$\mathbb{R}^2$ e i numeri complessi

1. ($\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale) $\mathbb{R}^2$, ossia l'insieme delle coppie ordinate (x, y) con x e y in $\mathbb{R}$ è *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ cioè è possibile definire la somma di due elementi (o "vettori") di $\mathbb{R}^2$ ed il prodotto di un vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con uno "scalare" $a \in \mathbb{R}$:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (S)
- $a(x, y) := (ax, ay)$ (P)

È immediato verificare che

la somma in (S) *è commutativa e associativa; l'elemento neutro è* $0 := (0, 0)$*; per ogni vettore* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *esiste l'opposto* $-(x, y) := (-x, -y)$ *tale che* $(x, y) + \Big(- (x, y)\Big) = 0$*; vale la proprietà distributiva.*

2. (Coordinate polari) $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}\ \exists!\ (r, t) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ tale che

$$x = r \cos t\ , \qquad y = r \operatorname{sen} t\ ; \tag{1}$$

infatti: $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ cosicché $(x/r, y/r) \in S^1$ e t è l'unico numero in $[0, 2\pi)$ tale che $(x/r, y/r) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Definizione 1 *Se* $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ *e* $(r, t) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ *sono le sue coordinate polari,* r *prende il nome di* norma *di* z*, e si denota* $r := \|z\|$*, e* t *prende il nome di* argomento principale *di* z *e si denota con* $t = \operatorname{Arg}(z)$*.*

3. (Prodotto scalare e disuguaglianza di Cauchy–Schwartz) Se $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ sono due elementi di $\mathbb{R}^2$ si definisce il loro *prodotto scalare* come

$$z_1 \cdot z_2 := x_1 x_2 + y_1 y_2\ . \tag{2}$$

È immediato verificare che

il prodotto scalare è commutativo ($z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$) *ed è lineare in ogni componente*

$$(a_1 z_1 + a_2 z_2) \cdot z_3 = a_1 (z_1 \cdot z_3) + a_2 (z_2 \cdot z_3)\ , \qquad (\forall z_i \in \mathbb{R}^2\ , a_i \in \mathbb{R})\ ,$$

(ed analogamente per la seconda componente).

Osservazione 2 (i) $z \cdot z = \|z\|^2$ per ogni $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Il prodotto scalare ha una semplice interpretazione geometrica. Siano $z_i := (x_i, y_i) \neq 0$ due vettori in $\mathbb{R}^2$ non nulli, e siano (r_i, t_i) le coordinate polari di z_i. Dalle formule di addizione per il coseno otteniamo:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos t_1, \operatorname{sen} t_1) \cdot r_2 (\cos t_2, \operatorname{sen} t_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos t_1 \cos t_2 + \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2) \\ &= r_1 r_2 \cos(t_1 - t_2)\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Da tale relazione segue in particolare la seguente **disuguaglianza di Cauchy–Schwartz**:

$$|z_1 \cdot z_2| \le \|z_1\| \, \|z_2\| \ , \qquad \forall \ z_i \in \mathbb{R}^2 \ . \tag{4}$$

(Si noti che se uno dei vettori z_i è nullo tale disuguaglianza è ovviamente verificata col segno =).

(iii) Vista la grande importanza della disuguaglianza di Cauchy–Schwartz , ne diamo una seconda dimostrazione algebrica (ossia che non fa uso delle funzioni trigonometriche). Riscriviamo la (4) ponendo $z_i = (x_i, y_i)$:

$$|x_1 x_2 + y_1 y_2| \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \, \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \ . \tag{5}$$

Dividendo per $r_1 r_2$ i termini nella (5) ed usando (2), si ha che (5) è equivalente a

$$|(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \cdot (\bar{x}_2, \bar{y}_2)| \le 1 \tag{6}$$

dove $\bar{x}_i := x_i / r_i$ e $\bar{y}_i := y_i / r_i$, cosicché $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in S^1$. Si osservi che,

$$ab \le \frac{a^2 + b^2}{2} \ , \qquad \forall \ a, b \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

poiché tale relazione è equivalente alla relazione $(a-b)^2 \ge 0$. Dunque,

$$\begin{aligned} |(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \cdot (\bar{x}_2, \bar{y}_2)| &\le |\bar{x}_1||\bar{x}_2| + |\bar{y}_1||\bar{y}_2| \le \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{2} + \frac{\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2}{2} \\ &= \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2}{2} = 1 \ . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

4. (Disuguaglianza triangolare) *Per ogni* $z_i := (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ *si ha*

$$\|z_1 + z_2\| \le \|z_1\| + \|z_2\| \ . \tag{8}$$

Dimostrazione Elevando al quadrato e "cancellando termini uguali" si vede che la relazione (8) è equivalente a

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \, \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \ ,$$

che è implicata immediatamente dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwartz (5). $\blacksquare$

5. (Norma e distanza) Dalla definizione di norma e dal punto **4** segue subito che la norma verifica le seguenti proprietà ("assiomi della norma"):

(n_1) $\|z\| \ge 0$, $\forall \ z \in \mathbb{R}^2$ e $\|z\| = 0$ se e solo se $z = 0$

(n_2) $\|az\| = |a|\|z\|$, $\forall z \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$

(n_3) $\|z_1 + z_2\| \le \|z_1\| + \|z_2\|$, $\forall \ z_i \in \mathbb{R}^2$

Definizione 3 *Se* z_1 *e* z_2 *sono due elementi di* $\mathbb{R}^2$ *si definisce la* **distanza** *(o "distanza euclidea") di* z_1 *da* z_2 *il numero non negativo*

$$d(z_1, z_2) := \|z_1 - z_2\| \ . \tag{9}$$

Dalle prorpietà della norma (i)÷(iii) segue immediatamente che la distanza verifica le seguenti proprietà ("assiomi della distanza"):

(d_1) $d(z_1, z_2) \geq 0$, $\forall\ z_i \in \mathbb{R}^2$ e $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $z_1 = z_2$

(d_2) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$, $\forall\ z_i \in \mathbb{R}^2$

(d_3) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$, $\forall\ z_i \in \mathbb{R}^2$.

6. (Il campo complesso) Il campo complesso $\mathbb{C}$ è, per definizione, la terna $(\mathbb{R}^2, +, *)$, cioè $\mathbb{R}^2$ equipaggiato con due operazioni binarie, dette "somma e prodotto complesso", definite come segue:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (SC)
- $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$ (PC)

Gli elementi di $\mathbb{C}$ sono, dunque, semplicemente coppie ordinate di numeri reali $z = (x, y)$.

Osservazione 4 (i) Si noti che, mentre la somma "complessa" coincide con la somma (S) di $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale (vedi **1**), il "prodotto complesso" $*$ è assai diverso sia dal prodotto in (P) in **1**, che dal prodotto scalare (2): esso infatti è una operazione binaria da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: ad una coppia di vettori z_1 e z_2 in $\mathbb{R}^2$ associa un terzo vettore z in $\mathbb{R}^2$.

(ii) La somma in (SC) è (come già osservato in **1**) commutativa e associativa; l'elemento neutro è il vettore (o "numero complesso") $0 := (0, 0)$; l'opposto di $z = (x, y)$ è $-z := (-x, -y)$.

Proposizione 5 (i) *Il prodotto complesso è commutativo e associativo.*

(ii) *L'elemento neutro del prodotto complesso è* $1 := (1, 0)$.

(iii) *Se* $z = (x, y) \neq 0$ *il reciproco di* z*, denotato* z^{-1} *o* $1/z$ *è dato da*

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) .$$

(iv) *Vale la proprietà distributiva:*

$$z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3 , \qquad \forall z_i \in \mathbb{R}^2 . \tag{10}$$

Dimostrazione (i) La commutatività è ovvia. Per l'associatività dobbiamo verificare che

$$(x_1, y_1) * \Big((x_2, y_2) * (x_3, y_3) \Big) = \Big((x_1, y_1) * (x_2, y_2) \Big) * (x_3, y_3) , \tag{11}$$

o anche, in vista della commutatività di $*$,

$$(x_1, y_1) * \Big((x_2, y_2) * (x_3, y_3) \Big) = (x_3, y_3) * \Big((x_2, y_2) * (x_1, y_1) \Big) . \tag{12}$$

D'altra parte, dalla definizione di * si ha che

$$\begin{aligned} \Big((x_1, y_1) * (x_2, y_2) \Big) * (x_3, y_3) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) * (x_3, y_3) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 \, , \, x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3) , \end{aligned}$$

che è simmetrica in 1 e 3 (ossia scambiando gli indici 1 e 3 tra loro otteniamo lo stesso risultato) e dunque (12) (e quindi (11)) è verificata.

(ii), (iii) e (iv) sono semplici verifiche dirette che seguono immediatamente dalla definizione di $*$. ∎

Osservazione 6 (i) Un campo $(X, +, \cdot)$ è un insieme X dotato di due operazioni binarie "+" e "·" tali che $(X, +)$ è un gruppo commutativo[1]; $(X\backslash\{0\}, \cdot)$ (dove 0 è l'elemento neutro di +) è un gruppo commutativo[2]; vale la proprietà distributiva.
Esempi di campi sono $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

(ii) $(0,1)^2 := (0,1) * (0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -1$. Il numero complesso $(0,1)$ prende il nome di *unità immaginaria*. L'esistenza di tale elemento è alla base della definizione di campo complesso.

7. ($\mathbb{R}$ come sottoinsieme di $\mathbb{C}$) Sia

$$j : x \in \mathbb{R} \to j(x) := (x, 0) \in \mathbb{C} \ . \tag{13}$$

La funzione j, come è immediato verificare, è un isomorfismo di $\mathbb{R}$ su $j(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$, cioè j è iniettiva e conserva la somma e il prodotto con i rispettivi elementi neutri:

$$j(x+y) = j(x) + j(y) \ , \ j(xy) = j(x) * j(y) \ , \ j(0) = 0 := (0,0) \ , \ j(1) = 1 := (1,0) \ . \tag{14}$$

Tale isomorfismo permette di *identificare* $\mathbb{R}$ con $j(\mathbb{R})$ identificando $x \in \mathbb{R}$ con $j(x) \in \mathbb{C}$. Tele identificazione è consistente con le notazioni $0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$ per le unità additive e moltiplicative di $\mathbb{C}$.

Possiamo, ora, introdurre la **notazione classica**. Innanzitutto il prodotto $z_1 * z_2$ verrà denotato (analogamente a quanto si fa in $\mathbb{R}$) semplicemente con $z_1 z_2$:

$$z_1 z_2 := z_1 * z_2 \ , \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \ ; \tag{15}$$

analogamente le *potenze* verrranno denotate z^n:

$$z^n := \underbrace{z * \cdots * z}_{n \text{ volte}} \ , \qquad z \in \mathbb{C} \ ; \tag{16}$$

e l'unità immaginaria $(0,1)$ verrà denotata con $i := (0,1)$:

$$0 := (0,0) \ , \qquad 1 := (1,0) \ , \qquad i := (0,1) \ . \tag{17}$$

Dunque, tramite l'identificazione di $\mathbb{R}$ con $j(\mathbb{R})$, scriveremo ogni numero complesso $z = (x,y)$ come

$$z = x + iy =: j(x) + (0,1) * j(y) = (x,y) \ . \tag{18}$$

8. (Complesso coniugato e modulo) Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ denotiamo con $\bar{z} \in \mathbb{C}$ il suo *complesso coniugato* definito come

$$\bar{z} = x - iy = (x, -y) \ ; \tag{19}$$

il *modulo* di z è per definizione il numero non negativo

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \ . \tag{20}$$

[1] Ossia, per ogni $x, y, z \in X$ vale: $x + y = y + x$; $x + (y + z) = (x + y) + z$; $\exists\, 0 \in X$ tale che $x + 0 = 0 + x = x$ per ogni $x \in X$; per ogni x esiste $-x \in X$ tale che $x + (-x) = 0$.

[2] Ossia, per ogni $x, y, z \in X$ vale: $x \cdot y = y \cdot x$; $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$; $\exists\, 1 \in X$ tale che $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ per ogni $x \in X$; per ogni x esiste $x^{-1} \in X$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$.

In vista dell'identificazione fatta, abbiamo[3]

$$z\bar{z} = |z|^2 \ . \tag{21}$$

Se $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$,

$$\bar{z}_1\bar{z}_2 = (x_1 - iy_i)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2) = \overline{z_1z_2} \ , \tag{22}$$

e, da (21),

$$|z_1z_2| = \sqrt{(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}} = \sqrt{|z_1|^2|z_2|^2} = |z_1| \ |z_2| \ . \tag{23}$$

Dunque *il prodotto complesso conserva sia il complesso coniugato che il modulo.*

Definizione 7 *Dato $z = x+iy$ chiameremo x la* **parte reale** *di z e y* **la parte immaginaria** *di z e scriveremo:*

$$x := \mathrm{Re}\,(x+iy) \ , \qquad y = \mathrm{Im}\,(x+iy) \ . \tag{24}$$

Dalla definizione di complesso coniugato seguono immediatamente le relazioni

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \ , \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} \ . \tag{25}$$

9. (Numeri complessi e coordinate polari) Usando le coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$x + iy := (x, y) = r(\cos t + i \,\mathrm{sen}\, t) := r(\cos t, \,\mathrm{sen}\, t)$$

dove r è il modulo di z e $t := \mathrm{Arg}(z)$ è *l'argomento principale di z*:

$$r := |z|^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \qquad t = \mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi) \ . \tag{26}$$

Il prodotto complesso ha una forma particolarmente semplice in coordinate polari: se $z_j = x_j + iy_j = r_j(\cos t_j + i \,\mathrm{sen}\, t_j) \in \mathbb{C}$, si ha

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos t_1 + i \,\mathrm{sen}\, t_1)(\cos t_2 + i \,\mathrm{sen}\, t_2) \\ &= r_1r_2\Big((\cos t_1 \cos t_2 - \,\mathrm{sen}\, t_1 \,\mathrm{sen}\, t_2) + i(\cos t_1 \,\mathrm{sen}\, t_2 + \,\mathrm{sen}\, t_1 \cos t_2)\Big) \\ &= r_1r_2\Big(\cos(t_1+t_2) + \,\mathrm{sen}\,(t_1+t_2)\Big) \ ; \end{aligned} \tag{27}$$

dunque

$$|z_1z_2| = |z_1| \ |z_2| \ , \qquad \arg(z_1z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg}(z_2) \ , \tag{28}$$

dove[4] $\arg(z_1z_2) := \mathrm{Arg}(z_1z_2) + 2\pi k$ con $k = [(t_1+t_2)/2\pi)]$.
infine, il complesso coniugato corrisponde a cambiare segno all'argomento di z:

$$\begin{aligned} \bar{z} &:= \overline{x+iy} = \overline{r\cos t + ir \,\mathrm{sen}\, t} = r\cos t - ir \,\mathrm{sen}\, t \\ &= r\Big(\cos(-t) + i \,\mathrm{sen}\,(-t)\Big) \ . \end{aligned} \tag{29}$$

10. (Successioni e serie complesse) La convergenza in $\mathbb{C}$ è una semplice generalizzazione della convergenza in $\mathbb{R}$.

[3] Nella notazione introdotta all'inizio, avremmo $z * \bar{z} = (x, y) * (x, -y) = (x^2 + y^2, 0)$.
[4] In generale $\arg(z) = \mathrm{Arg(z)} + 2\pi k$ per un qualche intero $k \in \mathbb{Z}$.

Definizione 8 *Una successione di numeri complessi* $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ *converge a* $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$*, e scriveremo*

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n \qquad (\text{oppure } \; z_n \to z_0), \tag{30}$$

se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ , \quad \exists\, N \in \mathbb{Z}_+ \text{ tale che } \quad |z_n - z_0| < \varepsilon\ ,\ \forall\, n \geq N\ . \tag{31}$$

Osservazione 9 Poiché

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \geq \max\{|x_n - x_0|\ ,\ |y_n - y_0|\}$$

si ha che $z_n \to z_0$ implica che le due successioni reali $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergono rispettivamente a x_0 e y_0; viceversa se $x_n \to x_0$ e $y_0 \to y_0$, dai noti teoremi sui limiti di successioni in $\mathbb{R}$, segue che la successione $\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \to 0$, cioè $z_n \to z_0$. Dunque *dire che* $z_n \to z_0$ *è equivalente a dire che* $\mathrm{Re}\,(z_n) \to \mathrm{Re}\,(z_0)$ *e* $\mathrm{Im}\,(z_n) \to \mathrm{Im}\,(z_0)$.

Esempio 1. Consideriamo la successione $z_n = a^n$ con $a \in \mathbb{C}$. Se $|a| < 1$ e $x_n + iy_n := z_n = a^n$, allora

$$\max\{|x_n|\,,\,|y_n|\} \leq |a^n| = |a|^n \to 0\ ,$$

dunque, in tal caso $\lim a^n = 0$. Se $a = 1$, $a^n = 1$. Se $|a| > 1$ allora $\lim |a^n| = \lim |a|^n = \infty$ e quindi a^n non converge. Anche nel caso in cui $a \in S^1\backslash\{1\}$ si può dimostrare che z_n non converge.

Analogamente si trattano le **serie complesse**: dire che la serie $\sum z_k$ converge equivale a dire che la successione

$$\sum_{k=0}^{n} z_k$$

converge e quindi, per quanto visto prima, equivale a dire che le due serie reali $\sum x_k$ e $\sum y_k$ convergono, dove $x_k + iy_k = z_k$. In particolare, diremo che una serie $\sum z_k$ *converge assolutamente* se converge la serie a termini positivi $\sum |z_k|$, in qual caso converge la serie[5] $\sum z_k$. Come nel caso reale il simbolo $\sum z_k$ ha una certa ambiguità poiché denota sia la successione $\{\sum_{k=0}^n z_k\}$ sia, qualora la successione sia convergente, il suo limite. Infine, nel caso di assoluta convergenza (come nel caso reale), si ha

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} z_k\Big| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|\ . \tag{32}$$

Esempio 2 (La serie geometrica). Sia

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} a^k\ . \tag{33}$$

Come nel caso reale, otteniamo

$$(1-a)w_n = w_n - aw_n = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = 1 - a^{n+1}$$

[5] Infatti, sia $\sum_{k=0}^n |x_k|$ che $\sum_{k=0}^n |y_k|$ sono maggiorate da $\sum_{k=0}^n |z_k|$ e dunque se $\sum z_k$ converge assolutamente, convergono assolutamente anche le serie $\sum x_k$ e $\sum y_k$ e quindi le serie $\sum x_k$ e $\sum y_k$ convergeranno a due numeri reali x_0 e y_0 cosicché $\sum z_k = x_0 + iy_0$.

e dunque, se $a \neq 1$, si ha

$$w_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \tag{34}$$

e, in vista dell'Esempio 1, se $|a| < 1$, otteniamo la formula nota nel caso reale della serie geometrica di ragione a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \ , \qquad (a \in \mathbb{C} \ , \ |a| < 1). \tag{35}$$

6. (La serie esponenziale in $\mathbb{C}$) La serie

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{36}$$

converge assolutamente e

$$|\exp(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} \ . \tag{37}$$

Tale serie prende il nome di **funzione esponenziale** complessa ed è forse la funzione più "importante" della analisi matematica.

Osserviamo che se $t \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{aligned}
\exp(it) \quad &:= \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(it)^k}{k!} \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Big) \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \lim_{n\to\infty} i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{i^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \lim_{n\to\infty} i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \quad \cos t + i \operatorname{sen} t \ ,
\end{aligned}$$

tale formula, ossia

$$\exp(it) = \cos t + i \operatorname{sen} t \ , \qquad (t \in \mathbb{R}) \ , \tag{38}$$

prende il nome di **formula di Eulero**.

La funzione $\exp(z)$ sui reali (ossia per $z \in \mathbb{R}$) coincide con e^z e dunque se x e y sono reali si ha che $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$. Tale relazione vale anche nel caso complesso.

Teorema 10 ("Teorema di addizione per l'esponenziale complesso")

$$\exp(z + w) = \exp(z) \ \exp(w) \ , \qquad \forall \ z, w \in \mathbb{C} \ . \tag{39}$$

Dimostrazione Dalla formula del binomio di Newton (che vale inalterata in $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}
\exp(z+w) &:= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(z+w)^k}{k!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}z^j w^{k-j}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{0\le j\le k\le n}\frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{w^k}{k!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\sum_{k=0}^{n}\frac{w^k}{k!}-\varepsilon_n\Big)
\end{aligned}$$

dove

$$\varepsilon_n := \sum_{j=1}^{n}\frac{z^j}{j!}\quad\sum_{k=n-j+1}^{n}\frac{w^k}{k!}\ . \tag{40}$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\sum_{k=0}^{n}\frac{w^k}{k!} = \Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\Big)\ \Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{w^k}{k!}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{k!} = \exp(z)\exp(w)\ ,$$

il teorema è conseguenza dell'identità

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0\ . \tag{41}$$

Per dimostrare la (41), osserviamo dapprima che

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(1+1)^n}{(n+1)!} = \sum_{j=0}^{n+1}\ \frac{1}{j!}\ \frac{1}{(n+1-j)!}\ ;$$

dunque per ogni coppia di interi non negativi la cui somma è $(n+1)$ si ha

$$\frac{1}{j!}\frac{1}{k!} \le \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\ , \qquad \forall\ j,k\in\mathbb{N} \text{ tali che } k+j=n+1\ . \tag{42}$$

Ora, se $R\ge\max\{|z|,|w|\}$, dalla (42), osservando che $j+k=n+1$ nel termine di destra della (40), si ha che

$$|\varepsilon_n| \le R^{n+1}\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{k=n-j+1}^{n}\frac{1}{j!}\ \frac{1}{k!} \le \frac{(2R)^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{k=n-j+1}^{n} 1 \le \frac{(2R)^{n+1}}{(n+1)!}\ n^2\ ,$$

che, per n che tende a ∞, tende a zero. ∎

Osservazione 11 (i) Poiché la funzione $\exp(z)$ estende al campo complesso la funzione $x \in \mathbb{R} \to e^x$ (estendendo anche la relazione (39) a tutto $\mathbb{C}$), si pone

$$e^z := \exp(z)\ , \qquad \forall\ z \in \mathbb{C}\ . \tag{43}$$

(ii) Grazie al teorema di addizione e alla formula di Eulero si ha, per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \,\mathrm{sen}\, y) \tag{44}$$

e dunque

$$\mathrm{Re}\,(e^z) = e^x \cos y\ , \qquad \mathrm{Im}\,(e^z) = e^x \,\mathrm{sen}\, y\ . \tag{45}$$

(iii) Dalla formula di Eulero e dal teorema di addizione segue immediatamente che se s e t sono reali, allora

$$\begin{aligned}
\cos(t+s) + i\,\mathrm{sen}\,(t+s) &= e^{i(t+s)}\\
&= e^{it}e^{is}\\
&= (\cos t + i\,\mathrm{sen}\, t)(\cos s + i\,\mathrm{sen}\, s)\\
&= (\cos t\cos s - \,\mathrm{sen}\, t\,\mathrm{sen}\, s) + i(\,\mathrm{sen}\, t\cos s + \cos t\,\mathrm{sen}\, s)\ ,
\end{aligned}$$

relazione che fornisce una nuova prova delle formule di addizione per il seno ed il coseno.