Il teorema di ricorrenza

Teorema 0.1 *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia data una funzione $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Esiste una ed una sola successione $\{a_n\}$ tale che*

(i) $a_1 = a$;

(ii) $a_{n+1} = f_n(a_n)$, $\forall\ n \geq 1$.

Nella dimostrazione di tale risultato faremo uso di particolari successioni: se $n \in \mathbb{N}$, chiamiamo un "n–segmento" una successione $\{b_k\}$ che verifichi:

(iii) $b_1 = a$;

(iv) $b_k = f_{k-1}(b_{k-1})$, $\forall\ 2 \leq k \leq n$.

In particolare, un 1–segmento è una successione $\{b_k\}$ che verifica solo (iii).

Le proprietà fondamentali degli n–segmenti sono raccolte nel seguente

Lemma 0.2 (a) *Per ogni n esiste un n–segmento.*
(b) *Un n–segmento è un k–segmento per ogni $1 \leq k \leq n$.*
(c) *Se $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$ sono due n–segmenti, allora $b_k = c_k$, $\forall\ 1 \leq k \leq n$.*

Dimostrazione del Lemma 0.2.
(a) Per induzione. Per $n = 1$ definiamo $\{b_k\}$ con $b_k := a$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Tale successione è ovviamente un 1–segmento. Sia ora $n \geq 1$, assumiamo che esista un n segmento $\{b_k\}$ e mostriamo che esiste anche un $(n+1)$–segmento; dal principio di induzione seguirà allora (a). Definiamo $\{c_k\}$ ponendo

$$c_k := \begin{cases} b_k & \text{se } k \leq n \\ c_k := f_n(b_n) & \text{se } k \geq n+1 \end{cases} .$$

Allora, poiché $\{b_k\}$ è un n–segmento si ha che $c_1 := b_1 = a$ e, per ogni $2 \leq k \leq n$, $c_k := b_k = f_{k-1}(b_{k-1}) = f_{k-1}(c_{k-1})$. Infine $c_{n+1} := f_n(b_n) = f_n(c_n)$ e dunque $\{c_k\}$ è un $(n+1)$–segmento.

(b) segue immediatamente dalla definizione di n–segmento.

(c) L'affermazione per $n = 1$ segue direttamente dalla definizione di 1–segmento. Consideriamo il caso $n \geq 2$ e definiamo due successioni ausiliarie ponendo:

$$\hat{b}_k := \begin{cases} b_k & \text{se } k \leq n \\ b_n & \text{se } k \geq n+1 \end{cases} , \qquad \hat{c}_k := \begin{cases} c_k & \text{se } k \leq n \\ b_n & \text{se } k \geq n+1 \end{cases} . \tag{1}$$

Chiaramente la tesi segue se mostriamo che $\hat{b}_k = \hat{c}_k$ per ogni $k \geq 1$. Dimostriamo quest'ultima affermazione per induzione. Poiché $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$ sono due n–segmenti, $\hat{b}_1 := b_1 = a = c_1 =: \hat{c}_1$. Sia ora $k \geq 1$ e assumiamo che $\hat{b}_k = \hat{c}_k$; vogliamo dimostrare che $\hat{b}_{k+1} = \hat{c}_{k+1}$. Distinguiamo due casi: $k+1 \leq n$ e $k+1 \geq n+1$. Se $2 \leq k+1 \leq n$, da (1), per il fatto che $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$ sono due n–segmenti e per l'ipotesi induttiva, si ha che

$$\hat{b}_{k+1} := b_{k+1} = f_k(b_k) = f_k(\hat{b}_k) = f_k(\hat{c}_k) = f_k(c_k) = c_{k+1} =: \hat{c}_{k+1} .$$

Se $k+1 \geq n+1$, $\hat{b}_{k+1} := b_n =: \hat{c}_{k+1}$ per la definizione in (1). ∎

Dimostrazione del Teorema 0.1.

Poniamo, per ogni n, $a_n := b_n$ dove $\{b_k\}$ è un qualunque n–segmento (che esiste, per ogni n, per (a) del Lemma 0.2). Tale definizione è ben posta (ossia non dipende dal particolare n–segmento) grazie a (c) del Lemma 0.2. Poiché per ogni n–segmento $\{b_k\}$, $b_1 = a$, si ha che $a_1 = a$. Per ogni $n \geq 2$, $a_n = b_n$ per un qualche n–segmento $\{b_k\}$; quindi $a_n = b_n = f_{n-1}(b_{n-1}) = f_{n-1}(a_{n-1})$ (per definizione di n–segmento, per definizione di a_k e per (c) del Lemma 0.2). Quindi la successione $\{a_k\}$ verifica (i) e (ii).

Resta da dimostrare l'unicità. Supponiamo che $\{\hat{a}_n\}$ sia un'altra successione che verifichi (i) e (ii). Dimostriamo, ancora per induzione, che $a_n = \hat{a}_n$ per ogni n. Da (i) segue che $a_1 = a = \hat{a}_1$. Supponiamo ora che $a_n = \hat{a}_n$. Poiché entrambe le successioni verificano (ii), dall'ipotesi induttiva segue che $a_{n+1} = f_n(a_n) = f_n(\hat{a}_n) = \hat{a}_{n+1}$ e dal principio di induzione segue che $a_n = \hat{a}_n$ per ogni n. $\blacksquare$

Esempi: (i) Prendiamo $a = t$ e $f_n(x) = tx$ (per ogni n). Dal Teorema 0.1 segue che esiste una unica successione $\{a_n\}$ tale che $a_1 = t$ e $a_n = t \cdot a_{n-1}$. Tale successione si denota con t^n (o meglio è il *significato* del simbolo t^n).

(ii) Poniamo $f_n(x) := f(x) = \min \Pi_x$ dove[1] $\Pi_x := \{p \in \mathbb{N} : \ p > x \text{ e } p \text{ è primo}\}$, e $a = 2$. Allora, $\{p_n\}$ con $p_2 = 2$ e $p_{n+1} = f(p_n)$ è la successione di tutti i numeri primi in ordine crescente.

(iii) Sia $\{a_n\}$ una successione e definiamo $f_n(x) := x + a_{n+1}$: la successione $\{\sigma_n\}$ con $\sigma_1 := a_1$ e $\sigma_n = f_{n-1}(\sigma_{n-1})$ per $n \geq 2$ si chiama *la successione delle ridotte della serie con temine n–mo a_n* e si denota con

$$\sigma_n =: \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

[1] Π_x è non vuoto per ogni $x \in \mathbb{R}$ poiché esistono infiniti numeri primi.