal{P}(E)$ tale che

$$\overline{S}_E(f, P) - \underline{S}_E(f, P) = \sum_{k=1}^n (\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f) \cdot |I_k| = \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x, y \in I_k} |f(x) - f(y)| \right) \cdot |I_k| < \varepsilon.$$

Notazioni usuali per l'integrale di Riemann sono

$$\mathcal{J}_E(f) =: \int_E f =: \int_a^b f =: \int_E f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx, \quad (a = \inf E, \quad b = \sup E);$$

gli estremi a e b dell'intervallo E vengono anche chiamati ‘estremi di integrazione’.

Le proprietà fondamentali dell'integrale di Riemann sono:

(lxxxix) Sia E un intervallo limitato, $f, g \in \mathcal{R}(E)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora:

- (i) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(E)$ e $\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$;
- (ii) $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ e $f \cdot g$ sono integrabili;
- (iii) Se $f \leq g$ allora $\int_E f \leq \int_E g$;
- (iv) $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$;
- (v) per ogni intervallo $I \subseteq E$, $f \in \mathcal{R}(I)$ e se $P = \{I_k\} \in \mathcal{P}(E)$ si ha $\int_E f = \sum_{k=1}^n \int_{I_k} f$.

Le proprietà (i) e (iii) si interpretano dicendo che l'integrale di Riemann è un ‘funzionale lineare e positivo’⁹⁸; la (iv) (che deriva immediatamente dalla proprietà di monotonia (iii)) è una proprietà di ‘continuità’: se $f, g \in \mathcal{R}(E)$, allora da (i), (iv) e (iii) segue che

$$\left| \int_E f - \int_E g \right| = \left| \int_E (f - g) \right| \leq \int_E |f - g| \leq (\sup_E |f - g|) \cdot |E|,$$

e dunque se $\sup_E |f - g|$ è piccolo lo è anche la differenza degli integrali di f e g .

Le principali classi di funzioni integrabili secondo Riemann sono le funzioni continue e le funzioni monotone:

(xc) sia E un intervallo limitato e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Se f è continua o monotona su E , allora $f \in \mathcal{R}(E)$.

Diamo la dimostrazione nel caso E sia un intervallo compatto $[a, b]$ e f sia continua su E . Sia $\varepsilon > 0$. Dal teorema di Heine–Cantor **(lx)** segue che f è uniformemente continua su E e quindi

⁹⁶Più in generale, se E un intervallo limitato, $P = \{I_k \mid 1 \leq k \leq n\} \in \mathcal{P}(E)$ e, per $1 \leq k \leq n$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, allora

$$f := \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{I_k} \in \mathcal{R}(E) \text{ e } \int_E f = \sum_{k=1}^n \alpha_k |I_k|.$$

⁹⁷Si noti che in questa affermazione la partizione per la somma superiore e quella inferiore è la stessa e questo non segue immediatamente dalla definizione ma richiede un argomento; in particolare, segue dal fatto che se $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni limitate, allora $\sup_A f - \inf_A f = \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)|$.

⁹⁸Di solito, si chiama funzionale su X una ‘mappa’ (o funzione) con dominio X e codominio $\mathbb{R}$; ‘positivo’ perchè da (iii) segue che se $f \geq 0$ allora $\int_E f \geq 0$.

esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ per ogni $x, y \in E$ con $|x - y| < \delta$. Scegliamo, ora, una partizione $P = \{I_k\}$ di E tale che $|I_k| < \delta$ per ogni k . Allora⁹⁹,

$$\overline{S}_E(f, P) - \underline{S}_E(f, P) = \sum_{k=1}^n \sup_{x, y \in E} |f(x) - f(y)| |I_k| < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |I_k| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

e dunque, per (lxxxviii), $f \in \mathcal{R}(E)$. ■

La proprietà di additività degli integrali (lxxxix)–(v) implica che se $x < y < z$ sono punti di E e $f \in \mathcal{R}(E)$, allora $\int_x^z f = \int_x^y f + \int_y^z f$. È importante osservare che se, per ogni $x < y$ in E , definiamo $\int_y^x f := -\int_x^y f$, allora vale la seguente affermazione:

(xci) Sia $f \in \mathcal{R}(E)$ e x, y, z tre punti qualunque¹⁰⁰ in E , allora $\int_x^z f = \int_x^y f + \int_y^z f$.

Teorema fondamentale del calcolo

Il seguente ‘teorema fondamentale del calcolo integrale’ è uno dei risultati più importanti dell’Analisi Matematica.

(xcii) Sia E un intervallo limitato e $f \in \mathcal{R}(E)$. Assumiamo che f sia continua in $x_0 \in E$. Allora, per ogni $\bar{x} \in E$, la ‘funzione integrale’ $F(x) := \int_{\bar{x}}^x f$ è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

Dimostrazione Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua in x_0 , esiste un numero positivo $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$, per ogni $x \in E$ e $|x - x_0| < \delta$. Per $h \in \mathbb{R}$ e $0 < |h| < \delta$ denotiamo con I_h l’intervallo di estremi x_0 e $x_0 + h$, la cui lunghezza è $|I_h| = |h| < \delta$; si noti che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ per ogni $x \in I_h$. Allora, grazie a (xci) e (lxxxix) (e la definizione di derivata (lxxvii)), si ha¹⁰¹:

$$\begin{aligned} |R_F(x_0 + h, x_0) - f(x_0)| &= \left| \frac{1}{h} \left(\int_{\bar{x}}^{x_0+h} f - \int_{\bar{x}}^{x_0} f \right) - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f \right) - f(x_0) \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{I_h} (f(x) - f(x_0)) dx \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{I_h} |f(x) - f(x_0)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Secondo il teorema fondamentale del calcolo (xcii) la derivata di una funzione integrale è l’integrando; vale, anche un ‘viceversa’:

(xciii) Sia E un intervallo e $F \in C^1(E)$. Allora, per ogni $a, b \in E$ si ha $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$.

⁹⁹Chiaramente, $\sum_{k=1}^n |I_k| = |E| = b - a$.

¹⁰⁰Per definizione, $\int_x^x f = 0$.

¹⁰¹La notazione $\int_a^b f(x) dx$ è preferibile a $\int_a^b f$ quando si vuole specificare la variabile ‘rispetto alla quale si sta integrando’. Ad esempio, $\int_a^b (f(x) - f(x_0)) dx = \left(\int_a^b f \right) - f(x_0)(b - a)$, essendo l’integrando la funzione $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ e $f(x_0)$ una costante fissata.

Dimostrazione Per ogni $x \in E$, poniamo $G(x) := -F(x) + F(a) + \int_a^x F'$. Da (xcii) segue che G è derivabile e $G'(x) = 0$. Da (lxxxiii)–(i) segue che G è costante su E ed essendo $G(a) = 0$ segue che $G \equiv 0$ su E , in particolare $G(b) = 0$, che è la tesi. ■

Il teorema fondamentale del calcolo, come si può immaginare dal nome, è uno dei teoremi più importanti della matematica con applicazioni in ogni campo.

Il calcolo integrale

Il corollario (xciii) del teorema fondamentale del calcolo fornisce uno strumento importante per il calcolo ‘esatto’ (quando questo è possibile) degli integrali.

Data una funzione $f \in C(E)$ con E intervallo, chiamiamo una (funzione) primitiva di f una funzione F tale che $F' = f$. Se F è una¹⁰² primitiva di f , allora, per (xciii),

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: [F]_a^b, \quad (F' = f).$$

A volte una primitiva di f viene anche chiamata *integrale indefinito* di f e si denota col simbolo di Leibniz $\int f$ o anche $\int f(x)dx$.

Esempi: Essendo $x^2 = \left(\frac{x^3}{3}\right)'$, si ha che

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Essendo $(x \log x - x)' = \log x$, si ha che

$$\int_1^2 \log x dx = [x \log x - x]_1^2 = 2 \log 2 - 1.$$

Essendo¹⁰³,

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\log|x-1| - \log|x+1| \right)' = \left(\frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)'$$

si ha, per ogni $M > 2$,

$$\int_2^M \frac{1}{x^2 - 1} dx = \left[\frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right]_2^M = \frac{\log 3}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{M-1}{M+1};$$

se, analogamente a quanto fatto per le serie, denotiamo

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx,$$

otteniamo

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{\log 3}{2}.$$

Per il calcolo integrale possono essere utili le seguenti ‘tecniche di integrazione’ che derivano facilmente dal teorema fondamentale del calcolo e dalle regole di derivazione:

(xciv) Sia E un intervallo. Valgono le seguenti affermazioni¹⁰⁴:

(i) [Integrazione per parti]. Se $f, g \in C^1(E)$ e $a, b \in E$, allora $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.

¹⁰²Si noti che se F e G sono due primitive di f sull'intervallo E (ossia, $F' = G' = f$), si ha che $(F - G)' = 0$ e dunque, per (lxxxiii)–(i), F e G differiscono per una costante; a volte, la primitiva di f indica l'insieme di tutte le primitive di f , che per quanto osservato differiscono tra loro per una costante.

¹⁰³Si noti che $(\log|x|)' = 1/x$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

¹⁰⁴Infatti, da (lxxx)–(1) e (xciii), segue che $\int_a^b f'g + fg' = \int_a^b (fg)' = [fg]_a^b$, che è la (i). Per ottenere la (ii) si

pone $F(x) = \int_a^x f$, si osserva che, per (lxxx)–(ii) e il teorema fondamentale del calcolo, $f \circ g \cdot g' = (F \circ g)'$ e poi si usa (xciii).

(ii) [Cambio di variabile] Siano E e I due intervalli e $f \in C(E, \mathbb{R})$ e $g \in C^1(I, E)$. Allora, se $a = g(\alpha)$ e $b = g(\beta)$, si ha che $\int_a^b f(y)dy = \int_\alpha^\beta f \circ g(x) \cdot g'(x)dx$.

Le medesime formule senza gli estremi di integrazione a e b valgono, sotto le stesse ipotesi, per le primitive, facendo attenzione, nelle formula (ii), di esprimere il risultato finale nella variabile originaria, come nel seguente esempio¹⁰⁵:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{1}{\cos x} (\cos x)' \, dx = - \int \frac{1}{y} \, dy = -\log |y| = -\log |\cos x|.$$

Aree

Torniamo alla questione delle aree di regioni piane. Diciamo che $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è una *regione* (o un *dominio*) *normale* se esistono due funzioni $f, g \in \mathcal{R}(E)$, E intervallo limitato e $g \leq f$, tali che $A = D_{f,g} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) \leq y \leq f(x), \forall x \in E\}$ ed in tal caso poniamo, per definizione, $\text{area}(A) = \int_E (f - g)$.

Ad esempio, se poniamo $E = [0, 1]$, $f : x \in E \mapsto f(x) := x^2$, $g : x \in E \mapsto g(x) := 0$ e $\mathcal{T} := D_{f,g} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2, \forall x \in E\}$. Allora¹⁰⁶, $f, g \in \mathcal{R}(E)$ e quindi $\mathcal{T}$ è un dominio normale, ed inoltre, $\text{area}(\mathcal{T}) := \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$, in accordo con la discussione iniziale.

Lunghezza di curve

Nella definizione ‘geometrica’ delle funzioni trigonometriche discussa sopra, abbiamo usato il concetto di lunghezza di un arco di circonferenza. Diamo, ora, la definizione di un ‘arco di curva’ in $\mathbb{R}^2$ che sia rappresentabile come grafico di una funzione regolare.

Siano $a < b$ numeri reali, $f \in C^1([a, b])$ e $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in [a, b]\}$ il grafico di f . Si definisce **lunghezza di G_f** il numero positivo¹⁰⁷

$$\ell(G_f(a, b)) := \int_a^b \sqrt{1 + |f'|^2}.$$

Si noti che il ‘segmento’ σ in $\mathbb{R}^2$ che unisce (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , con $x_1 \neq x_2$, è il grafico della funzione $f(x) := y_1 + (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ con $x \in [x_1, x_2]$ e che, secondo la definizione data, la lunghezza di σ è:

$$\ell(\sigma) = \ell(G_f(x_1, x_2)) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} \, dx = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

in accordo con la geometria euclidea (teorema di Pitagora). Analogamente, non è difficile dimostrare che

(xcv) $\ell(G_f(a, b)) = \sup_{x_0=a < x_1 < \dots < x_n=b} \sum_{i=1}^n \ell(\sigma_i)$, dove l’estremo superiore è preso su tutte le possibili suddivisioni di $[a, b]$ e σ_i è il segmento che unisce (x_{i-1}, y_{i-1}) con (x_i, y_i) , dove $y_i := f(x_i)$.

In altri termini, essendo $\cup_i \sigma_i$ una ‘poligonale iscritta’ in G_f , la lunghezza di G_f coincide con l’estremo superiore delle lunghezze delle poligonali iscritte in G_f .

¹⁰⁵Si usi la formula (xciv)–(ii) con $g(x) = \cos x$ e $f(y) = 1/y$ (e la linearità degli integrali per ‘portare il -1 fuori dall’integrale’). Si ricordi che $-\log |\cos x|$ è una primitiva di $\tan x$ (su uno degli intervalli di definizione della tangente). In molti testi di esercizi si preferisce aggiungere una costante ‘arbitraria’ al risultato finale, volendo riferirsi all’insieme di tutte le primitive.

¹⁰⁶ f e g sono funzioni continue.

¹⁰⁷Più in generale, si può definire la lunghezza di G_f per funzioni $f \in C^1([a + \varepsilon, b - \varepsilon])$, per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, e tale che $\ell(G_f(a, b)) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \sqrt{1 + |f'|^2} \, dx < +\infty$.

‘A chiusura del cerchio’, invito i lettori a ripercorrere la definizione geometrica delle funzioni trigonometriche¹⁰⁸.

¹⁰⁸Suggerimento: si definisca la funzione $x \in [-1, 1] \rightarrow t(x) \geq 0$ come la lunghezza dell’arco di circonferenza (nel semipiano superiore) $\Gamma_x := \{(\xi, \sqrt{1-\xi^2}) \mid x \leq \xi \leq 1\}$, ossia, $t(x) := \ell(\Gamma_x) = \int_x^1 \sqrt{1 + |(\sqrt{1-\xi^2})'|^2} d\xi = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi$, (che non è altro che la funzione arcocoseno di x); si definisca poi, $\cos t$ come l’inversa di tale funzione e $\sin t$ come $\sqrt{1 - \cos^2 t}$, etc.