Coseno, seno, e pi greco

In queste note daremo una presentazione analitica e autocontenuta della definizione e delle proprietà fondamentali del seno, del coseno e di π.

Cominciamo con un risultato preliminare

Lemma 1 *Sia* $0 < t < n+1$ *con*[1] $n \in \mathbb{N}_0$. *Allora*

$$0 < r_n(t) := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} < \frac{t^n}{n!} \ \frac{n+1}{n+1-t} \ . \tag{1}$$

In particolare,

$$r_n(t) < \frac{t^n}{n!} \ \frac{n+1}{n} < \frac{1}{(n-1)!} \ \frac{1}{n-1} \ , \qquad \forall \ 0 < t \le 1 \ , n \ge 1 \tag{2}$$

$$r_n(t) < 2 \ \frac{t^n}{n!} \ , \qquad \forall \ 0 < t \le \frac{n+1}{2} \ , n \ge 0. \tag{3}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} &= \frac{t^n}{n!} \Big(1 + \frac{t}{n+1} + \frac{t^2}{(n+2)(n+1)} + \frac{t^3}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \cdots \Big) \\
&< \frac{t^n}{n!} \Big(1 + \frac{t}{n+1} + \frac{t^2}{(n+1)^2} + \frac{t^3}{(n+1)^3} + \cdots \Big) \\
&= \frac{t^n}{n!} \ \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{t}{n+1} \Big)^k = \frac{t^n}{n!} \ \frac{n+1}{n+1-t} \ .
\end{aligned}$$

Le (2) e (3) sono conseguenza immediata di (1). ∎

Si osservi che da (3) segue anche imediatamente che

$$|r_n(t)| \le r_n(|t|) \le |t|^n \ , \quad \forall \ n \ge 2 \ , \ \forall \ |t| \le 1 \ . \tag{4}$$

Definizione 2 *Per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *poniamo*

$$\begin{cases} \cos x := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} \cdots \\[2ex] \operatorname{sen} x := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} \cdots \end{cases} \tag{5}$$

[1] $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Osservazione 3 (i) Le due serie in (5) convergono assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ (criterio del rapporto o direttamente dal[2] Lemma 1) e

$$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \operatorname{sen} 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \ . \end{cases} \tag{6}$$

(ii) Le formule (5) permettono di calcolare (con precisione arbitraria) il valore del seno e coseno in qualunque punto x. Ad esempio,

$$\cos 2 = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} + r = -\frac{131}{315} + r \ , \qquad r := \sum_{k=5}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} \ , \tag{7}$$

e da (3) segue che $|r| < \sum_{k=10}^{\infty} \frac{2^k}{k!} < \frac{2^{11}}{10!} = \frac{8}{14175}$, e quindi

$$-0.417 < -\frac{5903}{14175} < \cos 2 < -\frac{841}{2025} < -0.415 \ . \tag{8}$$

Il comportamento del seno e coseno "vicino" a $x = 0$ è il seguente:

Lemma 4 *Per ogni $|x| \le 1$ si ha*

$$|\operatorname{sen} x - x| \le \frac{|x|^3}{3} \ , \qquad \left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \le \frac{x^4}{12} \ ; \tag{9}$$

$$|\operatorname{sen} x| \le \frac{4}{3}|x| \ , \qquad |1 - \cos x| \le \frac{7}{12}x^2 \ ; \tag{10}$$

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right| \le \frac{x^2}{3} \ , \qquad \left|\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2}\right| \le \frac{x^2}{12} \ , \quad (x \ne 0) \ . \tag{11}$$

Dimostrazione Dalla definizione di seno e coseno e dalla (3) segue che, per $|x| \le 1$,

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} x - x| &= \Big|\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &\le \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \le 2\ \frac{|x|^3}{6} = \frac{|x|^3}{3} \\ \left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| &= \Big|\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\Big| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &\le \sum_{k=4}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \le 2\frac{x^4}{4!} = \frac{x^4}{12}. \end{aligned}$$

Da (9) segue che

$$\begin{aligned} &|\operatorname{sen} x| = |\operatorname{sen} x - x + x| \le |\operatorname{sen} x - x| + |x| \le |x|\big(\frac{x^2}{3} + 1\big) \le \frac{4}{3}|x| \\ &|1 - \cos x| \le \Big|1 - \cos x - \frac{x^2}{2}\Big| + \frac{x^2}{2} \le x^2\big(\frac{x^2}{12} + \frac{1}{2}\big) = \frac{7}{12}x^2. \end{aligned}$$

[2] Si osservi che $\max\big\{|\cos x| \ , \ |\operatorname{sen} x|\big\} \le r_0(|x|)$.

Infine (11) segue immediatamente da (9) dividendo per $|x|$. ∎

Da (11) seguono immediatamente i seguenti limiti notevoli[3]

Corollario 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \ , \tag{12}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \ . \tag{13}$$

Teorema 6 (Formula di addizione per il coseno)

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \ , \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Dimostrazione Dalla formula per il binomio di Newton,

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{(x+y)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} x^j y^{2k-j} \\
&= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \sum_{j=0}^{2k} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{2k-j}}{(2k-j)!} \\
&= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \sum_{0\leq j\leq 2k} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{2k-j}}{(2k-j)!} \ .
\end{aligned} \tag{15}$$

Ora, poniamo[4]

$$\begin{aligned}
P &:= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \sum_{\substack{0\leq j\leq 2k \\ j \text{ pari}}} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{2k-j}}{(2k-j)!} \\
&= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h}}{(2h)!} \frac{y^{2(k-h)}}{(2(k-h))!}
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
D &:= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \sum_{\substack{0\leq j\leq 2k \\ j \text{ dispari}}} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{2k-j}}{(2k-j)!} \\
&= \sum_{k\geq 1} (-1)^k \sum_{h=0}^{k-1} \frac{x^{(2h+1)}}{(2h+1)!} \frac{y^{2(k-h)-1}}{(2(k-h)-1)!} \\
&= \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \sum_{h=0}^{n} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!} \frac{y^{2(n-h)+1}}{(2(n-h)+1)!} \\
&= -\sum_{n\geq 0} (-1)^{n} \sum_{h=0}^{n} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!} \frac{y^{2(n-h)+1}}{(2(n-h)+1)!} \ ,
\end{aligned}$$

[3] Si osservi che se $a_n \to 0$ allora esiste N tale che $|a_n| < 1$ per ogni $n \geq N$.

[4] Si noti che nella definizione di D il termine con $k = 0$ non appare e pertanto la somma su k in D parte da $k = 1$. Inoltre, le j dispari tra 0 e $2k$ sono date da $j = 2h + 1$ con $0 \leq h \leq k - 1$.

e si noti che

$$\max\{|P|,|D|\} \le \sum_{k\ge 0}\sum_{j=0}^{2k} \frac{|x|^j}{j!}\,\frac{|y|^{2k-j}}{(2k-j)!} = \cosh(|x|+|y|)\ ,$$

e dunque, che le serie che definiscono P e D convergono assolutamente. In particolare, segue che

$$\cos(x+y) = P + D\ .$$

Per il Corollario 2 del Complemento "Serie Doppie" (si veda anche l'Esempio 3), possiamo scambiare l'ordine delle somme, ottenendo

$$\begin{aligned} P &:= \sum_{h\ge 0}\sum_{k\ge h}(-1)^k \frac{x^{2h}}{(2h)!}\,\frac{y^{2(k-h)}}{(2(k-h))!} \\ &= \sum_{h\ge 0}(-1)^h \sum_{k\ge h}(-1)^{k-h} \frac{x^{2h}}{(2h)!}\,\frac{y^{2(k-h)}}{(2(k-h))!} \\ &= \sum_{h\ge 0}(-1)^h \sum_{j\ge 0}(-1)^j \frac{x^{2h}}{(2h)!}\,\frac{y^{2j}}{(2j)!} \\ &= \Big(\sum_{h\ge 0}(-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h)!}\Big)\Big(\sum_{j\ge 0}(-1)^j \frac{y^{2j}}{(2j)!}\Big) \\ &= \cos x \cos y\ , \end{aligned}$$

e in maniera del tutto analoga si vede che $D = -\operatorname{sen} x\, \operatorname{sen} y$ ossia la tesi. ∎

Osservazione 7 Prendendo $y = -x$ in (14) e ricordando (6) si ha che

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x := (\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1, \tag{17}$$

da cui

$$|\cos x| \le 1\ , \qquad |\operatorname{sen} x| \le 1\ , \quad \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Prendendo $x = y$ in (14) otteniamo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\ . \tag{19}$$

Proposizione 8 ("Permanenza del segno per il coseno") *Sia x_0 tale che $\cos x_0 > 0$ (oppure $\cos x_0 < 0$). Allora esiste $\delta > 0$ tale $\cos x > 0$ (rispettivamente, $\cos x < 0$) per ogni $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$.*

Dimostrazione Consideriamo il caso $\cos x_0 > 0$ (il caso negativo si tratta in maniera del tutto analoga e viene lasciato per esercizio). Sia $0 < \delta := |\cos x_0|/2$ e si osservi che $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ se e solo se $x = x_0 + y$ con $|y| \le \delta$. Dunque se $x = x_0 + y$ con $|y| \le \delta$, da (14), (18) e (10) segue che

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos(x_0+y) = \cos x_0 \cos y - \operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen} y \\
&= \cos x_0 - \Big(\cos x_0(1-\cos y) + \operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen} y\Big) \\
&\geq \cos x_0 - (|1-\cos y| + |\operatorname{sen} y|) \\
&\geq \cos x_0 - \Big(\frac{7}{12}|y| + \frac{4}{3}|y|\Big) \\
&\geq \cos x_0 - \frac{23}{12}\,|y| \\
&\geq \cos x_0 - \frac{23}{12}\,\delta \\
&> \cos x_0 - 2\delta = 0\ . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 9 *Esiste $\beta \in (0,2)$ tale che $\cos\beta = 0$ e $\cos x > 0$ per ogni $x \in [0,\beta)$.*

Dimostrazione Sia $P := \{b > 0 : \cos x > 0 \text{ per ogni } 0 \leq x \leq b\}$. Poiché $\cos 0 = 1$, dal Teorema 8 segue che esiste $\delta > 0$ tale che $\cos x > 0$ per ogni $|x| \leq \delta$ e quindi $\delta \in P$ mostrando che $P \neq \emptyset$. Dalla definizione di P segue che se $y > 0$ e $\cos y < 0$, allora y è un maggiorante per P: infatti, se y non fosse un maggiorante, esisterebbe $b \in P$ tale che $b > y$, ma questo, per definizione di P, implicherebbe che $\cos y > 0$. In particolare, da (8) segue che 2 è un maggiorante per P. Sia $\beta = \sup P$. Se fosse $\cos\beta > 0$, dal Teorema 8 seguirebbe che $\cos x > 0$ per $x \in [\beta-\delta, \beta+\delta]$ con un opportuno $\delta > 0$; quindi, poiché $\beta - \delta < \beta$, che è l'estremo superiore di P, esisterebbe $b \in P$ tale che $\beta - \delta < b$, ma questo implicherebbe che $\cos x > 0$ per ogni $0 \leq y \leq \beta + \delta$ e quindi $\beta + \delta \in P$, contraddicendo il fatto che β è un maggiorante. Se fosse $\cos\beta < 0$, dal Teorema 8 seguirebbe che $\cos x < 0$ per $x \in [\beta-\delta, \beta+\delta]$ con un opportuno $\delta > 0$: ma questo significherebbe che $\beta - \delta < \beta$ è un maggiorante contraddicendo il fatto che β è l'estremo superiore di P. Dunque $\cos\beta = 0$. Sia, infine, $0 < y < \beta$. Allora, (poiché β è l'estremo superiore di P) esiste $b \in P$ tale che $y < b < \beta$, e dunque (definizione di P) $\cos y > 0$. $\blacksquare$

Definizione 10 (Pi greco) $\pi := 2\beta$ *dove β è il numero nel Teorema 9.*

Proposizione 11 $\cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1,\ \cos\pi = -1,\ \operatorname{sen}\pi = 0,$
$\cos\frac{3}{2}\pi = 0,\ \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1,\ \cos 2\pi = 1,\ \operatorname{sen} 2\pi = 0.$

Dimostrazione Dalla definizione di π e dal Teorema 9 segue che $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; dunque da (17) segue che $|\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}| = 1$. D'altra parte, da (11) segue che se $0 < x \leq 1$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \geq -\frac{1}{3}$ ossia $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \frac{2}{3}$, e quindi, in particolare, $\operatorname{sen} x > 0$ se $0 < x \leq 1$. Da (14) e dalla definizione di π segue che, per ogni $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\cos\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\ \operatorname{sen} x$; quindi se $0 < x < \min\{1, \frac{\pi}{2}\}$, $\operatorname{sen} x > 0$ e $\cos\big(\frac{\pi}{2} - x\big) > 0$, il che implica $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.

Da (19) segue che $\cos\pi = \cos^2\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} = -1$ e quindi, per (17), $\operatorname{sen}\pi = 0$. Ancora da (19) segue che $\cos 2\pi = \cos^2\pi - \operatorname{sen}^2\pi = 1$ e quindi (da (17)) $\operatorname{sen} 2\pi = 0$.

Infine, $\cos\frac{3}{2}\pi = \cos(2\pi - \frac{\pi}{2}) = \cos 2\pi \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} 2\pi \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0$, e $-1 = \cos\pi = \cos\big(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\big) = \cos\frac{3}{2}\pi \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi$. $\blacksquare$

Da (14) e dalla Proposizione 11 segue immediatamente che

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} x \tag{20}$$

e anche (scrivendo $\cos x = \cos\big((x-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}\big)$) che

$$\operatorname{sen}\big(x-\frac{\pi}{2}\big) = -\cos x\ . \tag{21}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+y) &\overset{(20)}{=} \cos\big(x-\frac{\pi}{2}+y\big)\\ &= \cos\big(x-\frac{\pi}{2}\big)\cos y - \operatorname{sen}\big(x-\frac{\pi}{2}\big)\operatorname{sen} y\\ &\overset{(21)}{=} \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\ \operatorname{sen} y\ ,\end{aligned}$$

ossia

Teorema 12 (Formula di addizione per il seno)

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\ \operatorname{sen} y\ , \qquad \forall\ x,y\in\mathbb{R}. \tag{22}$$

Dalle formule di addizione (Teoremi 6 e 12) seguono immediatamente (**esercizio**) molte altre relazioni tra cui:

$$\operatorname{sen} 2x = 2\ \operatorname{sen} x\cos x\ , \tag{23}$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x\ , \qquad \operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x\ , \tag{24}$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x\ , \qquad \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x\ , \tag{25}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\ , \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\ , \tag{26}$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\big(\frac{x+y}{2}\big)\cos\big(\frac{x-y}{2}\big)\ , \tag{27}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\big(\frac{x+y}{2}\big)\cos\big(\frac{x-y}{2}\big)\ , \tag{28}$$

$$\operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)\ , \tag{29}$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)\ , \tag{30}$$

$$\operatorname{sen} x\cos y = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\Big)\ , \tag{31}$$

$$\cos x\ \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)\Big)\ . \tag{32}$$

Teorema 13 (Continuità del seno e del coseno) *Per ogni* $x_0\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0\ , \qquad \lim_{x\to x_0}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0\ .$$

Dimostrazione Il caso $x_0 = 0$ segue immediatamente da (10). Nel caso generale poniamo $y := x - x_0$ così che $y\to 0$ quando $x\to x_0$. Allora, $\cos x = \cos(x_0+y) = \cos x_0\cos y - \operatorname{sen} x_0\ \operatorname{sen} y \to \cos x_0$ e analogamente $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x_0+y) = \operatorname{sen} x_0\cos y + \cos x_0\ \operatorname{sen} y \to \operatorname{sen} x_0$. ∎

Teorema 14 (Derivata del seno e del coseno) *Per ogni* $x\in\mathbb{R}$

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x\ , \qquad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x\ .$$

Dimostrazione Da (22) e dal Corollario 5 segue

$$(\operatorname{sen} x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \Big(\operatorname{sen} x \, \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \, \frac{\operatorname{sen} h}{h} \Big) = \cos x \ ;$$

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \Big(\cos x \, \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \, \frac{\operatorname{sen} h}{h} \Big) = -\operatorname{sen} x \ . \qquad \blacksquare$$

Grafici di seno e coseno Poiché $(\operatorname{sen} x)' = \cos x > 0$ in $[0, \pi/2)$ segue che la funzione $\operatorname{sen} x$, che in 0 vale 0, è strettamente crescente su $(0, \pi/2)$ ed in $\pi/2$ vale 1 (si ricordino i valori speciali nella (10) del *Complemento 5* dedotti come conseguenza del Teorema 4). Inoltre $(\operatorname{sen} x)'' = -\operatorname{sen} x < 0$ in $(0, \pi/2)$ e quindi il seno è concavo in $(0, \pi/2)$; $\pi/2$ è un massimo assoluto stretto; infine la tangente al grafico del seno in $x = 0$ ha coefficiente angolare 1 (cioè $(\operatorname{sen} x)'|_{x=0} = 1$). Questo determina completamente il grafico di $\operatorname{sen} x$ in $(0, \pi/2)$. Osservando che dalle formule di addizione (ii) segue che

$$\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{2} + x\Big) = \cos x = \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) \tag{33}$$

si vede che la retta $\{x = \pi/2\}$ è un asse di simmetria del grafico del seno (cioé il grafico del seno su $(\pi/2, \pi)$ non è altro che l'immagine simmetrica del seno tra $(0, \pi/2)$. Dalla disparità del seno ($\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$), possiamo ricostruire il grafico del seno anche tra $(-\pi, 0)$ e quindi dappertutto essendo il seno periodico di periodo 2π. Sempre da (33) segue che il grafico del coseno è semplicemente il grafico del seno traslato di $\pi/2$ ("verso sinistra").