AnalisiMatematica.n

Lezioni di analisi matematica su $\mathbb{R}^n$

Dispense per i corsi AM210/AM220 - CdL Matematica

e Analisi Matematica II – CdL Fisica

Luigi Chierchia – Università degli Studi Roma Tre

AA 2018–2019

Indice

Capitolo 1

Topologia euclidea e funzioni continue

$\mathbb{R}^n$ denota il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n–volte), ossia, l'insieme delle $n-$uple ordinate $x = (x_1, \cdots, x_n)$ con x_k in $\mathbb{R}$ per ogni $k = 1, \cdots, n$; $\mathbb{R}^n$ è uno spazi vettoriale sul campo[1] $\mathbb{R}$.

1 Struttura euclidea

Definizione 1.1 *Dati $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ in $\mathbb{R}^n$ definiamo:*
(i) *il* **prodotto scalare** *(o "prodotto scalare euclideo") di x e y*

$$x \cdot y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \ ; \tag{1.1}$$

(ii) *la* **norma euclidea di** x

$$|x| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \ . \tag{1.2}$$

(iii) *la* **distanza (euclidea)** *di x e y*

$$d(x, y) := |x - y| \ . \tag{1.3}$$

È immediato verificare che il prodotto scalare è commutativo, $x \cdot y = y \cdot x$, e lineare: $(ax) \cdot y = a\,(x \cdot y)$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$.

La relazione fondamentale tra prodotto scalare e norma euclidea è data dalla seguente

---

[1] Ossia, è definita la somma di due punti (o "elementi" o "vettori") x e y di $\mathbb{R}^n$ ed il prodotto di un vettore x di $\mathbb{R}^n$ con un elemento a di $\mathbb{R}$
(S) $x + y = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$
(P) $ax = (ax_1, ..., ax_n)$
ed (S) e (P) sono tali che: la somma in (S) è commutativa e associativa; l'elemento neutro è $0 := (0, \cdots, 0)$; per ogni vettore $x = (x_1, \cdots, x_n)$ esiste l'opposto $-x := (-x_1, \cdots, -x_n)$ tale che $x - x := x + (-x) = 0$; vale la proprietà distributiva: $a(x + y) = ax + ay$.

Proposizione 1.2 (Disuguaglianza di Cauchy) *Per ogni x e y in $\mathbb{R}^n$ si ha*

$$|x \cdot y| \leq |x|\ |y| \tag{1.4}$$

o, equivalentemente[2],

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{1.5}$$

Dimostrazione Nel caso in cui $x = 0$ (cioè $x_k = 0$ per ogni k) o $y = 0$, la (1.5) è ovviamente verificata (con il segno $=$). Assumiamo dunque che sia x che y siano diversi da zero (ovvero che abbiano almeno una componente non nulla); ciò è equivalente a supporre che

$$a := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} > 0 \ , \qquad b := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} > 0 \ . \tag{1.6}$$

Definiamo $\bar{x}_k := \frac{|x_k|}{a}$ e $\bar{y}_k := \frac{|y_k|}{b}$. Allora,

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k^2 = 1 \ , \qquad \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k^2 = 1 \ , \tag{1.7}$$

e la relazione (1.5) risulta essere equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k \bar{y}_k \leq 1 \ . \tag{1.8}$$

D'altra parte, per ogni α e β in $\mathbb{R}$, si ha

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \tag{1.9}$$

(essendo tale relazione equivalente a $0 \leq (\alpha - \beta)^2$). Dunque

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k \bar{y}_k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{x}_k^2 + \bar{y}_k^2}{2} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k^2\Big) = 1 \ ,$$

da cui segue (1.8) e quindi la validità di (1.5). ∎

Le proprietà fondamentali della norma e della distanza euclidea sono:

Proposizione 1.3 *La norma euclidea $|\cdot|$ verifica*[3]*:*

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & |x| \geq 0 \ \forall\, x \quad \text{e} \quad |x| = 0 \iff x = 0 \ , \\ \text{(ii)} & |ax| = |a|\ |x| \ , \\ \text{(iii)} & |x + y| \leq |x| + |y| \ . \end{array} \tag{1.10}$$

La distanza euclidea $d(\cdot,\cdot)$ verifica:

$$\begin{array}{ll} \text{(iv)} & d(x,y) \geq 0 \quad \text{e} \quad d(x,y) = 0 \iff x = y \ , \\ \text{(v)} & d(x,y) = d(y,x) \ , \\ \text{(vi)} & d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \ ; \end{array} \tag{1.11}$$

[2] Ovviamente, la (1.5) implica la (1.4) ma è immediato vedere che vale anche il viceversa.

[3] La (ii) prende il nome di "proprietà di omogeneità"; la (iii) è chiamata "disuguaglianza triangolare".

Dimostrazione Le proprietà (i) e (ii) sono immediate. Dimostriamo la (iii). Si osservi che per ogni coppia di numeri reali z e w si ha

$$(z+w)^2 \le z^2 + w^2 + 2|zw| \ . \tag{1.12}$$

Quindi se $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2 \le \sum_{k=1}^n \big\{ |x_k|^2 + |y_k|^2 + 2|x_k| \ |y_k| \big\} \\ &= |x|^2 + |y|^2 + 2\sum_{k=1}^n |x_k| \ |y_k| \le |x|^2 + |y|^2 + 2\Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^2\Big)^{\frac12} \\ &= |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \ |y| = (|x| + |y|)^2 \ , \end{aligned}$$

dove la prima disuguaglianza è conseguenza di (1.12) e la seconda è conseguenza della disuguaglianza di Cauchy.
Le (iv)÷(vi) seguono immediatamete dalla definizione e dalle (i)÷(iii). ∎

Si noti che la (iii) è equivalente a[4]

$$|u - v| \ge \Big| |u| - |v| \Big| \ , \qquad \forall \ u, v \in \mathbb{R}^n \ . \tag{1.13}$$

Definizione 1.4 (i) *Dato $r > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$ definiamo* **la sfera euclidea aperta** *(o, semplicemente "la sfera") di raggio r e centro x come l'insieme*[5]

$$B_r(x) := B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \ d(y, x) = |y - x| < r\} \ . \tag{1.14}$$

(ii) *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto ("nella topologia euclidea") se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$. Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice* **chiuso** *se $C = A^c := \mathbb{R}^n \backslash A$ con A aperto.*
(iii) *La famiglia $\mathcal{A}$ di tutti insiemi aperti definiti in* (ii) *prende il nome di* **topologia standard** *(o "topologia euclidea") di $\mathbb{R}^n$.*

È immediato verificare che la topologia euclidea verifica le seguenti proprietà:

Proposizione 1.5 (i) *$\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono aperti (e chiusi).*
(ii) *L'unione di una famiglia arbitraria di insiemi aperti è un insieme aperto.*
(iii) *L'intersezione di una famiglia finita di insiemi aperti è un insieme aperto.*

Definizione 1.6 *Dato un qualunque insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$, la* **chiusura** *di E, denotato $\overline{E}$ è il più piccolo chiuso contenente E (ovvero è l'intersezione di tutti i chiusi contenenti E); l'* **interno** *di E, denotato $\mathring{E}$, è il più grande aperto contenuto in E (ovvero è l'unione di tutti gli aperti contenuti in*[6] *E); la* **frontiera** *(insiemistica) di E, denotata ∂E, è l'insieme*

$$\partial E := \overline{E} \backslash \mathring{E} \ . \tag{1.15}$$

Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}^n$ è un **intorno** *di x se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq I$. Un punto x si dice* **interno** *ad E se $x \in \mathring{E}$ o, equivalentemente, se E è un intorno di x; x è un* **punto limite** *(o "punto d'accumulazione") per E se ogni intorno di x contiene almeno un punto di E diverso da x (cioè se $\forall \ r > 0 \ B_r(x) \cap (E \backslash \{x\}) \ne \emptyset$); x è un* **punto isolato** *di E se esiste un intorno di x la cui intersezione con E è il solo punto x.*

---

[4] Si ponga $x = u - v$ e $y = v$ oppure $x = v - u$ e $y = u$.
[5] Nel caso $n = 1$, $B(x, r)$ è l'"intervallo aperto" $(x - r, x + r) := \{y \text{ t.c. } x - r < y < x + r\}$.
[6] Chiaramente A è aperto se e solo se $A = \mathring{A}$ e C è chiuso se e solo se $C = \overline{C}$.

2 Successioni e completezza

Definizione 1.7 (i) *Una* **successione** $\{x^{(k)}\}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *[o in un insieme arbitrario* A*] è una funzione da* $\mathbb{N}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *[rispettivamente, in* A*] ossia una mappa che associa ad ogni intero* k *la* $n-$*upla* $x^{(k)} := (x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ *[rispettivamente, un elemento* $x^{(k)} \in A$*]. Se una successione* $\{x^{(k)}\}$ *ha valori in* A *scriveremo anche*[7] $\{x^{(k)}\} \subseteq A$.
(ii) *Una successione si dice* **di Cauchy** *(o "fondamentale") se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N \in \mathbb{N} : \quad |x^{(k)} - x^{(j)}| < \varepsilon \quad \forall\ k, j \geq N\ . \tag{1.16}$$

(iii) *Una successione* $\{x^{(k)}\}$ **converge** *a* x_0 *(in formule,* $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x_0$*) se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N \in \mathbb{N} : \quad |x^{(k)} - x_0| < \varepsilon \quad \forall\ k \geq N\ . \tag{1.17}$$

(iv) *Una successione* $\{x^{(k)}\}$ *si dice limitata se* $\exists M > 0$ *tale che* $|x^{(k)}| \leq M$ *per ogni* k.
(v) *Date* $\{x^{(k)}\}$ *successione in* $\mathbb{R}^n$ *e* $\{j_n\}$ *una successione a valori in* $\mathbb{N}$ *strettamente crescente*[8]*, definiamo la* **sottosuccessione** $\{x^{(j_k)}\}$ *di* $\{x^{(k)}\}$ *come la mappa che associa, ad ogni* k*, la* $n-$*upla* $x^{(j_k)} := (x_1^{(j_k)}, ..., x_n^{(j_k)})$.

Osservazione 1.8 *Una successione* $\{x^{(k)}\}$ *di Cauchy è limitata.*
Infatti, per la (1.16), $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tale che $|x^{(k)} - x^{(N)}| < 1$ se $k \geq N$. Sia

$$M := \max\{|x^{(1)}|, ..., |x^{(N-1)}|, |x^{(N)}| + 1\}\ .$$

Allora, $|x^{(k)}| \leq M$, per ogni $k \leq N$ e, se $k > N$, $|x^{(k)}| \leq |x^{(k)} - x^{(N)}| + |x^{(N)}| \leq 1 + |x^{(N)}| \leq M$.

Proposizione 1.9 (i) *Una successione* $\{x^{(k)}\}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *è di Cauchy se e solo se sono di Cauchy (in* $\mathbb{R}$*) le* n *successioni* $\{x_1^{(k)}\}$,...,$\{x_n^{(k)}\}$*;* $\{x^{(k)}\}$ *converge a* x *se e solo se* $\{x_i^{(k)}\}$ *converge a* x_i *per ogni* $1 \leq i \leq n$.
(ii) *Se* $\{x^{(k)}\}$ *è una successione limitata in* $\mathbb{R}^n$ *allora esiste una sottosuccessione di* $\{x^{(k)}\}$ *convergente.*
(iii) $\mathbb{R}^n$ *è completo (ossia, ogni successione di Cauchy ammette limite).*

Dimostrazione Le affermazioni seguono facilmente dalla equivalenza della norma euclidea con la norma $|\cdot|_\infty$ (si veda relazione (1.25)) e dalla completezza di $\mathbb{R}$. ∎

Proposizione 1.10 (i) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *è chiuso se e solo se per ogni* $\{x^{(k)}\} \subseteq E,\ \{x^{(k)}\}$ *convergente,* $\{x^{(k)}\}$ *ammette limite in* E*;*
(ii) *per un qualunque insieme* $E \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $(\mathring{E})^c = \overline{E^c}$.
(iii) *per un qualunque insieme* E*,* $x \in \partial E$ *se e solo se ogni sfera aperta centrata in* x *contiene sia punti di* $\overline{E}$ *che punti di* $\overline{E^c}$*, in formule:* $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$.

Dimostrazione (i): Dimostriamo l'affermazione equivalente: "E non chiuso" se e solo se esiste $\{x^{(k)}\} \subseteq E,\ \{x^{(k)}\}$ convergente, ma $\{x^{(k)}\}$ ammette limite in E^c.
"E non chiuso" è equivalente a "E^c non aperto" il che è a sua volta equivalente a "$\exists\ \bar{x} \in E^c$ tale che, $\forall\ r > 0,\ B_r(\bar{x}) \cap E \neq \emptyset$". Scegliendo $r = 1/k$ con $k \in \mathbb{N}$, si determina $x^{(k)} \in B_{1/k}(\bar{x}) \cap E$ il che vuol dire che esiste $\{x^{(k)}\} \subseteq E,\ \{x^{(k)}\}$ converge a $\bar{x}$ che è in E^c.

[7]Si noti che stiamo usando lo stesso simbolo sia per l'*immagine* di una successione $\{x^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ che per la successione stessa $\{x^{(k)}\}$.
[8]Cioe $j_n < j_{n+1}$ per ogni n

(ii): per definizione di $\mathring{E}$, $\mathring{E} \subseteq E$ e passando ai complementari $E^c \subseteq (\mathring{E})^c$ e poiché $(\mathring{E})^c$ è chiuso dalla definizione di chiusura d'un insieme segue che $\overline{E^c} \subseteq (\mathring{E})^c$. D'altra parte $E^c \subseteq \overline{E^c}$ e quindi $A := (\overline{E^c})^c \subseteq E$; poiché A è aperto, dalla definizione di interno d'un insieme segue che $(\overline{E^c})^c \subseteq \mathring{E}$ ovvero $(\mathring{E})^c \subseteq \overline{E^c}$.
(iii): l'asserto deriva subito dal punto (ii); infatti $\partial E = \overline{E} \backslash \mathring{E} = \overline{E} \cap (\mathring{E})^c = \overline{E} \cap \overline{E^c}$. ∎

3 Funzioni continue

Definizione 1.11 *Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \overline{E}$ e, per $\delta > 0$, $E_\delta(x_0) := \{x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta\}$.*
(i) *si dice che $\alpha \in \mathbb{R}^m$ è il* **limite di f per x che tende a** x_0, $\alpha = \lim_{x \to x_0} f(x)$, *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon\ ,\ \forall\, x \in E_\delta(x_0)\ . \tag{1.18}$$

Nel caso $m = 1$, si definiscono, rispettivamente, il limite superiore (o "massimo limite") e il limite inferiore (o "minimo limite") di f quando x tende a x_0 i numeri

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) := \inf_{\delta > 0} \sup_{x \in E_\delta} f(x)\ , \qquad \liminf_{x \to x_0} f(x) := \sup_{\delta > 0} \inf_{x \in E_\delta} f(x)\ . \tag{1.19}$$

(ii) *Una funzione f si dice* **continua** *in $x_0 \in E$ se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,\ \forall\, x \in E_\delta(x_0)\ . \tag{1.20}$$

Una funzione f si dice **continua su** E, *ovvero $f \in C(E, \mathbb{R}^m)$, se è continua in ogni punto x_0 di E.*

Osservazione 1.12 (i) Ovviamente, se x_0 è un punto d'accumulazione di E allora f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e (nel caso $m = 1$) esiste il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ se e solo se $\liminf_{x \to x_0} f(x) = \limsup_{x \to x_0} f(x)$.
(ii) Se A è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in $(x_0, y_0) \in A$ allora

$$f(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)\ ; \tag{1.21}$$

(e, naturalmente, tale relazione si estende in modo ovvio al caso di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$).

La seguente proposizione raccoglie alcuni risultati elementari sulle funzioni continue.

Proposizione 1.13 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : E \to \mathbb{R}^m$.*
(i) f è continua in $x_0 \in E$ se e solo se

$$\forall\, \{x^{(k)}\} \subseteq E \quad \text{tale che} \quad \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = f(x_0)\ . \tag{1.22}$$

(ii) f è continua su E se e solo se per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(U)$ è un aperto nella topologia relativa di[9] *E.*
(iii) Siano f, g funzioni continue in $x_0 \in E$ ed a valori in $\mathbb{R}^m$ e sia $h : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ continua in $y_0 \in U$. Allora: $f + g$ è continua in x_0; se $f(x_0) = y_0$, $h \circ f$ è continua in x_0; nel caso $m = 1$, fg è continua in x_0; nel caso $m = 1$ e $f(x_0) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ è continua in[10] *x_0.*

[9] Ovvero, esiste A aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che $f^{-1}(U) = A \cap E$.
[10] Poiché $f(x_0) \neq 0$, $1/f$ è definita in un intorno di x_0.

Dimostrazione (i): Assumiamo (1.20) e fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia $\{x^{(k)}\} \subseteq E$ tale che $x^{(k)} \to x_0$. Allora esiste k_0 tale che $|x^{(k)} - x_0| < \delta$ per ogni $k \geq k_0$ e, per (1.20), $|f(x^{(k)}) - f(x_0)| < \varepsilon$ (per $k \geq k_0$) il che implica (1.22).
Per il viceversa dimostriamo che se non vale (1.20) allora non vale (1.22). La negazione di (1.20) implica che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni k possiamo trovare $x^{(k)} \in E$ per cui $|x^{(k)} - x_0| < 1/k$ e $|f(x^{(k)}) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Ma allora $x^{(k)} \to x_0$ e $|f(x^{(k)}) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ il che dimostra che non vale (1.22).
(ii) Supponiamo che f sia continua su E e sia U un aperto di $\mathbb{R}^m$ tale che $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ (altrimenti non c'è nulla da verificare essendo $\emptyset$ un aperto). Sia x_0 tale che $f(x_0) = y_0 \in U$. Poiché U è aperto esiste una sfera aperta J di centro y_0 e raggio r interamente contenuta in U. Da (1.20) con $\varepsilon = r$ segue che l'insieme $A_{x_0} := E \cap B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(U)$. Per definizione A_{x_0} è un aperto nella topologia relativa di E, ma (poiché x_0 era un punto arbitrario) questo è equivalente a dire che $f^{-1}(E)$ è aperto (sempre nella topologia relativa).
Assumiamo ora che per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(U)$ sia un aperto nella topologia relativa. Sia $x_0 \in E$, sia $\varepsilon > 0$ e sia $y_0 := f(x_0)$. Per la nostra ipotesi $B := f^{-1}(\{y : |y - y_0| < \varepsilon\})$ è un aperto nella topologia relativa di E ovvero (per definizione) esiste A aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che $B = A \cap E$. Essendo $x_0 \in A$ e A aperto esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subseteq A$ quindi $B_\delta(x_0) \cap E \subseteq B$ il che significa che vale (1.20). ∎

Osservazione 1.14 Il caso scalare è particolarmente importante:

(i) *La funzione vettoriale* $f : x \in E \subseteq \mathbb{R}^n \to f(x) := \Big(f_1(x), ..., f_m(x)\Big) \in \mathbb{R}^m$ *è continua in* $x_0 \in E$ *se e solo se sono continue in* x_0 *le* m *funzioni scalari* $f_i : E \to \mathbb{R}$.

La dimostrazione segue dal punto (i) della Proposizione 1.13 e dal punto (i) della Proposizione 1.10.

(ii) *È facile vedere che* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è continua in* x_0 *punto interno di* A *se e solo se per ogni cammino* $z : [a, b] \to A$ *con* $z(t_0) = x_0$ *(*$a < t_0 < b$*), la funzione* $f \circ z$ *è continua in* t_0.

Il "solo se" deriva dal punto (v) della Proposizione 1.13. Per dimostrare il "se" si prenda $\{x^{(k)}\} \subseteq B_\delta(x_0) \subseteq A$ con $x^{(k)} \to x_0$. È possibile costruire un cammino $z : [0, 2] \to B_\delta(x_0)$ e una successione $\{t_k\} \subseteq [0, 1]$ tale[11] che $t_1 = 0$; $t_k \uparrow 1$; $z(1) = x_0$ e $z(t_k) = x^{(k)}$ per ogni k. Ora, se f non è continua in x_0, per il punto (i) della proposizione 1.13, la successione $\{f(x^{(k)})\}$ non converge a x_0, il che, per l'osservazione appena fatta, implica che esiste un cammino $z : [0, 2] \to B_\delta(x_0)$ con $z(1) = x_0$ per cui $f \circ z$ non è continua in $t = 1$. ∎

Esempio 1.15 In vista dell'osservazione precedente, considereremo solo funzioni scalari.

(i) La funzione $x \in \mathbb{R}^n \to |x| \in \mathbb{R}$ è continua su $\mathbb{R}^n$.

Infatti, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, \varepsilon > 0$, se $|x - x_0| < \delta := \varepsilon$, da (1.13) segue che $\Big||x| - |x_0|\Big| \leq |x - x_0| < \varepsilon$.

(ii) Sia $1 \leq i \leq n$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione $x \in \mathbb{R}^n \to g(x_i)$ è una funzione continua su $\mathbb{R}^n$. In particolare $x \in \mathbb{R}^n \to x_i^m$, con $m \in \mathbb{N}$, è una funzione continua su $\mathbb{R}^n$.

Infatti, $x \to x_i$ è continua (essendo, per ogni x_0 e ε, $|x_i - x_{0i}| \leq |x - x_0| < \varepsilon$ se $\delta := \varepsilon$) e l'affermazione deriva dal punto (v) della Proposizione 1.13.

[11] Ad esempio, si può prendere $t_k = 1 - \frac{1}{k}$, $(k \geq 1)$, e definire $z(t) = x^{(k-1)} + \dfrac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\Big(x^{(k)} - x^{(k-1)}\Big)$ per $t_{k-1} \leq t < t_k$ e $z(t) = x_0$ per $1 \leq t \leq 2$.

(iii) La funzione $f : x \in \mathbb{R}^4 \to 1 + x_1x_2 + 3x_3x_4^5 \in \mathbb{R}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^4$. Più in generale ogni polinomio su[12] $\mathbb{R}^n$ è continuo su tutto $\mathbb{R}^n$.

L'affermazione deriva dal punto precedente e dal punto (v) della Proposizione 1.13.

(iv) La funzione $f : x \in \mathbb{R}^3 \to \dfrac{e^{(x_1x_3)}}{\sqrt{1+x_2}} + |x|^{\sqrt{2}}$ è continua sul suo insieme di definizione, ovvero su $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_2 > -1\}$.

L'affermazione deriva dai punti (i) e (ii) precedenti e dal punto (v) della Proposizione 1.13.

(v) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La funzione $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{|x|y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è continua su $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ e non è continua in $(0,0)$.

Infatti, la continuità su $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ è conseguenza del punto (ii) qui sopra e del punto (v) della Proposizione 1.13. Per dimostrare che f non è continua in $(0,0)$, per il punto (i) della Proposizione 1.13, basta trovare una successione $(x_k, y_k) \to (0,0)$ tale che $f(x_k,y_k) \not\to \alpha$. Se $\alpha = 0$, possiamo scegliere $(x_k,y_k) = (1/k, 1/k)$ mentre se $\alpha \neq 0$ possiamo scegliere[13] $(x_k,y_k) := (1/k, 1/k^2)$.

4 Generalizzazioni

In questa sezione discutiamo brevemente alcune semplici generalizzazioni delle nozioni introdotte.

(a) In generale, un **prodotto scalare** su di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ (ossia un campo vettoriale con campo degli scalari dato da $\mathbb{R}$), è un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare, simmetrica e definita positiva[14].
Esempi di prodotti scalari su $\mathbb{R}^n$ sono dati da $\langle x, y\rangle := x \cdot Py$ con P matrice $(n \times n)$ definita positiva[15].

(b) Dato uno spazio vettoriale V, una funzione $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ che verifichi (i)–(iii) di (1.10) (con $|\cdot|$ sostituito da $\|\cdot\|$) si chiama **norma** su[16] V.
È immediato verificare che esempi di norme su $\mathbb{R}^n$ diverse dalla norma euclidea sono la "norma 1" $|\cdot|_1$ e la "norma ∞" (o anche "norma del sup" e "del massimo") $|\cdot|_\infty$ definite da

$$|x|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k| \ , \qquad |x|_\infty := \max_{1\le i\le n} |x_i| \ . \tag{1.23}$$

Due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ su V si dicono **equivalenti** se esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$\|x\|_a \le c_1\|x\|_b \le c_2\|x\|_a \ , \quad \forall\ x \in V \ . \tag{1.24}$$

[12] Un *monomio* su $\mathbb{R}^n$ è una funzione della forma $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ dove α_1,...,α_n sono numeri interi non negativi; la somma $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ definisce il *grado* del monomio; un *polinomio* su $\mathbb{R}^n$ è una combinazione lineare (a coefficienti in $\mathbb{R}$) di monomi su $\mathbb{R}^n$; il grado massimo dei monomi che costituiscono un polinomio definisce il grado del polinomio.

[13] $f(1/k, 1/k) = 1/2$; $f(1/k, 1/k^2) = k/(1+k^2) \to 0$.

[14] "Bilineare" significa che $\langle ax+by, z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$ e $\langle x, ay+bz\rangle = a\langle x,y\rangle + b\langle x,z\rangle$ per ogni coppia di scalari a, b e per ogni $x,y,z \in V$; "simmetrica" significa che $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ per ogni $x,y \in V$; "definita positiva" significa che $\langle x,x\rangle \ge 0$ per ogni $x \in V$ e $\langle x,x\rangle = 0 \implies x = 0$.

[15] Una matrice reale $(n \times n)$ P si dice definita positiva se $x \cdot Px > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$

[16] Di solito, una norma su uno spazio vettoriale V si denota appunto con $\|x\|$ (dove x è un elemento di V). Nel caso di $\mathbb{R}^n$ e della norma euclidea, si usa spesso la notazione più semplice $|x|$; a volte (in altri testi) la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$ viene indicata con $\|x\|_2$ o anche con $|x|_2$.

Si noti che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, valgono le seguenti relazioni fra le norme appena introdotte[17]:

$$|x|_\infty \le |x| \le \sqrt{n}|x|_\infty \ , \quad |x|_\infty \le |x|_1 \le n|x|_\infty \ , \quad |x| \le |x|_1 \le \sqrt{n}|x| \ ; \tag{1.25}$$

e dunque la norma euclidea, la norma 1 e la norma del sup sono tutte equivalenti tra loro. In realtà, più avanti dimostreremo che *in* $\mathbb{R}^n$ *tutte le norme sono equivalenti* (Proposizione 1.21).

Un funzione $\|\cdot\|$ che verifichi le proprietà (i)–(iii) di (1.10) *tranne* la proprietà "$\|x\| = 0 \implies x = 0$", prende il nome di **seminorma**. Un esempio di seminorma che non sia una norma è data da $\mathbb{R}^2$ con $\|x\| := |x_1|$. Uno spazio vettoriale dotato di norma si chiama **spazio normato**. Un sottospazio vettoriale $E \subseteq V$ di uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato con norma $\|\cdot\|$ (o meglio, la restrizione di $\|\cdot\|$ a E).
Per una breve introduzione alla teoria degli spazi normati si veda § 7.

(c) Dato un qualunque insieme X, una funzione $d(\cdot,\cdot) : X \times X \to [0,\infty)$ che verifichi (i)–(iii) di (1.11) si chiama **distanza** o **metrica**. Un insieme dotato di metrica prende il nome di **spazio metrico**.
È immediato verificare che uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è anche uno spazio metrico con $d(x,y) := \|x - y\|$.
Un sottoinsieme $E \subseteq X$ di uno spazio metrico (X,d) è uno spazio metrico con distanza $d(\cdot,\cdot)$ (o, meglio: con la restrizione di $d(\cdot,\cdot)$ a $E \times E$).
Ovviamente, uno spazio metrico (X,d) in cui X non sia uno spazio vettoriale non può essere uno spazio normato; ad esempio, il bordo sferico euclideo

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ |x| = 1\} \ ,$$

è uno spazio metrico rispetto alla distanza euclidea ereditata da $\mathbb{R}^{n+1}$, ma non è uno spazio vettoriale.

Uno spazio metrico X si dice **completo** se ogni successione di Cauchy[18] ammette limite in X. Uno spazio normato completo (rispetto alla metrica naturale $d(x,y) := \|x - y\|$) prende il nome di **spazio di Banach**.

(d) Una **topologia** su di un insieme arbitrario X è, per definizione, una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X (detti "insiemi aperti") che goda delle seguenti proprietà: (i) X e $\emptyset$ appartengono a $\mathcal{A}$; (ii) un'unione arbitraria di elementi di $\mathcal{A}$ è un elemento di $\mathcal{A}$; (iii) un'intersezione finita di elementi di $\mathcal{A}$ è un elemento di $\mathcal{A}$. I complementari degli insiemi aperti si chiamano insiemi chiusi. Uno **spazio topologico** è una coppia $(X,\mathcal{A})$ con X insieme arbitrario e $\mathcal{A}$ è una topologia su X.
Come nel caso di sottospazi vettoriali di spazi normati o sottoinsiemi di spazi metrici, anche i sottoinisiemi $E \subseteq X$ di uno spazio topologico $(X,\mathcal{A})$ eredita, in modo naturale, una topologia; è infatti facile verificare che[19]

$$\mathcal{A}_E := \{A_E = E \cap A \text{ t.c. } A \in \mathcal{A}\} \ , \tag{1.26}$$

definisce una topologia su E. Tale topologia prende il nome di **topologia relativa** (o "topologia indotta").

[17] Le disuguaglianze nelle quali appare la norma ∞ sono ovvie; $|x| \le |x|_1$ si verifica elevando al quadrato e $|x|_1 \le \sqrt{n}|x|$ deriva dalla disuguaglianza di Cauchy (1.5) con $y_i = 1$ per ogni i.

[18] Chiaramente, una successione $\{x^{(k)}\}$ in X è un'applicazione da $\mathbb{N}$ in X e una successione $\{x^{(k)}\}$ si dice di Cauchy se $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ N{:}d(x^{(k)}, x^{(j)}) < \varepsilon \ \forall \ k, j \ge N$.

[19] Esercizio 1.13.

Si consideri, ad esempio, $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e sia $E := (0,1]$; E è un sottoinsieme né aperto, né chiuso di $\mathbb{R}$ ma nella topologia relativa è sia aperto che chiuso e $(1/2,1] = (1/2,3/2) \cap E$ è un insieme aperto mentre $(0,1/2] = E \backslash (1/2,1]$ è un insieme chiuso.

Come abbiamo visto nel caso di $\mathbb{R}^n$, uno spazio metrico (X,d) ammette una topologia naturale "eredidata" dalla struttura metrica ed è quella per cui gli aperti A sono definiti come quegli insiemi tali che per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ ed una sfera $B(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$ tutta contenuta in A (esercizio 1.14).

5 Compattezza

Un insieme K si dice **compatto** se da ogni ricoprimento di aperti si può estrarre un sottoricoprimento finito ovvero, in formule,

$$\text{(a)}\ \ K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\ , \quad E_\alpha \text{ aperto} \quad \Longrightarrow \quad \exists\ \alpha_1, ..., \alpha_k \in A :\ K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} E_{\alpha_i}\ ;$$

qui A è un insieme arbitrario (e quindi non necessariamente numerabile) di indici.

Siano, ora, (b) e (c) le seguenti proprietà:

(b) ogni successione in K ammette una sottosuccessione convergente in K;

(c) K è chiuso e limitato.

Si ricorda che un insieme si dice limitato se esiste una sfera che lo contiene; la (b) viene a volte chiamata "compattezza per successioni".

Teorema 1.16 (Bolzano, Borel, Heine, Pìncherle, Weierstrass)
Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Allora le proprietà (a), (b) *e* (c) *sopra elencate sono equivalenti.*

Dimostrazione Dimostriamo le implicazioni: (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a).
(a) $\Longrightarrow$ (b): assumiamo per assurdo che valga (a) e non valga (b) ovvero $\exists \{x^{(k)}\} \subseteq K$ che non ammette una sottosuccessione estratta convergente in K. Dunque per ogni $y \in K$, esistono una sfera E_y di centro y ed un intero $k(y)$ tale che $x^{(k)} \notin E_y$ per ogni $k \geq k(y)$. Essendo $\{E_y : y \in K\}$ un ricoprimento aperto di K, per (a), si ha che che esistono $y^{(1)}$,...,$y^{(m)}$ in K tali che $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m E_{y^{(i)}}$. Ma dunque se $k_0 := \max\{k(y^{(i)}) : 1 \leq i \leq m\}$, per $k \geq k_0$ si ha che $x^{(k)} \notin E_{y^{(i)}}$ per ogni $1 \leq i \leq m$, il che significa che $x^{(k)} \notin K$; ma questo contraddice l'assunzione $\{x^{(k)}\} \subseteq K$.
(b) $\Longrightarrow$ (c): assumiamo per assurdo che valga (b) e non valga (c) ovvero che K è non limitato oppure non chiuso. Se K è non limitato esistono $\{x^{(k)}\} \subseteq K$ tali che $|x^{(k)}| \to \infty$ e chiaramente, per ogni sottosuccessione $\{x^{(k_j)}\} \subseteq \{x^{(k)}\}$, vale che $\lim_{i\to\infty} |x^{(k_j)}| = \infty$ il che contraddice (b). Se K non è chiuso, per la Proposizione 1.10 esiste $\bar{x} \in K^c$ e una successione $\{x^{(k)}\} \subseteq K$ tale che $x^{(k)} \to \bar{x}$. Chiaramente per ogni sottosuccessione $\{x^{(k_j)}\} \subseteq \{x^{(k)}\}$ vale che $x^{(k_j)} \to \bar{x}$ il che, nuovamente, contraddice (b).
(c) $\Longrightarrow$ (a): assumiamo per assurdo che valga (c) e non valga (a) ovvero che esista un ricoprimento aperto $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di K da cui non si possa estrarre alcun sottoricoprimento finito di K. Poiché K è limitato esiste un cubo[20] (chiuso) $Q_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_\infty \leq R\}$ che contiene

[20] Un *cubo* in $\mathbb{R}^n$ è un insieme della forma $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0|_\infty < r\}$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e qualche $r > 0$; per $n = 1$ un "cubo" è un intervallo aperto di centro x_0 e lunghezza $2r$, per $n = 1$ un "cubo" è un quadrato di centro x_0 e lato $2r$ etc.

K al suo interno. Suddividiamo il cubo Q_0 in 2^n cubi uguali. Almeno uno di questi cubi, la cui chiusura verrà denotata Q_1, è tale che $Q_1 \cap K$ è non vuoto e non può essere ricoperto da alcun sottoricoprimento finito di $\{E_\alpha\}$. Ripetendo tale costruzione otteniamo una famiglia di cubi chiusi $Q_0 := Q \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \cdots$, con lato di $Q_i := R\, 2^{-i}$, e tali che $Q_i \cap K$ è non vuoto e non è contenuto in alcun sottoricoprimento finito di $\{E_\alpha\}$. Se per ogni i scegliamo un punto $x^{(i)} \in Q_i \cap K$, allora la successione $\{x^{(i)}\}$ è di Cauchy[21] e per la completezza di $\mathbb{R}^n$ esiste x_0 tale che $x^{(i)} \to x_0$. Poiché K è chiuso si ha che $x_0 \in K$. Quindi esiste un α_0 tale che $x_0 \in E_{\alpha_0}$. Ed essendo E_{α_0} aperto ne segue che esiste una sfera di centro x_0 tutta contenuta in E_{α_0}. Ma allora esiste N tale che $Q_N \subseteq E_{\alpha_0}$ e quindi anche $Q_N \cap K \subseteq E_{\alpha_0}$ e questo contraddice il fatto che, per ogni i, $Q_i \cap K$ non è contenuto in alcun sottoricoprimento finito di $\{E_\alpha\}$. ∎

La compattezza è un invariante topologico (ossia si conserva sotto l'azione di una funzione continua):

Proposizione 1.17 *Se E è compatto e f è continua su E allora $f(E)$ è compatto.*

Dimostrazione Sia $\{y^{(k)}\}$ una successione in $f(E)$: ovvero esistono $x^{(k)} \in E$ tali che $f(x^{(k)}) = y^{(k)}$. Per la compattezza di E e per il Teorema 1.16, esiste $x^{(k_j)} \to \bar{x} \in E$. Segue allora che $y^{(k_j)} = f(x^{(k_j)}) \to f(\bar{x}) := \bar{y} \in f(E)$ il che (sempre per il Teorema 1.16) significa che $f(E)$ è compatto. ∎

Teorema 1.18 (Teorema di Weierstrass) *Sia E un insieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua su E. Allora f assume massimo e minimo in E.*

Dimostrazione Sia $M = \sup_{x\in E} f(x)$; dalla definizione di estremo superiore segue che possiamo scegliere una successione $\{x^{(k)}\}$ in E tale che $f(x^{(k)}) \to M$. Per il Teorema 1.16 possiamo trovare una sottosuccessione $\{x^{(k_j)}\}$ convergente ad un punto $x \in E$. Allora per la continuità di f segue che $M = \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = \lim_{j\to\infty} f(x^{(k_j)}) = f(x)$. Per il minimo si ragiona analogamente. ∎

Definizione 1.19 *Una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice* **uniformemente continua su** *E se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ tale che } \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ , \quad \forall\ x, y \in E \text{ con } |x - y| < \delta\ . \tag{1.27}$$

Teorema 1.20 (Teorema di Heine–Cantor) *Sia E un insieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : E \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua su E. Allora f è uniformemente continua su E.*

Dimostrazione Procediamo per assurdo usando la caratterizzazione (b) usata nel Teorema 1.16. La negazione di uniforme continuità si legge:

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall\ \delta > 0\ \exists\ x, y \text{ con } |x - y| < \delta \text{ tali che } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\ , \tag{1.28}$$

(naturalmente x e y dipendono da ε e δ e quest'ultimo è arbitrario). Se scegliamo $\delta = \frac{1}{k}$, otteniamo che esistono $\{x^{(k)}\}$ e $\{y^{(k)}\}$ tali che $|x^{(k)} - y^{(k)}| < \frac{1}{k}$ e $|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})| \geq \varepsilon$. Poiché E è compatto possiamo[22] estrarre $\{x^{(k_j)}\}$ e $\{y^{(k_j)}\}$ convergenti in E, e poiché $|x^{(k_j)} - y^{(k_j)}| <$

[21] Poiché la distanza massima tra due punti in un cubo di $\mathbb{R}^n$ di lato ℓ è $\sqrt{n}\ell$, se $j > i$, allora $x^{(j)}, x^{(i)} \in Q_i$ e quindi $|x^{(i)} - x^{(j)}| \leq \sqrt{n}R2^{-i}$.

[22] Il fatto che le estratte convergenti siano indicizzate dalla stessa successione di interi richiede una breve discussione: dalla compattezza di E esistono $\{x^{(n_j)}\}$ e $\{y^{(m_j)}\}$ convergenti. Definendo $z^{(j)} := y^{(m_j)}$, per la compattezza di E posso estrarre $\{z^{(k_j)}\}$ convergente in E. Poiché $\{k_j\} \subseteq \{n_j\}$, anche $\{x^{(k_j)}\}$ sarà convergente in E.

$\frac{1}{k_j}$, segue che esiste un unico $z \in E$ tale che $z = \lim_{j\to\infty} x^{(k_j)} = \lim_{j\to\infty} y^{(k_j)}$. Allora $\lim |f(x^{(k_j)}) - f(y^{(k_j)})| = |f(z) - f(z)| = 0$ (per la continuità di f) e questo contraddice il fatto che $|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})| \geq \varepsilon$ per ogni k. ∎

Un'applicazione del teorema di Weierstrass è la seguente

Proposizione 1.21 *In $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono equivalenti.*

Dimostrazione Sia $\|\cdot\|$ una *qualunque* norma su $\mathbb{R}^n$ e sia $|\cdot|$ la norma euclidea e facciamo vedere che $\|\cdot\|$ è equivalente a $|\cdot|$. Sia $x = \sum_{i=1}^n x_i e^{(i)}$ ($\{e^{(i)}\}$ base standard di $\mathbb{R}^n$) un punto arbitrario di $\mathbb{R}^n$. Dalla disuguaglianza triangolare, dall'omogeneità della norma $\|\cdot\|$ e dalla disuguaglianza di Schwarz segue che

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e^{(i)}\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \; \|e^{(i)}\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \; \sqrt{\sum_{i=1}^n \|e^{(i)}\|^2} := |x| \; c \; , \tag{1.29}$$

dove $c > 0$ è la norma euclidea del vettore $(\|e^{(1)}\|, ..., \|e^{(n)}\|)$; il fatto che $c > 0$ segue dalla non degenerazione di $\|\cdot\|$. Dunque la funzione $f(x) := \|x\|$ è una funzione continua (nella topologia indotta dalla norma euclidea) poiché se $|x^{(k)} - x| \to 0$, da (1.29) e dalla disuguaglianza triangolare, segue che

$$|f(x^{(k)}) - f(x)| := \Big| \|x^{(k)}\| - \|x\| \Big| \leq \|x^{(k)} - x\| \to 0 \; .$$

Dunque, dal teorema di Weierstrass, segue che la funzione f assume un minimo su $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ e tale minimo (per la non degenerazione di $\|\cdot\|$) è strettamente positivo. Quindi esiste un $x_0 \in S^{n-1}$ tale che

$$\|x\| \geq \|x_0\| := b > 0 \; , \qquad \forall \; x \in S^{n-1} \; . \tag{1.30}$$

Ed allora, per ogni $x \neq 0$

$$\Big\| \frac{x}{|x|} \Big\| \geq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|x\| \geq b|x| \; .$$

Tale relazione, assieme a (1.29), implica l'asserto. ∎

6 Connessione

Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ si dice **sconnesso** (o "non connesso") se esistono due insiemi aperti A e B tali che se $A_E := A \cap E$ e $B_E := B \cap E$ allora

$$A_E \neq \emptyset \; , \quad B_E \neq \emptyset \; , \quad A_E \cap B_E = \emptyset \; , \quad E = A_E \cup B_E \; ; \tag{1.31}$$

e diremo che A e B sconnettono E. Un insieme è **connesso** se non è sconnesso.

Osservazione 1.22 (i) Una parafrasi della definizione di insieme sconnesso è[23]:
E è sconnesso se è l'unione disgiunta di due aperti non vuoti nella topologia relativa.

(ii) Dalla definizione segue immediatamente che: *E è connesso se e solo se i soli sottoinsimei di E simultaneamente aperti e chiusi (nella topologia relativa) sono $\emptyset$ e E.*

(iii) $\mathbb{R}^n$ è ovviamente connesso. Un esempio di insieme sconnesso di $\mathbb{R}^n$ è dato da $\mathbb{Z}^n$ (basta prendere come A la sfera centrata nell'origine di raggio $1/3$ e come B l'insieme dei punti x con $|x| > 1/2$).

[23]Si ricordi la definizione di topologia relativa data al punto (d), § 1.

La connessione è un invariante topologico:

Proposizione 1.23 *Se E è connesso e f è continua su E allora $f(E)$ è connesso.*

Dimostrazione Dimostriamo l'affermazione equivalente: "$f(E)$ sconnesso $\implies$ E sconnesso". Se $f(E)$ è sconnesso esistono due aperti I e J tali che $J \cap f(E) \neq \emptyset \neq I \cap f(E)$, $I \cap J = \emptyset$ e $f(E) = f(E) \subseteq I \cup J$. Per il punto (ii), gli insiemi $A := f^{-1}(I)$ e $B := f^{-1}(J)$ sono aperti non vuoti nella topologia relativa di E ed inoltre (come è immediato verificare dalle posizioni fatte) $A \cap B = \emptyset$ e $E \subseteq A \cup B$ e dunque E è sconnesso. ∎

Un semplice criterio per verificare la connessione è basato sulla nozione di "connessione per curve".
Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ una **curva** in E è un insieme della forma

$$\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = z(t) \text{ per } a \le t \le b\} \tag{1.32}$$

dove $z \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$; i punti $z(a)$ e $z(b)$ si chiamano gli **estremi** della curva[24] Γ. Dalla Proposizione 1.23 segue che una curva è un insieme connesso.

Un esempio (banale) di curva in E è data da $\Gamma := \{x_0\}$ con $x_0 \in E$ (essendo la funzione $t \in [0,1] \to z(t) := x_0$ chiaramente continua). Esempi più interessanti sono dati da un **segmento** in $E \subseteq \mathbb{R}^n$ di estremi x e y ovvero dall'insieme

$$P(x,y) := \{z \in \mathbb{R}^n : z = x + t(y-x) \ , \ t \in [0,1]\} \ , \tag{1.33}$$

o, più in generale, da una **poligonale** di estremi x e y e "vertici successivi" $x^{(0)} := x$, $x^{(1)}$,...,$x^{(k)} := y$, ovvero dall'insieme

$$P(x^{(0)}, ..., x^{(k)}) := \bigcup_{i=1}^{k} P(x^{(i-1)}, x^{(i)}) \ . \tag{1.34}$$

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ di dice **connesso per curve** (rispettivamente, "per poligonali") se per ogni $x, y \in E$, esiste una curva (rispettivamente, "una poligonale") di estremi x e y tutta contenuta in E.

Proposizione 1.24 (i) *Un insieme di $\mathbb{R}^n$ connesso per curve è connesso.*
(ii) *Un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ connesso è connesso per poligonali.*

Per dimostrare la parte (ii) della Proposizione 1.24 avremo bisogno del seguente semplice risultato:

Lemma 1.25 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto non vuoto e sia $x \in E$. L'insieme $W_x := \{y \in E$ tale che esiste una poligonale in E di estremi x e $y\}$ è un insieme aperto.*

Dimostrazione Se $y \in W_x$ esiste una poligonale $P(x, ..., y)$ tutta contenuta in E di estremi x e y. In particolare $y \in E$. Poiché E è aperto esiste una sferetta U di centro y tutta contenuta in E. Ma per ogni $z \in U$ il segmento $P(y,z) \subseteq U$ e quindi la poligonale $P(x, ..., y, z) := P(x, ..., y) \cup P(y,z)$ è tutta contenuta in E. Questo significa che $U \subseteq W_x$ e cioè la tesi. ∎

Dimostrazione (della Proposizione 1.24) (i) Si supponga, per assurdo, che $E \subseteq \mathbb{R}^n$ sia connesso per curve e sconnesso e mostriamo che si perviene ad una contraddizione. Siano

[24] La funzione z che realizza la curva Γ viene chiamata "**cammino**"; in altri termini un cammino in $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è semplicemente una funzione $z \in C([a,b], E)$.

A e B due aperti per cui valga (1.31). Sia $x \in A_E$ e $y \in B_E$. Per ipotesi esiste una curva $\Gamma := \{z(t) : a \le t \le b\}$ tutta contenuta in E con , $z(a) = x$ e $z(b) = y$. Sia

$$I := \{\tau \ge a : \ z(t) \in A_E \ , \forall\, t \in [a,\tau]\} \qquad \text{e} \quad t_0 := \sup I \ .$$

Chiaramente $a \in I$ (e quindi $I \ne \emptyset$). Inoltre $z(t_0) \notin A$: infatti, se fosse $z(t_0) \in A$ esisterebbe una sferetta aperta $U \subseteq A$ di centro $z(t_0)$ e per la continuità di $z(t)$ in $t_0 \in [a,b]$ esisterebbe un $\delta > 0$ tale che $z(t) \in U \subseteq A$ per ogni $t \in [a,b]$ con $|t - t_0| < \delta$; ma se fosse $t_0 = b$ allora $z(b) \in A_E$ e questo contraddirrebbe l'ipotesi che $z(b) \in B_E$ e d'altra parte se $t_0 < b$ esisterebbe un $t' \in (t_0, b)$ con $z(t') \in A_E$ e questo contraddirrebbe la definizione di t_0. Quindi $z(t_0) \in \partial A_E$. Ma $z(t_0) \in E = A_E \cup B_E$ e quindi $z(t_0) \in B_E$. Essendo B un aperto esiste una sferetta V centrata in $z(t_0)$ tutta contenuta in B e, ragionando come sopra, si trova un $\delta' > 0$ tale che $z(t) \in V$ per $|t - t_0| < \delta'$. Ma allora esisterebbe un $\bar t \in (t_0 - \delta', t_0)$ per cui $z(\bar t) \in V$ e quindi $z(\bar t) \in B_E$ ma questo contraddice la definizione di t_0.

(ii) Dimostriamo l'implicazione equivalente: E aperto e non connesso per poligonali implica E sconnesso. Dire che E non è connesso per poligonali è equivalente a dire che esistono x e y in E che non possono essere gli estremi di alcuna poligonale tutta contenuta in E. Siano allora $A := W_x$ e $C := W_y$ gli insiemi dei punti unibili tramite poligonali in E, rispettivamente, a x ed a y: tali insiemi sono, per il Lemma 1.25, sottoinsiemi aperti di E. Secondo la nostra ipotesi[25] $A \cap C = \emptyset$. Sia ora $D := E \backslash (A \cup C)$. Se $D = \emptyset$ avremmo l'asserto (essendo A e C insiemi aperti disgiunti e non vuoti e $E = A \cup C$). Se D è non vuoto fissiamo $z \in D$. Poichè $D \subseteq E$ ed E è aperto, esiste una sferetta V centrata in z e tutta contenuta in E. La sfera V non può contenere punti di A o di C (altrimenti, ragionando come sopra, potremmo trovare una poligonale che unisce z con x o con y contravvenendo la definizione di D come l'insieme dei punti che non possono essere uniti tramite poligonali in E con x o con y). Ma questo significa che $V \subseteq D$ e cioè che D è aperto. Ponendo $B := C \cup D$ e definendo A_E e B_E come in (1.31) si ottiene l'asserto poiché $A \cap B = \emptyset$, $x \in A_E$, $y \in B_E$ e $E = A \cup B$. ∎

Esempio 1.26 (i) Un qualunque insieme convesso[26] di $\mathbb{R}^n$ è connesso (essendo connesso per poligonali). In particolare $\mathbb{R}^n$ *è connesso*.
(ii) *I sottoinsiemi connessi di* $\mathbb{R}$ *sono gli intervalli*[27]. Infatti, gli intervalli, essendo convessi, sono connessi; viceversa, se E non è un intervallo, allora esistono $x < z < y$ con $x, y \in E$ e $z \in E^c$, ma allora $(-\infty, z)$ e (z, ∞) sconnettono E.
(iii) L'anello $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le |x| < 2\}$ è connesso per poligonali.
(iv) La circonferenza $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| = 1\}$ è un insieme connesso (essendo connesso per curve) ma non connesso per poligonali.
(v) Sia $E_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0 \ , \ -1 \le y \le 1\}$ e $E_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x \le \frac{1}{\pi} \ , \ y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}\}$. L'insieme in $\mathbb{R}^2$ dato da $E := E_0 \cup E_1$ è connesso ma non è connesso per curve.

7 *Esercizi e complementi*

Esercizio 1.1 Si faccia vedere che le (1.25) non possono essere migliorate (ad esempio $|x|_1 \le n|x|_\infty$ non vale, in generale, se n viene sostituito da una costante α più piccola: infatti se $x = (1, 1, ..., 1)$ si ha $|x|_1 = n$ e $|x|_\infty = 1$).

[25] Se $z \in A \cap C$ significa che esistono due poligonali P e P' in E che uniscono, rispettivamente, x con z e y con z; ma allora la poligonale $P \cup P' \subseteq E$ unirebbe x e y contrariamente alla nostra ipotesi.

[26] Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se presi comunque due punti in E il segmento $P(x,y)$ che li unisce è tutto contenuto in E.

[27] Per definizione gli **intervalli** di $\mathbb{R}$ sono gli insiemi convessi di $\mathbb{R}$, ossia, sono gli insiemi E tali che se $x < y$ appartengono a E allora $\{x \le t \le y\} \subseteq E$.

Esercizio 1.2 Dimostrare in dettaglio la Proposizione 1.5.

Esercizio 1.3 Dimostrare (usando solo la definizione uniforme continuità, Definizione 1.19) che la funzione $f : x \in \mathbb{R}^n \to |x|^2$ è uniformemente continua su $B_1 \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

Esercizio 1.4 Dimostrare che se $g(t)$ è una funzione di una variabile, continua in $t_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x_1, ..., x_n) = g(x_n)$ allora $f(x)$ è continua in x_0, $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $x_{0n} = t_0$.

Esercizio 1.5 Fissato $\varepsilon > 0$, si trovi un δ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni $|x - x_0| < \delta$ nei seguenti casi:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & f = |x|^\alpha,\ \alpha > 0\ ,\ x \in \mathbb{R}^4\ ,\ x_0 = (0,1,1,2) \text{ e } x_0 = 0\ ; \\
\text{(ii)} & f = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x_1 x_3^2}\ ,\ x \in \mathbb{R}^3\ ,\ x_0 = (-1,0,-1)\ ; \\
\text{(iii)} & f = \log[\cos\big(\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i\big)]\ ,\ x \in \mathbb{R}^n\ ,\ x_0 = 0\ ; \\
\text{(iv)} & f = \displaystyle\sum_{k=0}^\infty e^{-k|x|^2}\ ,\ x \in \mathbb{R}^n\ ,\ x_0 = (1, ..., 1)\ ; \\
\text{(v)} & f = \tanh |x|_1\ ,\ x \in \mathbb{R}^n\ ,\ x_0 = (1, ..., 1)\ ; \\
\text{(vi)} & f = \Big(|x|^{3/2}\ ,\ \tanh |x|_1\Big)\ ,\ x \in \mathbb{R}^4\ ,\ x_0 = (0,1,1,2)\ .
\end{array}
$$

Esercizio 1.6 Sia $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 :\ |x| = 1\}$, $\bar{x} := (2,0,0)$, $x_0 = (1,0,0)$, $f := x_1 x_2 (\sin |x - \bar{x}|)^{-1}$. Trovare δ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni $x \in S^2$ tale che $|x - x_0| < \delta$.

Esercizio 1.7 Sia[28] $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{\pi + 2 \operatorname{Arctan}(y/x)}\ , & \text{se } x \neq 0\ , \\[2ex] \dfrac{y^2}{2\pi}\ , & \text{se } x = 0\ . \end{cases}$

(i) Si calcoli, per ogni θ fissato, il $\lim_{r\downarrow 0} f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$.
(ii) È continua f nell'origine?

Esercizio 1.8 Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}\ , & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\ , \\[2ex] 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$

(i) Discutere la limitatezza di f.
(ii) Si calcoli, fissato $(a,b) \neq (0,0)$, il $\lim_{t\downarrow 0} f(ta, tb)$.
(iii) È continua f nell'origine?

Esercizio 1.9 Sia $f(x) = x^2$ se x è irrazionale e $f(x) = 0$ altrimenti. Dimotrare che f è continua in 0 ma che, per qualunque intervallo I contenente 0, $f \notin C(I)$.

Esercizio 1.10 (i) Sia $f(x,y)$ definita nell'intorno di $(0,0)$ ed a valori in $\mathbb{R}$. Dimostrare la seguente affermazione:

Se per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ *tale che, per ogni* $0 < r < \delta$ *e per ogni* $0 \leq \theta < 2\pi$, *si ha*

$$|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)| < \varepsilon$$

allora f *è continua in* $(0,0)$.

(ii) Discutere tale risultato in connessione con l'esercizio **1.7**.

[28] $\operatorname{Arctan} 0 = 0$.

Esercizio 1.11 Si dimostri che se f e g sono due funzioni continue su $A \subseteq \mathbb{R}^n$ allora $\min\{f, g\}$ e $\max\{f, g\}$ sono funzioni continue su A.

T 1.12 Si dimostri che, nel Teorema 1.16, (b) $\Longrightarrow$ (a) direttamente [senza "passare" per (c)].

Esercizio 1.13 Si dimostri che la topologia relativa definita in (d) di § 1 sia effettivamente una topologia. Si dimostri che i chiusi della topologia relativa su E si ottengono intersecando i chiusi di X con E.

Esercizio 1.14 Dimostrare che in uno spazio metrico (X, d) la famiglia di insiemi $A \subseteq X$ tali che per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ ed una sfera $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ tutta contenuta in A forma una topologia su X.

Esercizio 1.15 Dare un esempio di una famiglia di aperti E_i e di una famiglia di chiusi C_i, con $i \in \mathbb{N}$, tali che $\bigcap E_i$ non sia un insieme aperto e $\bigcup C_i$ non sia un insieme chiuso.

Esercizio 1.16 Si dimostri che l'anello $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq |x| < 2\}$ è connesso per poligonali.

T 1.17 * Si dimostri l'affermazione fatta al punto (v) dell'Esempio 1.26.

Capitolo 2

Differenziabilità

1 Funzioni differenziabili

Definizione 2.1 *Una funzione f a valori reali e definita su di un aperto E di $\mathbb{R}^n$ si dice* **differenziabile** *nel punto $x_0 \in E$ se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0 \ . \tag{2.1}$$

Dimostriamo, a titolo d'esempio, la differenziabilità in $x_0 = (0,0)$ della funzione $f(x,y) = x^2y^3 - \operatorname{sen} x$. A tal scopo, useremo la seguente stima elementare[1]

$$\big|\operatorname{sen} t - t\big| \le c\ |t|^3 \ , \quad \forall\ |t| \le 1 \ , \qquad \text{con} \quad c := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} \ . \tag{2.2}$$

Sia $h = (h_1, h_2)$ con $|h| \le 1$ e sia $\ell := (-1, 0)$ (cosicché $df(h) = \ell \cdot h = -h_1$). Maggiorando $|h_i|$ con $|h|$, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{|r(h)|}{|h|} \quad &:= \quad \frac{\Big|f(h) - f(0) - df(h)\Big|}{|h|} := \frac{\Big|h_1^2h_2^3 - \operatorname{sen} h_1 + h_1\Big|}{|h|} \\ &\le \quad \frac{|h|^5 + |\operatorname{sen} h_1 - h_1|}{|h|} \\ &\le \quad |h|^4 + c\ |h|^2 \to 0 \qquad (\text{per}\ \ |h| \to 0) \ . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 2.2 (i) *Una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ corrisponde alla moltiplicazione scalare per un dato vettore*: infatti, sia $\{e^{(i)}\}$ la base (standard) di $\mathbb{R}^n$, sia $h := \sum_{i=1}^n h_i e^{(i)} = (h_1, ..., h_n)$ un qualunque vettore e sia ℓ il vettore definito da $\ell := \big(L(e^{(1)}), ..., L(e^{(n)})\big)$; allora dalla linearità di L segue che

$$L(h) := L(\sum_{i=1}^{n} h_i e^{(i)}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \ell_i := \ell \cdot h \ . \tag{2.3}$$

[1] Per $|t| \le 1$ si ha: $|\operatorname{sen} t - t| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big| \le |t|^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$. In effetti la costante c è più piccola di $1/5$.

(ii) Se f è differenziabile in x_0 allora esiste un'*unica* applicazione L per cui vale (2.1). Assumiamo, infatti, che ci sia un'altra applicazione lineare $L' \neq L$ per cui valga (2.1) con L' al posto di L. Allora (sottraendo una dall'altra le corrispondenti relazioni nella (2.1)), si avrà

$$\lim_{h\to 0} \frac{L(h) - L'(h)}{|h|} = 0 \ .$$

Quindi, se $\ell \neq \ell'$ sono tali che $L(h) = \ell \cdot h$ e $L'(h) = \ell' \cdot h$, $\forall\ h$, avremo anche

$$\lim_{h\to 0} (\ell - \ell') \cdot \frac{h}{|h|} = 0 \ , \tag{2.4}$$

il che implica, prendendo $h = t(\ell - \ell')$ con $t > 0$ e mandando t a zero[2] che $\ell - \ell' = 0$, ottenendo una contraddizione. ∎

(iii) Dalla definizione di limite segue che se vale (2.1) allora si ha che $\lim_{x\to x_0} f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h) = 0$ e quindi anche che $\lim_{x\to x_0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$, ossia:

Se f è differenziabile in x_0 allora f è continua on x_0.

In effetti vale un'affermazione più forte[3]: *Se f è differenziabile in x_0 allora* $f(x) - f(x_0) = O(x - x_0)$. Infatti sia $h = x - x_0$ e sia ℓ tale che $f(x_0 + h) = f(x_0) + \ell \cdot h + o(h)$. Dalle definizioni date segue che esiste $\delta > 0$ tale che $|o(h)| \le |h|$ per $|h| < \delta$ e dunque $|f(x_0 + h) - f(x_0)| \le (|\ell| + 1)|h|$ che equivale a dire $f(x) - f(x_0) = O(x - x_0)$. ∎

Il viceversa non è in generale vero come vedremo tra breve tramite esempi ossia ci sono funzioni continue in x_0 che non sono ivi differenziabili.

(iv) (*"o piccolo e O grande": notazione di E. Landau*) Dato $k \ge 0$, una funzione $h \in \mathbb{R}^n \to g(h) \in \mathbb{R}^m$ definita per $|h|$ piccoli (cioè g è definita in un intorno di 0) si dice $o(|h|^k)$ ("o piccolo di $|h|^k$ nell'intorno di zero") se $\lim_{h\to 0} |g(h)|/|h|^k = 0$; g si dice $O(|h|^k)$ se esistono $M, \delta > 0$ tali che $|g(h)| \le M|h|^k$ per ogni $|h| < \delta$; nel caso $k = 1$ spesso si omette il modulo e si scrive $o(h)$ o $O(h)$; analogamente, nel caso $n = 1$ si omette il modulo (per ogni k).
Si noti, in particolare, che $g = O(1)$ per $x \to x_0$ significa che $\lim_{x\to x_0} g = 0$ e $g = O(1)$ per $x \to x_0$ significa che g è limitata in un intorno di x_0.
Analoghe definizione si danno in un intorno di un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ o di $\pm\infty$.
Dunque, con la notazione di Landau, una funzione f è differenziabile in x_0 se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h) = o(h) \ .$$

La notazione di Landau è molto utile ma va usata con grande attenzione: ad esempio, mentre è vero che $O(h) \cdot O(h) = O(|h|^2) = o(h)$, non è vero che $o(h) = O(|h|^2)$ (ad esempio, per $h \to 0$, $|h|^{3/2} = o(h)$ ma non è vero che $|h|^{3/2} = O(|h|^2)$).
(v) L'applicazione lineare L, che dipende anche (ed in generale, in modo non lineare) da x_0, si denota di solito con df (o con df_{x_0}) e si chiama il **differenziale** della funzione f nel punto x_0.
(vi) Di solito se L è un'applicazione lineare si usa la notazione Lh al posto di $L(h)$; nel caso del differenziale df di una funzione f, per motivi estetici, si preferisce mantenere la notazione $df(h)$.
(vii) Dalla definizione di differenziabilità (e dalla linearità del limite) segue subito che se f e g sono differenziabili in x_0 allora anche la combinazione lineare $af + bg$ (con a e b numeri reali) lo è e si ha:

$$d(af + bg)_{x_0} = a df_{x_0} + b dg_{x_0} \ . \tag{2.5}$$

[2] Si ricorda che se $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, allora $\lim_{t\to 0} f(t\xi) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.
[3] Si noti che $\sqrt{|x|}$ è continua in 0 dove vale 0 ma non è vero che $\sqrt{|x|} = O(x)$.

Saranno molto utili le seguenti nozioni (in generale, più deboli) di derivabilità:

Definizione 2.3 (i) *Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con E aperto, $x_0 := (x_{01}, ..., x_{0n}) \in E$ e $1 \le i \le n$. La* **derivata parziale di f rispetto a x_i nel punto** x_0 *è (qualora esista) il valore del limite*[4]

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_{01}, ..., x_{0i} + h, ..., x_{0n}) - f(x_0)}{h} \ . \tag{2.6}$$

Tale limite verrà indicato con una delle seguenti equivalenti notazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \ , \ \partial_{x_i} f(x_0) \ , \quad f_{x_i}(x_0) \ , \quad D_i f(x_0) \ , \tag{2.7}$$

(spesso, qualora non ci sia ambiguità, si omette il punto x_0 nella notazione).
Se f ammette tutte le derivate parziali in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'elenco ordinato di tale derivate parziali forma un vettore ad n componenti che prende il nome di **gradiente** *di f (nel punto x_0) e verrà indicato con una delle seguenti equivalenti notazioni:*

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\Big) \ , \quad \partial_x f(x_0) \ , \quad \nabla f(x_0) \ , \quad f'(x_0) \ , \quad f_x(x_0) \ , \quad \mathrm{grad}\, f(x_0) \ . \tag{2.8}$$

(ii) *Sia ξ un qualunque vettore non nullo in $\mathbb{R}^n$, si definisce* **la derivata direzionale della funzione f, fatta rispetto al vettore ξ, nel punto** x_0*, il valore del limite*[5] *(qualora esista)*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\xi) - f(x_0)}{t} \ . \tag{2.9}$$

Tale limite verrà indicato con una delle seguenti equivalenti notazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0) \ , \qquad \partial_\xi f(x_0) \ , \qquad D_\xi f(x_0) \ . \tag{2.10}$$

Si noti che la derivata parziale è una derivata direzionale fatta rispetto ai versori coordinati:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e^{(i)}} \ . \tag{2.11}$$

La differenziabilità implica l'esistenza delle derivate direzionali (il viceversa è, in generale, falso):

Proposizione 2.4 *Sia E un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 \in E$. Allora f ha tutte le derivate direzionali in x_0 e per ogni vettore non nullo $\xi \in \mathbb{R}^n$ si ha:*

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot \xi = df_{x_0}(\xi) \ . \tag{2.12}$$

Dimostrazione Poiché f è differenzialbile in x_0 esiste $\ell \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0 + h) - f(x_0) = \ell \cdot h + o(h)$. Prendendo $h = t\xi$ si ottiene dunque:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + t\xi) - f(x_0)}{t} &= \frac{\ell \cdot t\xi + o(t\xi)}{t} \\ &= \ell \cdot \xi + o(t) \to \ell \cdot \xi \quad (\text{per } t \to 0 \ ) \ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

[4] Con notazione più precisa: $(x_{01}, ..., x_{0i} + h, ..., x_{0n}) = x_0 + e^{(i)}h$ dove $\{e^{(j)}\}$ denota la base ortonormale standard di $\mathbb{R}^n$, $e^{(1)} := (1, 0, ..., 0)$, $e^{(2)} := (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e^{(n)} := (0, ..., 0, 1)$.

[5] In alcuni testi, con maggiore precisione di linguaggio ma anche con una definizione più restrittiva, si definiscono derivate direzionali solo quelle fatte rispetto ad un vettore ξ di *norma unitaria* (identificando una *direzione* con un vettore ξ tale che $|\xi| = 1$).

Prendendo $\xi = e^{(i)}$, si ha, per la (2.11) che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \ell_i \ ,$$

e quindi: $\ell = \nabla f$ e $df(\xi) = \nabla f \cdot \xi$. ∎

In base a tale proposizione possiamo dire che f *è differenziabile in* x_0 *se e solo se esiste il gradiente di* f *in* x_0 *e vale*

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\Big| f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)\cdot h \Big|}{|h|} = 0 \ . \tag{2.14}$$

Osservazione 2.5 (i) Nel caso $n = 1$ la "derivata parziale rispetto a $x \in \mathbb{R}$ nel punto x_0" prende, più semplicemente, il nome di **derivata di f rispetto a x in x_0** e si denota con una delle seguenti equivalenti notazioni:

$$\frac{df}{dx}(x_0)\ , \quad f_x(x_0)\ , \quad f'(x_0)\ , \quad Df(x_0)\ . \tag{2.15}$$

Si noti che, in tal caso, l'*esistenza della derivata implica la differenziabilità* (e dunque è equivalente ad essa): infatti, usando la notazione di Landau, f derivabile in x_0 significa che,

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = o(1) \ ;$$

moltiplicando tale relazione per h otteniamo anche che $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h)$ e cioè che f è differenziabile in x_0 e $df_{x_0} = f'(x_0)$ (ossia la mappa lineare $h \to df_{x_0}(h)$ coincide con la moltiplicazione per lo scalare $f'(x_0)$).

(ii) (*Regola di Leibnitz*) Se f e g sono differenziabili in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora anche la funzioni fg lo è e si ha

$$d(fg)_{x_0} = g(x_0) df_{x_0} + f(x_0) dg_{x_0} \ . \tag{2.16}$$

Dimostrazione Denotiamo: $\Delta f := f(x_0+h) - f(x_0)$ e $\Delta g := g(x_0+h) - g(x_0)$. Poiché f e g sono differenziabili in x_0 segue che $\Delta f = df_{x_0}(h) + o(h)$, $\Delta g = dg_{x_0}(h) + o(h)$ e dal punto (iii) dell'Osservazione 2.2 si ha anche che $\Delta f = O(h)$ e $\Delta g = O(h)$ cosicché $\Delta f \Delta g = (O(|h|^2) = o(h)$. Dunque:

$$\begin{aligned} f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0) &= \Delta f \Delta g + g(x_0)\Delta f + f(x_0)\Delta g \\ &= g(x_0) df_{x_0}(h) + f(x_0) dg_{x_0}(h) + o(h) \ . \end{aligned}$$ ∎

Esempio 2.6 (i)

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|} \ . \tag{2.17}$$

(ii) [Una funzione discontinua in 0 ma con tutte le derivate parziali in 0]
Sia $\mathcal{P} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $y = x^2$ e $(x,y) \neq (0,0)\}$ e consideriamo la funzione di due variabili definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \ , & \text{se } (x,y) \notin \mathcal{P} \ , \\ \\ x^{-1} \ , & \text{se } (x,y) \in \mathcal{P} \ . \end{cases} \tag{2.18}$$

Tale funzione è ovviamente *discontinua nell'origine* $(0,0)$ (non essendo limitata in qualsiasi intorno dell'origine). Tuttavia $f(h,0) = f(0,h) = 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e quindi i limiti dei rapporti incrementali nell'origine rispetto ad x o y esistono e sono nulli:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \ . \tag{2.19}$$

(iii) (*Una funzione differenziabile*[6] *in 0 ma non continua in alcun intorno di 0*). Sia $x \in \mathbb{R}^2$ e

$$f(x) = \begin{cases} x_2^2 \ , & \text{se } x_2 \neq 0 \ , \\ 0 \ , & \text{se } x_2 = 0 \ . \end{cases} \tag{2.20}$$

Poiché $f(h,0) = 0$ e $f(0,h) = h^2$ (per $h \neq 0$) si ha che $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ per $i = 1,2$. Inoltre

$$r(\xi) = (f(\xi) - f(0) - \nabla f(0) \cdot \xi)/|\xi| = \begin{cases} \xi_1^2/|\xi| \ , & \text{se } \xi_2 \neq 0 \\ 0 \ , & \text{se } \xi_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Dunque $|r(\xi)| \leq |\xi| \to 0$ quando $\xi \to 0$ e quindi f è differenziabile in 0. Ma, per ogni $\delta > 0$, i punti $(\delta, 0)$ sono punti di discontinuità: $f(\delta,0) = 0 \neq \lim_{k\to\infty} f(\delta, 1/k) = \delta^2$.

(iv) (*Una funzione continua su* $\mathbb{R}^2$*, con tutte le derivate direzionali in* 0 *ma non differenziabile in 0*). Sia, $x \in \mathbb{R}^2$ e

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 + x_2^3}{|x|^2} \ , & \text{se } x \neq 0 \ , \\ 0 \ , & \text{se } x = 0 \ . \end{cases} \tag{2.21}$$

Per il punto (v) della Proposizione 1.13, la funzione f è continua su $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Maggiorando $|x_i|$ con $|x|$ si ha che $|f(x)| \leq 2|x| \to 0$ per $x \to 0$. Quindi $f \in C(\mathbb{R}^2)$. Si osservi che $\forall \ t \neq 0$ e $\forall \ \xi \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ si ha che $f(t\xi) = tf(\xi)$; dunque

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\xi) - f(0)}{t} = f(\xi) \ .$$

In particolare $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 1$, per $i = 1,2$. Infine, se $\xi \neq 0$,

$$g(\xi) := \frac{r(\xi)}{|\xi|} = \frac{f(\xi) - f(0) - \nabla f(0) \cdot \xi}{|\xi|} = \frac{\xi_1^3 + \xi_2^3 - (\xi_1 + \xi_2)|\xi|^2}{|\xi|^3} \ ;$$

osservando che $g(t\xi) = g(\xi)$, si vede che $g(1/k, 1/k) = (1 - \sqrt{2})/\sqrt{2}$. Quindi $g(\xi)$ non tende a 0 quando $\xi \to 0$ il che vuol dire che f non è differenziabile in 0.

(v) (*Una funzione di n variabili differenziabile in* 0*, che abbia derivate parziali continue in ogni punto con la sola eccezione di* 0 *ove le derivate parziali esistono ma non sono continue.*) Sia

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{|x|} \ , & \text{se } x \neq 0 \ , \\ 0 \ , & \text{se } x = 0 \ . \end{cases} \tag{2.22}$$

[6] Si presti attenzione a quando 0 denota lo zero (ossia l'elemento neutro dell'addizione) in $\mathbb{R}^n$, e cioè la n–pla $(0, ..., 0)$, o a quando 0 denota lo zero di $\mathbb{R}$.

Chiaramente tale funzione è continua su tutto $\mathbb{R}^n$ e le derivate parziali esistono e sono continue in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Le derivate direzionali in 0 sono nulle: se $\xi \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(t\xi)}{t} = \lim_{t\to 0} t^2 |\xi|^2 \ \text{sen} \frac{1}{|t| \ |\xi|} = 0 \ .$$

La funzione f è differenziabile in 0:

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\Big| f(0+h) - f(0) - \nabla f(0)\cdot h \Big|}{|h|} = \lim_{h\to 0} |h| \, \text{sen} \frac{1}{|h|} = 0 \ .$$

D'altra parte le derivate parziali *non sono continue in* $x = 0$. Infatti, ricordando la (2.6) e la (2.17), troviamo, per $x \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i \, \text{sen} \frac{1}{|x|} \ - \frac{x_i}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}$$

e la funzione $\dfrac{x_i}{|x|} \cos \dfrac{1}{|x|}$ non ammette limite per $x \to 0$.

2 Funzioni C^1

Il teorema del differenziale totale

Un criterio semplice per capire quando una funzione sia differenziabile è contenuto nella seguente

Proposizione 2.7 ("Teorema del differenziale totale") *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto contenente x e sia f una funzione (a valori reali) continua su E. Assumiamo che esistano le derivate parziali di f in E e che queste siano continue in x. Allora f è differenziabile in x.*

Dimostrazione Dalle ipotesi segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\rho > 0$ tale che $B_\rho(x) \subseteq E$ e

$$\Big| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Big| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \ , \qquad \forall \ y \ \text{t.c.} \ \ |y - x| < \rho \ , \quad \forall \ i \ . \tag{2.23}$$

Consideriamo dapprima il caso bidimensionale $n = 2$. Sia $\xi \in \mathbb{R}^2$ con $0 < |\xi| < \rho$, dal teorema di Lagrange per funzioni di una variabile reale[7] esistono $t_i \in (0, 1)$ tali che

$$\begin{aligned}
& f(x+\xi) - f(x) - \nabla f(x)\cdot \xi \\
&\quad = \Big(f(x+\xi) - f(x_1+\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\xi_2 \Big) + \Big(f(x_1+\xi_1, x_2) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\xi_1 \Big) \\
&\quad = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + t_1\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \Big)\xi_1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+\xi_1, x_2 + t_2\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \Big)\xi_2 \ .
\end{aligned}$$

Da tale relazione e da (2.23), segue che

$$\begin{aligned}
& |f(x+\xi) - f(x) - \nabla f(x)\cdot \xi| \\
&\quad \leq \Big| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + t_1\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \Big| |\xi_1| + \Big| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+\xi_1, x_2 + t_2\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \Big| |\xi_2| \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(|\xi_1| + |\xi_2|) \leq \varepsilon \ |\xi| \ ,
\end{aligned}$$

[7] "Se $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ e derivabile in (a, b), allora esiste $a < t < b$ tale che $f(b) - f(a) = f'(t)(b - a)$".

che è quanto volevasi dimostrare.

Nel caso generale (n arbitrario), poniamo

$$\xi^{(i)} := (\xi_1, ..., \xi_i, 0, ..., 0) \ , \qquad \xi^{(0)} := 0 \ , \tag{2.24}$$

cosicché

$$f(x+\xi) - f(x) - \nabla f(x) \cdot \xi = \sum_{i=0}^{n-1} f(x+\xi^{(i+1)}) - f(x+\xi^{(i)}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi_i \ . \tag{2.25}$$

A questo punto possiamo ripetere l'argomento usato nel caso $n = 2$. ∎

3 Derivate successive e funzioni C^k

Se $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, E aperto, ha una derivata parziale in un punto $x \in E$, diciamo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, ha senso chiedersi se tale funzione ammetta anch'essa una derivata parziale rispetto a, diciamo, x_j. In caso di risposta affermativa, si denota tale derivata con uno dei seguenti simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \ , \qquad \partial_{x_j}\partial_{x_i} f(x) \ , \qquad D_{ij} f(x) \ , \qquad f_{x_i x_j}(x) \ . \tag{2.26}$$

È naturale chiedersi quando accada che $\partial_{x_j}\partial_{x_i} f(x) = \partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x)$, ossia quando sia possibile scambiare l'ordine nel calcolo di una derivata seconda. A questo proposito sussiste la seguente fondamentale

Proposizione 2.8 ("Lemma di Schwarz") *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $x_0 \in E$, $f \in C(E, \mathbb{R})$ e $1 \le i \ne j \le n$. Assumiamo che, per ogni $x \in E$, esistano $\partial_{x_i} f(x)$, $\partial_{x_j} f(x)$, $\partial_{x_j}\partial_{x_i} f(x)$ e che $\partial_{x_j}\partial_{x_i} f(x)$ sia continua in x_0. Allora esiste anche $\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x_0)$ e si ha*

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x_0) = \partial_{x_j}\partial_{x_i} f(x_0) \ . \tag{2.27}$$

Dimostrazione Poiché le coordinate x_k con k diverso da i e j non giocano nessun ruolo, possiamo chiaramente considerare il caso di $\mathbb{R}^2$, $f = f(x, y)$ facendo corrispondere x a x_i, y a x_j e (x_0, y_0) a x_0. Sia $B_r\Big((x_0, y_0)\Big) \subseteq E$ e per $h \ne 0$, $k \ne 0$ tali che $|(h, k)| < r$, definiamo la seguente funzione

$$\alpha(h,k) = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0)}{hk} \ . \tag{2.28}$$

Per il teorema di Lagrange (nota 7 di questo capitolo) applicato alla funzione $x \to g(x) := \Big(f(x, y_0+k) - f(x, y_0)\Big)/k$, si ha che $\Big(g(x_0+h) - g(x_0)\Big)/h = g'(x_0+th)$ con $0 < t < 1$, ovvero

$$\alpha(h,k) = \frac{\partial_x f(x_0+th, y_0+k) - \partial_x f(x_0+th, y_0)}{k} \ .$$

Applicando ancora il teorema di Lagrange a tale relazione[8], si ha che esiste $0 < s < 1$ tale che

$$\alpha(h,k) = \partial_y\partial_x f(x_0+th, y_0+sk) \ . \tag{2.29}$$

[8] Si osservi che, poiché $\partial_y\partial_x f$ esiste in tutti i punti di E, la funzione $y \to \frac{\partial_x f(x_0+th, y)}{k}$ è continua sull'intervallo chiuso di estremi y_0 e $y_0 + k$.

D'altra parte, poiché $\partial_y \partial_x f$ è continua in (x_0, y_0), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|(h, k)| < \delta$

$$|\partial_y \partial_x f(x_0 + h, y_0 + k) - \partial_y \partial_x f(x_0, y_0)| < \varepsilon \ . \tag{2.30}$$

Dunque se $|(h, k)| < \min(\delta, r)$ (ed essendo $0 < s, t < 1$), dalla (2.30) e dalla (2.29) segue che

$$|\alpha(h, k) - \partial_y \partial_x f(x_0, y_0)| < \varepsilon \ .$$

Prendendo il limite per $k \to 0$ in tale relazione (per ipotesi $\partial_y f(x, y)$ esiste per ogni $(x, y) \in E$) si ha che, per ogni $0 < |h| < \min(\delta, r)$,

$$\Big| \frac{\partial_y f(x_0 + h, y_0) - \partial_y f(x_0, y_0)}{h} - \partial_y \partial_x f(x_0, y_0) \Big| < \varepsilon \ ;$$

ma questo significa che esiste $\partial_x \partial_y f(x_0, y_0)$ e che coincide con $\partial_y \partial_x f(x_0, y_0)$. ∎

Naturalmente, tale risultato si estende in maniera ovvia a tutte le derivate di ordine superiore ad uno e se f è una funzione che ha tutte le derivate parziali di ordine $p \geq 2$ continue nell'intorno di un punto $x \in \mathbb{R}^n$, una qualunque **derivata parziale di ordine** k con $k \leq p$ definita da

$$[\partial_{x_{i_1}} \partial_{x_{i_2}} \cdots \partial_{x_{i_k}} f](x) \tag{2.31}$$

coinciderà, per il lemma di Schwarz, con

$$[\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f](x) \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k \ , \tag{2.32}$$

dove α_i è il numero di volte che la derivata parziale ∂_{x_i} appare in (2.31) e naturalmente

$$\partial_{x_i}^h := \partial_{x_i} \cdots \partial_{x_i} \qquad (h \text{ volte}) \ . \tag{2.33}$$

(La scrittura in (2.32) significa che si calcolano prima le α_n derivate rispetto a x_n, poi le α_{n-1} derivate rispetto a x_{n-1} e così via). La derivata parziale di ordine k in (2.32) si denota anche

$$\frac{\partial^k f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}}(x) \ , \qquad \partial_x^\alpha f(x) \ , \qquad \partial^\alpha f(x) \ , \qquad D^\alpha f(x) \ , \tag{2.34}$$

dove α è il vettore $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Definizione 2.9 *Dato un qualunque insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ed un intero positivo p, una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ si dirà di classe $C^p(E)$ [o, più precisamente, $C^p(E, \mathbb{R})$] se esiste un insieme aperto $A \supseteq E$ tale che tutte le derivate parziali di ordine k con $k \leq p$ esistono e sono continue in A; $C^\infty(E)$ [o, più precisamente, $C^\infty(E, \mathbb{R})$], come al solito, è dato da $\cap_{p \geq 0} C^p(E)$.*

Naturalmento se E è aperto si prenderà $A = E$.

Esempio 2.10 (i) Se $f(x, y) = x^2 y^3$ abbiamo che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e, ad esempio,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) = 12xy \ , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) = 24 \ ,$$

e, se a, b sono interi positivi tali che $a + b > 5$ si ha

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^a \partial y^b}(x, y) = 0 \ .$$

(ii) Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - y^3x}{x^2+y^2}\ , & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ \\ 0\ , & \text{se } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases} \tag{2.35}$$

La funzione f è omogenea[9] di grado 2 ed è quindi continua in $\mathbb{R}^n$ (vedi complemento 2.5). Infatti $f \in C^1(\mathbb{R})$: per ogni $h \in \mathbb{R}$, $f(h,0) = 0 = f(0,h)$ e dunque $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$; inoltre per ogni $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} - 2x\ \frac{x^3y - y^3x}{(x^2+y^2)^2}\ , \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} - 2y\ \frac{x^3y - y^3x}{(x^2+y^2)^2}\ , \end{aligned} \tag{2.36}$$

e tali funzioni sono omogenee di grado 1 e quindi tendono a zero per $|(x,y)| \to 0$. Però

$$\frac{f_x(0,h)}{h} = -1\ , \qquad \frac{f_y(h,0)}{h} = 1\ , \tag{2.37}$$

e dunque $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. D'altra parte, come è facile controllare, le derivate seconde miste sono omogenee di grado 0 (e non identicamente costanti) e quindi non sono continue in $(0,0)$.

4 Differenziali e derivate di funzioni vettoriali

In questa sezione estendiamo la nozione di differenziabilità a funzioni vettoriali e dimostreremo che la composizione di funzioni differenziabili è differenziabile e che la composizione di funzioni C^r è C^r.

Differenziale e derivate di funzioni vettoriali

Le nozioni di differenziabilità e di derivabilità si estendono facilmente alla situazione di funzioni vettoriali:

Definizione 2.11 *Una funzione f a valori in $\mathbb{R}^m$ e definita su di un aperto E di $\mathbb{R}^n$ si dice* **differenziabile** *nel punto $x_0 \in E$ se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che, per tutti i vettori $h \in \mathbb{R}^n$ sufficientemente piccoli, si abbia*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + r(h)\ , \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0\ . \tag{2.38}$$

L'applicazione lineare L (che dipende dal punto x_0) si denota anche con df o più precisamente con df_{x_0} e si chiama il **differenziale** *della funzione f nel punto x_0.*

Naturalmente, ora, all'applicazione lineare df corrisponde una (unica) matrice[10] $(m \times n)$: tale matrice prende il nome di **matrice jacobiana** (o "jacobiano") della funzione f nel punto x_0.

[9] Una funzione $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice **omogenea** di grado p se $f(tx) = t^p f(x)$ per ogni $t > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

[10] Ripetendo un ragionamento del tutto analogo a quello usato nell'osservazione 2.2, si dimostra che ad ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, fissate le basi ortonormali standard, corrisponde una ed una sola matrice, che denoteremo con A_L, tale che $L(\xi) = A\xi$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^m$. Tale matrice ha elementi dati da $(A_L)_{ij} = \left(L(e^{(j)})\right)_i$. Infatti $((L(\xi))_i = (L(\sum_{k=1}^n \xi_k e^{(k)}))_i = (\sum_{k=1}^n \xi_k (L(e^{(k)}))_i = (A_L\xi)_i$.

Se denotiamo con J_{f,x_0} (o, qualora non vi sia ambiguità, con con J_f o semplicemente con J) tale matrice, sappiamo che i suoi elementi di matrice J_{ij} (corrispondenti alla i–esima riga ed alla j–esima colonna) non sono altro che la i–esima componente del vettore $df_{x_0}(e^{(j)})$, dove $e^{(j)}$, come al solito, denota il j–esimo versore della base ortonormale standard in $\mathbb{R}^n$. Dunque prendendo la i–esima componente della relazione (2.1) e ponendo $h = te^{(j)}$, si ottiene

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_i(x_0 + te^{(j)}) - f_i(x_0)}{t} = \Big(df_{x_0}(e^{(j)})\Big)_i \ , \tag{2.39}$$

ovvero *la matrice jacobiana non è altro che la matrice delle derivate parziali di* f:

$$\Big(J_{f,x_0}\Big)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \ . \tag{2.40}$$

Tale matrice $(m \times n)$ si denota anche con uno dei seguenti simboli equivalenti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \ , \quad \partial_x f \ , \quad f_x \ , \quad f'(x_0) \ . \tag{2.41}$$

Diamo, ora, la seguente nozione di derivabilità per funzioni vettoriali.

Definizione 2.12 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : E \to \mathbb{R}^m$ e sia $r \in \mathbb{N}$ oppure $r = \infty$. Diremo che f è di classe C^r, ovvero che $f \in C^r(E)$ (o più precisamente che $f \in C^r(E, \mathbb{R}^m)$) se*[11] *$f_i \in C^r(E)$, per ogni $1 \le i \le m$.*

Osservazione 2.13 (i) Con ragionamenti analoghi a quelli usati nella dimostrazione del punto (i) della Proposizione 1.10, si vede subito che

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ($A$ aperto), è differenziabile in $x_0 \in A$ se e solo sono differenziabili in x_0 le m funzioni $f_1, ..., f_m$.

(ii) Dalla Proposizione 2.7 segue che

Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e se[12] *$f \in C^1(\{x_0\}, \mathbb{R}^m)$ allora f è differenziabile in x_0.*

Differenziale e derivata di funzioni composte

Proposizione 2.14 *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^m$ due insiemi aperti; siano*[13] *$f \in C(A, B)$ e $g \in C(B, \mathbb{R}^p)$; sia $x_0 \in A$ e $y_0 := f(x_0) \in B$. Se f è differenziabile in x_0 e g è differenziabile in y_0 allora $g \circ f$ è differenziabile in x_0 e si ha*

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{y_0} \circ df_{x_0} \ , \qquad J_{g\circ f,x_0} = J_{g,y_0}\ J_{f,x_0} \ . \tag{2.42}$$

Si noti che la relazione in (2.42) può scriversi anche

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(y_0)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \ , \ \text{ovvero} \quad \frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(y_0)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0) \ , (\forall\ i,j); \tag{2.43}$$

(il membro di sinistra della prima uguaglianza è una matrice $(p \times n)$ ed il membro di destra è il prodotto di una matrice $(p \times m)$ e di una matrice $(m \times n)$).

[11] Si ricordi la definizione 2.9.

[12] Questo significa che esiste un intorno di x_0 su cui sono definite e continue tutte le derivate parziali delle m funzioni f_i.

[13] $f \in C(A, B)$ significa che $f \in C(A, \mathbb{R}^m)$ e che $f(A) \subseteq B$.

Dimostrazione Dalle ipotesi segue che esistono due funzioni definite in un intorno dell'origine, r_f e r_g, a valori, rispettivamente, in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^p$, tali che, per $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\eta \in \mathbb{R}^m$ sufficientemente piccoli si ha

$$\begin{aligned} f(x_0+\xi) &= f(x_0) + df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi) \ , \quad \lim_{\xi\to 0} \frac{|r_f(\xi)|}{|\xi|} = 0 \ , \\ g(y_0+\eta) &= g(y_0) + dg_{y_0}(\eta) + r_g(\eta) \ , \quad \lim_{\eta\to 0} \frac{|r_g(\eta)|}{|\eta|} = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.44}$$

Quindi, ricordando che la differenziabilità di f in x_0 ne implica la continuità, osserviamo che

$$\lim_{\xi\to 0} \Big| df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi) \Big| = \lim_{\xi\to 0} \Big| f(x_0+\xi) - f(x_0) \Big| = 0 \ ,$$

cioè che il vettore $\eta := df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi)$ è piccolo se ξ è piccolo e da (2.44) segue che

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x_0+\xi) &= g\Big(f(x_0+\xi)\Big) = g\Big(y_0 + df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi)\Big) \\ &= g(y_0) + dg_{y_0}\Big(df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi)\Big) + r_g\Big(df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi)\Big) \\ &:= g(y_0) + \Big(dg_{y_0}\circ df_{x_0}\Big)(\xi) + r_{g\circ f}(\xi) \ , \end{aligned}$$

avendo posto, per definizione,

$$r_{g\circ f}(\xi) := dg_{y_0}(r_f(\xi)) + r_g(df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi)) \ .$$

Bisogna dunque dimostrare che

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{|r_{g\circ f}(\xi)|}{|\xi|} = 0 \ . \tag{2.45}$$

Da (2.44) e dalla continuità[14] (e linearità) di dg segue che

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{|dg_{y_0}(r_f(\xi))|}{|\xi|} = \lim_{\xi\to 0} \Big| dg_{y_0}\Big(\frac{r_f(\xi)}{|\xi|}\Big)\Big| = 0 \ ;$$

e quindi (2.45) seguirà da

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{|r_g(df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi))|}{|\xi|} = 0 \ . \tag{2.46}$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario e sia[15] $a := 1 + \|J_{g,y_0}\| + \|J_{f,x_0}\|$. Allora, per (2.44), esiste $\rho > 0$ tale che

$$|r_g(\eta)| < \frac{\varepsilon}{a}\,|\eta| \ , \qquad \forall\ |\eta| < \rho \ . \tag{2.47}$$

Poiché $|r_f(\xi)|/|\xi|$ e $|df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi)|$ tendono a zero quando $\xi \to 0$, per $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \rho$, esisteranno δ_1, d_2 positivi tale che

$$|r_f(\xi)| < |\xi| \ , \qquad |df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi)| < \rho \ , \quad \forall\ |\xi| < \delta := \min(\delta_1, \delta_2) \ . \tag{2.48}$$

[14] Se A è una matrice $(m \times n)$, allora l'applicazione $\xi \in \mathbb{R}^n \to A\xi \in \mathbb{R}^m$ è chiaramente continua; da questo e dalla univoca associazione di un'applicazione lineare L con la matrice A_L (nota 10 di questo capitolo), segue che ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua su $\mathbb{R}^n$.

[15] Se A è una matrice $(m \times n)$ e se si definisce $\|A\| := \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n : |\xi|=1} |A\xi|$ allora $|A\xi| \le \|A\||\xi|\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$ (come segue immediatamente dividendo tale relazione per $|\xi|$ e dalla definizione di $\|A\|$). Inoltre tale estremo superiore, per il teorema di Weierstrass, è un massimo.

Allora, da (2.47) (con $\eta = df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi)$), da (2.48) e dalla definizione di a segue che

$$\begin{aligned} |r_g(df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi))| &< \frac{\varepsilon}{a}\ |df_{x_0}(\xi) + r_f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{a}\Big(\|J_{f,x_0}\|\ |\xi| + |\xi|\Big) \\ &= \frac{\varepsilon}{a}\Big(\|J_{f,x_0}\| + 1\Big)|\xi|\ \le \varepsilon|\xi|\ , \qquad \forall\ |\xi| < \min(\delta,\rho)\ , \end{aligned}$$

il che è equivalente a (2.46) e conclude la dimostrazione della differenziabilità di $g \circ f$ in x_0 e della prima delle relazioni in (2.42); la seconda relazione in (2.42) è un fatto elementare di algebra lineare[16]. $\blacksquare$

Osservazione 2.15 (i) (Un caso speciale) Poiché in una dimensione "derivabilità" e "differenziabilità" coincidono, dire che $f \in C((a,b),\mathbb{R}^m)$ è differenziabile in $t_0 \in (a,b)$ equivale a dire che le m funzioni f_i sono derivabili in t_0. Se $B \subseteq \mathbb{R}^m$ è aperto e se $f \in C((a,b),B)$ è differeziabile in t_0 e $g \in C(B,\mathbb{R})$ è differenziabile in $y_0 := f(t_0)$, dalla Proposizione 2.14 e da (2.43) segue che la funzione $t \in (a,b) \to g \circ f(t)$ è derivabile in t_0 e si ha

$$\frac{d(g \circ f)}{dt}(t_0) = \nabla g(y_0) \cdot f'(t_0) \tag{2.49}$$

ove $f'(t_0)$ denota (naturalmente) $(f_1'(t_0), ..., f_m'(t_0))$.
Ad esempio, se $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile in (x_0, y_0) e se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, con $h(x_0) = y_0$, allora la funzione di una variabile $x \to g(x, h(x))$ è derivabile in x_0 e

$$\frac{d}{dx}\ g(x,h(x))|_{x_0} = g_x(x_0,y_0) + h'(x_0)g_y(x_0,y_0)\ .$$

Tale formula segue dalla (2.49) con $f(t) := (x_0 + t, h(x_0 + t))$.
(ii) Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^m$ e se $f \in C^1(A,B)$ e $g \in C^1(B,\mathbb{R}^p)$ allora (per il punto (ii) dell'Osservazione 2.13) f e g sono differenziabili in ogni punto di, rispettivamente, A e B. Dunque dalla Proposizione 2.14 segue che $g \circ f$ è differenziabile su A e vale (2.43) per ogni $x_0 \in A$. Ma poiché la somma e il prodotto di funzioni continue è continua, (2.43) implica che tutte le derivate parziali $\dfrac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}$ sono continue in A, il che può essere riassunto dicendo che
Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(A,B)$ e $g \in C^1(B,\mathbb{R}^p)$ allora $g \circ f \in C^1(A,\mathbb{R}^p)$.

La generalizzazione del punto (ii) della precedente osservazione si generalizza immediatamente. Vale infatti la seguente

Proposizione 2.16 *Sia $r \in \mathbb{N}$ o $r = \infty$. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $f \in C^r(A,B)$ e $g \in C^r(B,\mathbb{R}^p)$ allora $g \circ f \in C^r(A,\mathbb{R}^p)$.*

Dimostrazione Dimostriamo l'asserto per induzione su r. I casi $r = 0$ e $r = 1$ corrispondono, rispettivamente, al punto (v) della Proposizione 1.13 e al punto (ii) dell'Osservazione 2.15. Sia $r \ge 2$ ed assumiamo l'asserto vero per $0, 1, ..., r-1$. Per il punto (ii) dell'Osservazione 2.15 (e poiché $r > 1$) la funzione $g \circ f \in C^1(A,\mathbb{R}^p)$ e, per differenziabilità, vale la formula (2.43) su A, cioè che

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\Big(f(x)\Big)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)\ , \quad \forall\ x \in A,\ \forall\ i, j\ .$$

[16] Se $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\beta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ sono applicazioni lineari e se A_α e A_β denotano le rispettive matrici associate (rispetto alle basi ortonormali standard) allora, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, $A_{\beta\circ\alpha}(\xi) = \beta \circ \alpha(\xi) = \beta(\alpha(\xi)) = \beta(A_\alpha \xi) = A_\beta(A_\alpha \xi) = (A_\beta A_\alpha)\xi$, ovvero $A_{\beta\circ\alpha} = A_\beta A_\alpha$.

Ma $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_k}\Big(f(x)\Big)$ è la composizione di una funzione $C^{r-1}(B)$ con f che è una funzione $C^r(A)$ (e quindi $C^{r-1}(A)$); dunque, per l'ipotesi induttiva, $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_k}\Big(f(x)\Big)$ è $C^{r-1}(A)$. Anche $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$ è una funzione $C^{r-1}(A)$ e poiché il prodotto di due funzioni C^k è (chiaramente) C^k segue che le funzioni $\dfrac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}$ sono funzioni $C^{r-1}(A)$ il che equivale a dire che $g\circ f \in C^r(A,\mathbb{R}^p)$. ∎

5 *Esercizi e complementi*

Esercizio 2.1 Si controlli che, per la funzione f definita in (2.18), si ha $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = 0$ per ogni $\xi \neq 0$.

Esercizio 2.2 Calcolare $\dfrac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_i}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ e $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.3 Si calcoli $\frac{\partial f}{\partial x}$ nei seguenti casi:

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} \quad f = \cos(xy) - z^3\ ; & \text{(ii)}\ f = e^{-|x|^2}(1 + x_1x_3)\ , \quad (x\in\mathbb{R}^3)\ ; \\
\text{(iii)} \quad f = \Big(\tanh\Big(\dfrac{x_1}{x_2}\Big)\ ,\ x_1x_2^3\ ,\ |x|\Big)\ , \quad (x\in\mathbb{R}^2)\ ; & \\
\text{(iv)} \quad f = (x_1, x_1x_2, ..., x_1\cdots x_n)\ ; & \text{(v)}\ f = \Big(e^{|x|^3}\ ,\ (\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i)^3\Big)\ .
\end{array}$$

Esercizio 2.4 Si dimostri che se c è la costante in (2.2) allora $c < 1/5$.

C 2.5 (Funzioni omogenee)

Una funzione $f : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ si dice "omogenea" (o "positivamente omogenea") di grado $\alpha\in\mathbb{R}$ se

$$f(tx) = t^\alpha f(x)\ , \quad \forall\ t > 0\ , \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\ . \tag{2.50}$$

Proposizione 2.17 *Si consideri una funzione omogenea f di grado α continua su $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Se $\alpha \le 0$, f non può essere estesa ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^n$ a meno che $\alpha = 0$ e f sia identicamente costante. Se $\alpha > 0$, f è estendibile ad una funzione continua con $f(0) = 0$.*

Dimostrazione Se $\alpha < 0$ e se $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, si ha $\lim_{t\to 0}|f(tx)| = \lim_{t\to0}|t|^\alpha|f(x)| = \infty$ e quindi f non è estendibile ad una funzione continua. La funzione $f(x) := c$ è chiaramente omogenea di grado 0 ed è continua. Se f è omogenea di grado 0 e non è identicamente costante, significa che esistono $x_0 \neq y_0$ (x_0 e y_0 non nulli) tali che $f(x_0) \neq f(y_0)$. Ma allora le due successioni $x^{(k)} := \frac{1}{k}x_0$ e $y^{(k)} := \frac{1}{k}y_0$ tendono a zero, ma

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = \lim f(\frac{1}{k}x_0) = f(x_0) \neq f(y_0) = \lim_{k\to\infty} f(y^{(k)})\ ,$$

e quindi f non è estendibile con continuità in 0. Infine se $\alpha > 0$ e se estendiamo f in 0 ponendo $f(0) := 0$, la funzione così ottenuta è continua poiché se $x \neq 0$

$$|f(x)| = \Big|f\Big(|x|\frac{x}{|x|}\Big)\Big| = |x|^\alpha\Big|f\Big(\frac{x}{|x|}\Big)\Big| \le M|x|^\alpha \to 0\ (|x|\to 0)\ ,$$

dove $M = \max_{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1}|f(x)|$. ∎

Proposizione 2.18 ("Teorema di Eulero") *Sia $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ una funzione omogenea di grado α, sia $x \neq 0$ e sia $\xi := \frac{x}{|x|}$. Allora esiste $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x)$ e risulta*

$$|x| \frac{\partial f}{\partial \xi}(x) = \alpha f(x) \ . \tag{2.51}$$

Inoltre se $f \in C^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \mathbb{R})$ allora risulta

$$|x| \frac{\partial f}{\partial \xi}(x) = x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x) \ . \tag{2.52}$$

Dimostrazione Osserviamo innanzitutto che se assumiamo la (2.51), allora la (2.52) deriva immediatamente da (2.12). Per dimostrare la (2.51), usiamo la definizione di derivata direzionale, quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \xi}(x) \quad &:= \quad \lim_{t \to 0} \frac{f\Big(x + t\frac{x}{|x|}\Big) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\Big((1 + \frac{t}{|x|})x\Big) - f(x)}{t} \\
&= \quad f(x) \lim_{t \to 0} \frac{\Big((1 + \frac{t}{|x|})^\alpha - 1\Big)}{t} = \alpha \frac{f(x)}{|x|} \ . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposizione 2.19 *Sia f una funzione omogenea di grado α che ammetta derivate parziali su $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Allora, per ogni i, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ risulta omogenea di grado $\alpha - 1$.*

Dimostrazione Sia $t > 0$ e $x \neq 0$. Usando la definizione di derivata parziale

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \quad &:= \quad \lim_{h \to 0} \frac{f\Big(tx + he^{(i)}\Big) - f(tx)}{h} = \lim_{h \to 0} t^\alpha \frac{\Big(f(x + \frac{h}{t}e^{(i)}) - f(x)\Big)}{h} \\
&= \quad t^{\alpha - 1} \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x + \rho e^{(i)}) - f(x)}{\rho} = t^{\alpha - 1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \ . \quad \text{Dove } \rho := \frac{h}{t} \ . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Esercizio 2.6 Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x^2 + y^2|^{\delta/2}} & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Per α,β e δ in $\mathbb{R}$, trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché: (i) f sia continua nell'origine; (ii) f abbia derivate direzionali nell'origine; (iii) f sia differenziabile nell'origine; (iv) f sia $C^1(\{0\})$.

Esercizio 2.7 * Ripetere l'Esercizio **2.6** con le funzioni $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ così definite:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x_1 \dots x_n|^\alpha}{|x|^\beta} & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad , \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{|x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n}}{|x|^\beta} & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{se } x = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 2.8 Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{sen}(x_1 e^{x_2 + x_3}) \ , \qquad \varphi(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, t)$$

Scrivere $f \circ \varphi$; calcolarne la derivata in $t = 0$ in maniera diretta e applicando la regola di derivazione per funzioni composte.

Capitolo 3

Integrale di Riemann

1 Definizioni

1.1 Si ricorda che un **intervallo** di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ ossia un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che se $x, y \in I$ allora $(1-t)x+ty \in I$ per ogni $0 \le t \le 1$; se un intervallo è limitato superiormente (inferiormente) chiameremo $\sup I$ $(\inf I)$ il suo estremo destro (sinistro). Se un intervallo I è limitato e $a < b$ sono i suoi estremi, chiamiamo lunghezza o misura di I il numero non negativo $(b-a)$.

In generale, un **rettangolo** in $\mathbb{R}^n$ è il prodotto cartesiano di n intervalli. Esempi di rettangoli in $\mathbb{R}^2$ sono:

$$\begin{aligned}
&[0,1]^2 := [0,1] \times [0,1] := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\} \ ; \\
&[-\pi, \pi) \times (-1, +\infty) := \{x \in \mathbb{R}^2 : -\pi \le x_1 < \pi, x_2 > -1\} \ ; \\
&[0,1] \times \{3\} := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 1, x_2 = 3\} \ .
\end{aligned}$$

L'ultimo esempio è "degenere" nel senso che uno dei "lati" del rettangolo è formato dal solo punto $\{3\} = [3,3]$. Normalmente consideremo *rettangoli chiusi, limitati e non degeneri*, ovvero insiemi della forma

$$E := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \ , \qquad \text{con} \quad -\infty < a_i < b_i < \infty \ ; \tag{3.1}$$

per brevità, in questo capitolo, chiameremo tali insiemi **rettangoli standard**. Se $n \ge 2$, il termine *faccia* del rettangolo $E = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, sta ad indicare uno dei $2n$ rettangoli $(n-1)$–dimensionali che formano la frontiera di E: per ogni j tra 1 ed n vi sono due facce opposte date da

$$\begin{aligned}
&\{a_j\} \times \prod_{i \ne j} [a_i, b_i] := \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = a_j, \ a_i \le x_i \le b_i \ , \forall i \ne j\} \ , \text{e da} \\
&\{b_j\} \times \prod_{i \ne j} [a_i, b_i] := \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = b_j, \ a_i \le x_i \le b_i \ , \forall i \ne j\} \ .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

1.2 Dato un rettangolo limitato qualunque $E = I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo la **misura di** E (o, più precisamente, la *misura n–dimensionale di E*) come il prodotto delle lunghezze degli intervalli unidimensionali I_i; cioè se gli estremi di I_i sono $a_i \le b_i$, definiamo la misura di E come

$$\mathrm{mis_n}\, E := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \ ; \tag{3.3}$$

normalmente, quando non vi sia ambiguità, ometteremo l'indice n dal simbolo $\mathrm{mis_n}$, e denoteremo semplicemente $\mathrm{mis}\, E$ la misura n–dimensionale del rettangolo n–dimensionale E. Si noti che la misura di $E = I_1 \times \cdots \times I_n$ non dipende dal fatto che gli intervalli I_i siano aperti o chiusi a sinistra o destra; inoltre non abbiamo escluso, in tale definizione, i rettangoli degeneri, i quali, secondo (3.3), *hanno misura uguale a* 0. In particolare le facce di un rettangolo n–dimensionale, e cioè uno degli insiemi descritti in (3.2), hanno misura n–dimensionale nulla. Si noti anche che l'insieme vuoto è un particolare rettangolo (aperto e con tutti i lati degeneri $a_i = b_i$ per ogni i) dunque, per definizione, *la misura dell'insieme vuoto è uguale a* 0.

1.3 E rettangolo standard in $\mathbb{R}^n$. Una **partizione** di E è una n–nupla $P := (P_1, ..., P_n)$ dove ogni P_i è una collezione finita di punti distinti di $[a_i, b_i]$ che contenga gli estremi a_i e b_i; cioè[1]

$$P = (P_1, ..., P_n) \quad \text{con} \quad P_i = \{\xi_0^{(i)} = a_i < \xi_1^{(i)} < \cdots < \xi_{N_i}^{(i)} := b_i\} \; ; \tag{3.4}$$

con $N_i \geq 1$.

1.4 I **rettangoli di una partizione** $P = (P_1, ..., P_n)$ di un rettangolo standard $E \subseteq \mathbb{R}^n$ sono i rettangoli chiusi prodotto cartesiano di intervalli i cui estremi sono due punti consecutivi di P_i; in altre parole, se P è come in (3.4), i rettangoli di P sono gli $N_1 \cdot N_2 \cdots N_n$ rettangoli standard della forma

$$R_j := R_{(j_1,...,j_n)} := [\xi_{j_1-1}^{(1)}, \xi_{j_1}^{(1)}] \times \cdots \times [\xi_{j_n-1}^{(n)}, \xi_{j_n}^{(n)}] \tag{3.5}$$

dove j_i è un numero intero compreso tra 1 e N_i. L'insieme dei rettangoli di una partizione P del rettangolo E verrà denotato con il simbolo $\mathscr{R}(P)$.

Dimostriamo ora che, come ci si aspetta, data una qualunque partizione P di E si ha

$$\sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \mathrm{mis}\, R = \mathrm{mis}\, E \; . \tag{3.6}$$

Infatti, considerando per semplicità il caso $n = 2$, se $P = (P_1, P_2)$ con P_i come in (3.4), si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \mathrm{mis}\, R &= \sum_{j=(j_1,j_2)} \mathrm{mis}\, R_j \\
&= \sum_{j_1,j_2} (\xi_{j_1}^{(1)} - \xi_{j_1-1}^{(1)})(\xi_{j_2}^{(2)} - \xi_{j_2-1}^{(2)}) \\
&= \Big(\sum_{j_1} (\xi_{j_1}^{(1)} - \xi_{j_1-1}^{(1)})\Big) \Big(\sum_{j_2} (\xi_{j_2}^{(2)} - \xi_{j_2-1}^{(2)})\Big) \\
&= (\xi_{N_1}^{(1)} - \xi_0^{(1)})(\xi_{N_2}^{(2)} - \xi_0^{(2)}) \\
&= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \\
&=: \mathrm{mis}\, R \; ,
\end{aligned}$$

essendo le somme unidimensionali somme "telescopiche". ∎

Si ricorda che dato un qualunque insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce il "diametro di A (rispetto alla norma euclidea)" la quantità[2]

$$\mathrm{diam}\, A := \sup_{x,y \in A} |x - y| \; . \tag{3.7}$$

[1] Di norma, gli elementi di P_i vengono elencati in ordine crescente.
[2] Qui, come al solito, $|\cdot|$ denota la norma euclidea.

Se P è una partizione di E chiamiamo **diametro di** P la quantità

$$\operatorname{diam} P := \sup_{R \in \mathscr{R}(P)} \operatorname{diam} R \ . \tag{3.8}$$

1.5 Se $P = (P_1, ..., P_n)$ e $P' = (P'_1, ..., P'_n)$ sono partizioni di E, diremo che $P \subseteq P'$ se , per ogni i, $P_i \subseteq P'_i$; in tal caso, diremo che P' è un **raffinamento** di P.
Chiaramente, *se P' è un raffinamento di P, ogni rettangolo R' di P' è interamente contenuto in un rettangolo R di P e ogni rettangolo R di P è dato dall'unione di tutti i rettangoli di P' contenuti in R.*
Date due partizioni di E, $P' = (P'_1, ..., P'_n)$ e $P'' = (P''_1, ..., P''_n)$, definiamo la **partizione unione** di P' e P'', $P := P' \cup P''$, la partizione $P := (P_1, ..., P_n)$ con P_i formato dall'unione di tutti i punti di P'_i e P''_i. In particolare,

$$P' \subseteq P' \cup P'' \ , \qquad P'' \subseteq P' \cup P'' \tag{3.9}$$

qualunque siano le partizioni P' e P''.

1.6 Sia E un rettangolo standard di $\mathbb{R}^n$. Un insieme $R \subseteq E$ si dice **elementare** se è l'unione finita di rettangoli $R_i \subseteq E$ chiusi tali che $\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$. Chiaramente se P è una partizione di E l'unione di una qualunque sottofamiglia di rettangoli di $\mathscr{R}(P)$ è un insieme elementare.

1.7 Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata (cioè $\sup_E |f| < \infty$). Data un partizione P di E si definiscono **somma inferiore** e **somma superiore** di f su E rispetto a P i numeri

$$\begin{aligned} \underline{S}_E(f, P) &:= \sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \big(\inf_{x \in R} f(x) \big) \ \operatorname{mis} R \ , \\ \overline{S}_E(f, P) &:= \sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \big(\sup_{x \in R} f(x) \big) \ \operatorname{mis} R \ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dalle definizioni date segue che se $P \subseteq P'$

$$-\infty < \operatorname{mis} E \inf_E f \leq \underline{S}_E(f, P) \leq \underline{S}_E(f, P') \leq \overline{S}_E(f, P') \leq \overline{S}_E(f, P) \leq \operatorname{mis} E \sup_E f < \infty \ . \tag{3.11}$$

Si definiscono, rispettivamente, **integrale inferiore e integrale superiore di Riemann** di f su E le quantità

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_E(f) &:= \sup_{\{P\}} \underline{S}_E(f, P) \ , \\ \overline{\sigma}_E(f) &:= \inf_{\{P\}} \overline{S}_E(f, P) \end{aligned} \tag{3.12}$$

dove, come sopra, l'estremo superiore è preso su tutte le partizioni di E. Chiaramente[3]

$$-\infty < \sup_{\{P\}} \underline{S}_E(f, P) \leq \inf_{\{P\}} \overline{S}_E(f, P) < \infty \ . \tag{3.13}$$

[3] Si osservi che se P e P' sono due partizioni di E allora $\underline{S}_E(f, P) \leq \underline{S}_E(f, P \cup P') \leq \overline{S}_E(f, P \cup P') \leq \overline{S}_E(f, P')$, ovvero "le classi dei numeri delle somme inferiori e superiori sono separate".

Si dice che la funzione f è **integrabile (secondo Riemann)** su E se in (3.13) vale il segno di uguaglianza e chiameremo, in tal caso, **l'integrale di Riemann** di f su E tale numero:

$$\int_E f := \underline{\sigma}_E(f) = \overline{\sigma}_E(f)) \ . \tag{3.14}$$

Si usano anche le seguenti notazioni equivalenti

$$\int_E f := \int_E f(x)dx := \int_E f(x)dx_1 \cdots dx_n := \int_E f(y)dy_1 \cdots dy_n \ .$$

1.8 Data una partizione P di E, chiamiamo un **ricoprimento disgiunto di** E (o più brevemente, un ricoprimento di E) una famiglia di rettangoli a due a due disgiunti $\widehat{\mathscr{R}}(P)$ tali che

$$R \in \widehat{\mathscr{R}}(P) \implies \begin{cases} \overline{R} \in \mathscr{R}(P) \\ \displaystyle\bigcup_{R \in \widehat{\mathscr{R}}(P)} R = E \ . \end{cases} \tag{3.15}$$

Ad ogni partizione (3.4) si può associare un ricoprimento standard di E, $\widehat{\mathscr{R}}(P) = \{R_j\}$ ponendo

$$R_j = [\xi^{(1)}_{j_1-1}, \xi^{(1)}_{j_1}) \times \cdots \times [\xi^{(n)}_{j_n-1}, \xi^{(n)}_{j_n}) \tag{3.16}$$

se $j_i < N_i$ per ogni i, e se $j_i = N_i$ per qualche i, l'intervallo $[\xi^{(i)}_{j_i-1}, \xi^{(i)}_{j_i})$ in (3.16) viene sostituito con $[\xi^{(i)}_{N_i-1}, \xi^{(i)}_{N_i}]$.
Una **funzione a scalini** $s : E \to \mathbb{R}$ è una funzione della forma

$$s(x) = \sum_{R \in \widehat{\mathscr{R}}(P)} c_R \chi_R(x) \tag{3.17}$$

dove $\widehat{\mathscr{R}}(P)$ è un ricoprimento di E, c_R sono numeri reali e χ_R denota la funzione caratteristica[4] di R.

1.9 Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, P una partizione di E e $B \subseteq E$. Denotiamo con $\mathscr{R}_B(P)$ e $\mathscr{R}'_B(P)$ i seguenti insiemi di rettangoli di $\mathscr{R}(P)$:

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_B(P) &:= \{R \in \mathscr{R}(P) : \ R \cap B \neq \emptyset\} \ , \\ \mathscr{R}'_B(P) &:= \{R \in \mathscr{R}(P) : \ R \subseteq B\} \ . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Sia P' un raffinamento di P. Ricordando che ogni rettangolo R di $\mathcal{R}(P)$ è dato dall'unione dei rettangoli di $\mathcal{R}(P')$ contenuti in R si ha che

$$\begin{aligned} \sum_{R \in \mathscr{R}'_B(P)} \operatorname{mis} R &\leq \sum_{R \in \mathscr{R}'_B(P')} \operatorname{mis} R \ , \\ \sum_{R \in \mathscr{R}_B(P')} \operatorname{mis} R &\leq \sum_{R \in \mathscr{R}_B(P)} \operatorname{mis} R \ . \end{aligned} \tag{3.19}$$

[4] Si ricorda che, se B è un qualunque insieme, χ_B denota la funzione caratteristica (o indicatrice) di B ovvero la funzione che vale 1 su ogni punto di B e zero altrimenti.

Da tali relazioni segue subito che, se P e P' sono due partizioni arbitrarie di E,

$$\sum_{R\in\mathscr{R}'_B(P)} \operatorname{mis} R \le \sum_{R\in\mathscr{R}'_B(P\cup P')} \operatorname{mis} R \le \sum_{R\in\mathscr{R}_B(P\cup P')} \operatorname{mis} R \le \sum_{R\in\mathscr{R}_B(P')} \operatorname{mis} R \ . \tag{3.20}$$

Si definiscono, rispettivamente, la **misura interna** e la **misura esterna** (secondo Peano–Jordan) di B le quantità

$$\operatorname{mis\,int} B := \sup_{\{P\}} \sum_{R\in\mathscr{R}'_B(P)} \operatorname{mis} R \ , \quad \operatorname{mis\,est} B := \inf_{\{P\}} \sum_{R\in\mathscr{R}_B(P)} \operatorname{mis} R \ , \tag{3.21}$$

dove gli estremi inferiori e superiori sono presi su tutte le partizioni P di E. Da (3.20), segue che

$$0 \le \operatorname{mis\,int} B \le \operatorname{mis\,est} B \le \operatorname{mis} E \ . \tag{3.22}$$

L'insieme B si dice **misurabile** secondo Peano–Jordan se $\operatorname{mis\,int} B = \operatorname{mis\,est} B$ e tale comune valore viene chiamato la **misura di Peano–Jordan** di B e si denota con $\operatorname{mis_n} B$ o $\operatorname{mis} B$.

1.10 Sia $B \subseteq E$ un insieme misurabile e $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Definiamo la funzione f_B come la funzione che coincide con f su B e vale 0 fuori di B. Diremo che f **è integrabile su** B se la funzione f_B è integrabile su E e *definiamo* l'integrale di f su B come l'integrale di f_B su E:

$$\int_B f dx := \int_E f_B dx \ .$$

Data una partizione P di E chiameremo una **scelta di punti** di B associati alla partizione P un insieme della forma $Q := \{x_R : R \in \mathscr{R}(P)\}$ dove, per ogni $R \in \mathscr{R}(P)$, x_R è un punto di $R \cap B$. Data una partizione P ed una scelta di punti Q di B, si definisce la **somma parziale di Riemann** di f su B relativa a P e Q il numero

$$S_B(f,P,Q) := \sum_{R\in\mathscr{R}'_B(P)} f(x_R) \operatorname{mis} R \ . \tag{3.23}$$

1.11 La teoria dell'integrazione di Riemann è intimamente connessa alla nozione di continuità. Vedremo in seguito, infatti, che *le funzioni integrabili secondo Riemann coincidono con le funzioni che non hanno "troppi" punti di discontinuità*. Metteremo ora in evidenza, dal punto di vista formale, alcune connessioni tra integrabilità e continuità. Per far ciò introduciamo la nozione di "oscillazione".

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto o la chiusura di un aperto tale che $D \cap A \neq \emptyset$; si definisce l'**oscillazione di** f **sull'insieme** D la quantità

$$\operatorname{osc}(f,D) := \sup_{D\cap A} f - \inf_{D\cap A} f \ . \tag{3.24}$$

Se $x \in A$ si definisce l'**oscillazione di** f **in** x la quantità

$$\operatorname{osc}(f,x) := \inf_{\delta>0} \operatorname{osc}(f,B_\delta(x)) := \inf_{\delta>0} \Big(\sup_{y\in A:|y-x|<\delta} f(y) - \inf_{y\in A:|y-x|<\delta} f(y) \Big) \ . \tag{3.25}$$

Dunque, *la continuità di* f *in* x *è equivalente a: per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che* $\operatorname{osc}(f,B_\delta(x)) < \varepsilon$; o anche: f *è continua in* x *se e solo se* $\operatorname{osc}(f,x) = 0$. D'altra parte, *l'integrabilità di* f *su* E *è equivalente a: per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una partizione* P *di* E *tale che*

$$\sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \operatorname{osc}(f,R) \operatorname{mis} R \le \varepsilon \ . \tag{3.26}$$

1.12 *Una funzione limitata* $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *si dice* **continua a tratti** *se* $B = \bigcup_{i=1}^N B_i$ *con* $B_i \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabili e tali che* $\mathring{B}_i \cap \mathring{B}_j = \emptyset$ *per* $i \neq j$ *e se* f *è continua su* $\mathring{B}_i$ *per ogni* i.

2 Proprietà elementari

Discutiamo brevemente alcune proprietà elementari, ma fondamentali, dell'integrale di Riemann e della misura di Peano–Jordan.

In questo paragrafo E denota un rettangolo standard in $\mathbb{R}^n$, f, g funzioni limitate da E in $\mathbb{R}$ e B un sottoinsieme di E.

2.1 *f è integrabile su E se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P di E tale che*

$$\begin{aligned}\overline{S}_E(f,P) - \underline{S}_E(f,P) &= \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \big(\sup_R f - \inf_R f\big) \operatorname{mis} R \\ &= \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \big(\sup_{x,y\in R} |f(x)-f(y)|\big) \operatorname{mis} R \\ &\le \varepsilon \ .\end{aligned} \tag{3.27}$$

Dimostrazione Innanzitutto si osservi che, in generale, si ha che

$$\sup_B f - \inf_B f = \sup_{x,y\in B} |f(x)-f(y)| \tag{3.28}$$

per *qualunque* B e $f : B \to \mathbb{R}$. Infatti, per ogni $x', y' \in B$ si ha che

$$f(x') - f(y') \le |f(x') - f(y')| \le \sup_{x,y\in B} |f(x)-f(y)|$$

e prendendo l'estremo superiore su x' e su y' si ha che

$$\sup_B f - \inf_B f \le \sup_{x,y\in B} |f(x)-f(y)| \ .$$

Viceversa, per ogni $x, y \in B$,

$$\inf_B f - \sup_B f \le f(x) - f(y) \le \sup_B f - \inf_B f$$

che implica che $|(fx) - f(y)| \le \sup_B f - \inf_B f$ e prendendo l'estremo superiore su $x, y \in B$ si ottiene anche che

$$\sup_{x,y\in B} |f(x)-f(y)| \le \sup_B f - \inf_B f \ ,$$

e quindi, la validità di (3.28), che a sua volta implica la seconda uguaglianza in (3.27).

La (3.27) implica immediatamente l'integrabilità di f su E. Viceversa, se f è integrabile, dato $\varepsilon > 0$, esistono due partizioni P' e P'' di E tali che

$$0 \le \overline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P'') \le \varepsilon \ ,$$

e se poniamo $P = P' \cup P''$, da (3.11) segue che

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P'') \le \varepsilon$$

ossia la (3.27). ∎

2.2 *B è misurabile se e solo se χ_B è integrabile su E.*

Dimostrazione Sia P una partizione di E e si osservi che, per ogni $R \in \mathscr{R}(P)$,

$$\inf_R \chi_B = \begin{cases} 1\ , & \text{se } R \subseteq B \\ 0\ , & \text{altrimenti} \end{cases} \quad , \qquad \sup_R \chi_B = \begin{cases} 1\ , & \text{se } R \cap B \neq \emptyset \\ 0\ , & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \underline{S}_E(\chi_B, P) &= \sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \inf_R \chi_B \,\text{mis}\, R = \sum_{R \in \mathscr{R}'_B(P)} \text{mis}\, R \\ \overline{S}_E(\chi_B, P) &= \sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \sup_R \chi_B \,\text{mis}\, R = \sum_{R \in \mathscr{R}_B(P)} \text{mis}\, R \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente l'asserto. ∎

2.3 *B è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P tale che*

$$\sum_{R \in \mathscr{R}_B \setminus \mathscr{R}'_B} \text{mis}\, R \leq \varepsilon\ , \tag{3.29}$$

dove $\mathscr{R}_B := \mathscr{R}_B(P)$ e $\mathscr{R}'_B := \mathscr{R}'_B(P)$.

Dimostrazione Segue subito da 2.1 e 2.2. ∎

2.4 *Se f integrabile su B, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una partizione P tale che per ogni scelta di punti Q su B relativa a P si ha*

$$\Big| \int_B f(x)dx - S_B(f, P, Q) \Big| \leq \varepsilon\ . \tag{3.30}$$

In particolare[5]*, esistono partizioni P_k tai che per ogni scelta di punti Q_k su B relativa a P_k si ha*

$$\lim_{k\to\infty} S_B(f, P_k, Q_k) = \int_B f(x)dx\ . \tag{3.31}$$

Dimostrazione Segue subito da 2.1, 2.3 e dalle definizioni 1.7 e 1.10. ∎

2.5 *Siano f e g due funzioni integrabili su E.*

(i) *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la funzione $af + bg$ è integrabile su E e si ha*

$$\int_E (af + bg) = a \int_E f + b \int_E g\ . \tag{3.32}$$

(ii) *fg è integrabile su E.*

[5] Si scelga, ad esempio, $\varepsilon = 1/k$ in (3.30).

Dimostrazione (i): Si osservi che $\sup_{x,y\in R}|af(x)-af(y)| = |a|\sup_{x,y\in R}|f(x)-f(y)|$ e quindi, da 2.1, segue l'integrabilità di af; analogamente l'integrabilità di $f+g$ segue osservando che

$$\sup_{x,y\in R}|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \le \sup_{x,y\in R}|f(x)-f(y)| + \sup_{x,y\in R}|g(x)-g(y)|$$

ed invocando nuovamente 2.1. La (3.32) segue osservando che le somme parziali di Riemann $S_E(\cdot, P, Q)$ (cfr. (3.23)) sono lineari[6] ed usando la 2.4.
(ii): Poiché f e g sono integrabili sono limitate, quindi esiste $M>0$ tale che $\sup_E|f|\le M$ e $\sup_E|g|\le M$. Per ogni x, y si ha che

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\le |f(x)|\,|g(x)-g(y)| + |g(y)|\,|f(x)-f(y)| \\ &\le M\Big(|f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|\Big) \end{aligned}$$

e l'integrabilità di fg segue, ancora, da 2.1. ∎

2.6 (i) *Se $f\ge 0$ è integrabile, allora* $\int_E f \ge 0$.
(ii) *Se $f\ge g$ sono integrabili allora* $\int_E f \ge \int_E g$.
(iii) *Una funzione f è integrabile su E se e solo se*[7] *f_+ e f_- sono integrabili su E.*
(iv) *Se f è integrabile su E, allora $|f|$ è integrabile su E e*

$$\Big|\int_E f\Big| \le \int_E |f| \ . \tag{3.35}$$

Dimostrazione (i) segue da (3.31) e (ii) da $f-g\ge 0$, da (3.32) e da (i).
(iii): Si osservi che[8] $|f_\pm(x)-f_\pm(y)|\le |f(x)-f(y)|$; dunque, se f è integrabile, per 2.1, si ha che anche f_+ e f_- sono integrabili. Viceversa se $f_\pm$ sono integrabili, l'integrabilità di f segue da lla relazione $f=f_+-f_+$ e da 2.5-(i).
(iv): $|f|=f_++f_-$ e da 2.5-(i) segue l'integrabilità di $|f|$ e (3.35) segue da

$$\Big|\int_E f\Big| = \Big|\int_E f_+ - \int_E f_-\Big| \le \int_E f_+ + \int_E f_- = \int_E |f| \ . \quad \blacksquare$$

2.7 L'integrale di Riemann è "invariante per traslazioni":
Sia B è un insieme misurabile, $x_0\in\mathbb{R}^n$ e $x\to\tau(x) := x_0+x$ una traslazione. Allora[9] *$\tau(B)$ è misurabile e se f è integrabile su $\tau(B)$ allora $f\circ\tau$ è integrabile su B e*

$$\int_{\tau(B)} f(y)\ dy = \int_B f\circ\tau(x)\ dx \ . \tag{3.36}$$

In particolare (prendendo $f := 1$) si ha che $\mathrm{mis}(\tau(B)) = \mathrm{mis}(B)$.

---

[6] Cioè $S_E(af+bg,P,Q) = aS_E(f,P,Q)+bS_E(g,P,Q)$ per ogni a, b, f, g, P e Q.
[7] Data una funzione $f: A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ si chiamano, rispettivamente, parte positiva e parte negativa di f, le funzioni

$$f_+(x) = \max\{f(x),0\}\ , \qquad f_-(x) = -\min\{f(x),0\} = \max\{-f(x),0\}\ . \tag{3.33}$$

Si noti che f_+ e f_- sono ambedue funzioni non negative e che

$$f = f_+ - f_-\ , \qquad |f| = f_+ + f_-\ . \tag{3.34}$$

[8] Se $f(x)f(y)\ge 0$, vale l'uguaglianza; se, ad esempio $f(x)>0>f(y)$ il membro di sinistra è uguale a $f(x)$ e il membro di destra a $f(x)-f(y) = f(x)+|f(y)|$; il caso f_- segue osservando che $f_- = (-f)_+$.
[9] $\tau(B) = x_0+B = \{y : y = x_0+x \text{ con } x\in B\}$.

Dimostrazione Basta osservare che il traslato $\tau(R)$ di un rettangolo è un rettangolo e quindi che se P è una partizione di $E \supseteq B$, $x_0 + P$ è una partizione di $\tau(E) \supseteq \tau(B)$. La (3.36) segue, ad esempio, da (3.31). $\blacksquare$

2.8 *Se A e B sono misurabili allora:*
(i) *$A \cap B$ e $A \cup B$ sono misurabili;*
(ii) $\text{mis}(A \cup B) \le \text{mis}\, A + \text{mis}\, B$*;*
se $\text{mis}(A \cap B) = 0$ *allora* $\text{mis}(A \cup B) = \text{mis}\, A + \text{mis}\, B$*;*
(iii) *se $A \subseteq B$,* $\text{mis}(B \backslash A) = \text{mis}\, B - \text{mis}\, A$*;*
(iv) *se f è integrabile su A e su B lo è anche su $A \cup B$ e se* $\text{mis}(A \cap B) = 0$ *allora*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f \ . \tag{3.37}$$

Dimostrazione Segue subito da 2.2 e 2.5 osservando che

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B \ , \qquad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} \ . \quad \blacksquare \tag{3.38}$$

2.9 (i) *L'intersezione finita di rettangoli è un rettangolo.*
(ii) *L'unione finita di rettangoli chiusi è un insieme elementare*[10]*.*
(iii) *Gli insiemi elementari sono misurabili.*

Dimostrazione (i): Segue dal fatto che che l'intersezione di due intervalli è un intervallo.
(ii): Diamo la dimostrazione nel caso $n = 2$ (il caso generale è del tutto analogo). Siano $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ rettangoli in $E = [a, b] \times [c, d]$ con $1 \le k \le N$ e sia P_1 la partizione di $[a, b]$ che contiene tutti gli a_k e b_k e P_2 la partizione di $[c, d]$ che contiene tutti i c_k e d_k e $P = (P_1, P_2)$. Se $\mathscr{R}_* = \{R \in \mathscr{R}(P) : R \subseteq \cup R_k\}$ allora $\cup R_k = \cup_{R \in \mathscr{R}_*} R$, il che mostra che $\cup R_k$ è un insieme elementare.
(iii): Segue dal punto (i) di 2.8. $\blacksquare$

2.10 *Dato un rettangolo limitato chiuso R ed $\varepsilon > 0$ esistono N cubi chiusi $K_i \subseteq R$ tali che:*
(i) $\mathring{K}_i \cap \mathring{K}_j = \emptyset$*, per ogni $i \ne j$;*
(ii) $\text{mis}\, \Big(R \backslash \bigcup_{i=1}^{N} K_i \Big) \le \varepsilon$*.*

Dimostrazione Sia $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, sia $L = \max(b_i - a_i)$ e $\delta = \varepsilon/(2^n L^{n-1})$, $P_i = \{a_i, a_i + \delta, ..., a_i + m_i\delta, b_i\}$ con $a_i + m_i\delta \le b_i < a_i + (m_i + 1)\delta$ (cioè $m_i = (b_i - a_i)/\delta$). Allora i K_i della tesi saranno tutti i rettangoli di $\mathscr{R}(P)$ che hanno tutti i lati di lunghezza δ (ossia lati della forma $[a_i + jd, a_i + (j + 1)\delta]$ con $j \le m_i - 1$): infatti $\text{mis}\, \Big(R \backslash \bigcup_{i=1}^{N} K_i \Big) \le n\delta L^{n-1} = \varepsilon$. $\blacksquare$

2.11 (i) *B è misurabile se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due insiemi misurabili A e C tali che $A \subseteq B \subseteq C$ e* $\text{mis}\, C - \text{mis}\, A \le \varepsilon$*.*
(ii) *B è misurabile se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due insiemi elementari A e C tali che $A \subseteq B \subseteq C$ e* $\text{mis}\, C - \text{mis}\, A \le \varepsilon$*; tali insiemi elementari possono essere scelti come unione di cubi K_i tali che $\mathring{K}_i \cap \mathring{K}_j = \emptyset$.*
(iii) Se $\text{mis}\,\text{est}\, B = 0$ *allora B è misurabile e* $\text{mis}\, B = 0$.

[10]Cfr. 1.6.

Dimostrazione (i): Se B è misurabile, dato ε sia P come in (3.29) e si prenda $A := \cup_{R \in \mathscr{R}'_B(P)} R$ e $C := \cup_{R \in \mathscr{R}_B(P)} R$.
Viceversa, si scelga una partizione P tale che $\sum_{R \in \mathscr{R}'_A} \operatorname{mis} R \geq \operatorname{mis} A - \varepsilon$ e $\sum_{R \in \mathscr{R}_C} \operatorname{mis} R \leq \operatorname{mis} C + \varepsilon$ e si usi 2.3.
(ii): Il "se" deriva dal punto (i) (poiché gli insiemi elementari sono misurabili). Il "solo se" deriva dalla dimostrazione di (i) (poiché gli insiemi scelti nella dimostrazione nel "solo se" di (i) sono elementari). L'ultima affermazione segue facilmente da 2.10.
(iii) Segue da (i) prendendo $A = \emptyset$ e dalla definizione di misura esterna. ∎

2.12 (i) *Se B è misurabile lo sono anche $\overline{B}$, $\mathring{B}$ e ∂B. Inoltre*

$$\operatorname{mis} \overline{B} = \operatorname{mis} \mathring{B} = \operatorname{mis} B \ . \tag{3.39}$$

(ii) *B è misurabile se e solo se B è limitato, ∂B è misurabile e* $\operatorname{mis} \partial B = 0$.

Dimostrazione (i): La misurabilità di $\overline{B}$ e $\mathring{B}$ e la (3.39) seguono da 2.11–(i) prendendo $A := \bigcup_{R \in \mathscr{R}'_B} \mathring{R}$ e $C := \bigcup_{R \in \mathscr{R}_B} R$.
(ii): Assumiamo che B sia limitato, ∂B misurabile e $\operatorname{mis} \partial B = 0$. Sia E un rettangolo standard che contiene $\overline{B}$ (e quindi ∂B). Poiché $\operatorname{mis} \partial B = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P di E tale che $\partial B \subseteq \displaystyle\bigcup_{R \in \mathscr{R}_{\partial B}} R$ e $\displaystyle\sum_{R \in R \in \mathscr{R}_{\partial B}} \operatorname{mis} R \leq \varepsilon$. Se $R \in \mathscr{R}$ non interseca ∂B allora o $R \subseteq \mathring{B}$ oppure $R \subseteq E \backslash \overline{B}$.
Quindi, $\mathscr{R}_B = \mathscr{R}_{\partial B} \cup \mathscr{R}'_B$, che implica (3.29).
Il viceversa segue dal punto (i). ∎

2.13 *Sia $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme che ha misura nulla*[11] *e A un sottoinsieme limitato in $\mathbb{R}^m$. Allora $Q \times A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ è misurabile e* $\operatorname{mis}_{n+m} Q \times A = 0$.

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$ e sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme elementare tale che $D \supseteq Q$ e $\operatorname{mis}_n D \leq \varepsilon$. Poiché A è limitato, esiste $L > 0$ tale che $A \subseteq [-L, L]^m$. Allora $D \times [-L, L]^m$ è un insieme elementare di misura non superiore a $L^m \varepsilon$. Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. ∎

2.14 *Sia $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione uniformemente Lipschitziana con costante di Lipschitz $L > 0$ rispetto alla norma del sup*[12]*, allora*
(i) *per ogni $B \subseteq E$ misurabile* $\operatorname{mis\,est}_m F(B) \leq L^m \operatorname{mis}_n B$.
(ii) *se Q ha misura nulla allora* $\operatorname{mis}_m F(Q) = 0$.
(iii) *Se $m > n$, allora* $\operatorname{mis}_m F(B) = 0$.

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$ e sia $D \subseteq E$ un insieme elementare unione di cubi K_i tali che $\mathring{K}_i \cap \mathring{K}_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e tale che $B \subseteq D$ e $\operatorname{mis}_n D - \operatorname{mis}_n B \leq \varepsilon / L^m$ (cfr. 2.11–(ii)). Sia $x^{(i)}$ e r_i, rispettivamente il centro ed il lato di K_i: $K_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^{(i)}| \leq r_i/2\}$. Per ipotesi, $|F(x) - F(x^{(i)})| \leq L|x - x^{(i)}|$ il che implica che $F(K_i)$ è un sottoinsieme del cubo m–dimensionale K'_i di centro $F(x^{(i)})$ e lato Lr_i e tale cubo ha misura $(Lr_i)^m = L^m \operatorname{mis}_n K_i$. Quindi, poiché l'immagine dell'unione coincide con l'unione delle immagini, segue che

$$F(B) \subseteq F(D) = \bigcup_i F(K_i) \subseteq \bigcup_i K'_i$$

[11] Ossia Q è misurabile secondo Peano–Jordan e $\operatorname{mis}_n Q = 0$.
[12] Ossia, esiste $L > 0$ tale che $|F(x) - F(y)| \leq L|y - x|$ per ogni $x, y \in E$ e $|\cdot| = |\cdot|_\infty$.

e quindi

$$\operatorname{mis\,est}_m F(B) \le \sum_i \operatorname{mis}_m K_i' = L^m \sum_i \operatorname{mis}_n K_i = L^m \operatorname{mis}_n D \le L^m \operatorname{mis}_n B + \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $\operatorname{mis\,est}_m F(B) \le L^m \operatorname{mis}_n B$.
(ii) segue immediatamente da (i) e da 2.11-(iii).
(iii) Sia $\widehat{B} := B\times[0,1]^{m-n} \subseteq \mathbb{R}^m$ e sia $\hat{F}$ l'estensione di F a $\widehat{B}$ ponendo, per ogni $(x,y) \in Q\times[0,1]^{m-n}$, $\hat{F}(x,y) = F(x)$. Chiaramente $\hat{F}$ è Lipshitziana su $\widehat{B}$ e $\hat{F}(\widehat{B}) = F(B)$. Poiché $\operatorname{mis}_m \widehat{B} = 0$ (per 2.13) da (ii) segue che $\operatorname{mis}_m F(B) = 0$. ∎

I punti (ii) e (iii) non valgono, in generale, se assumiamo F semplicemente continua: in E **3.5** di fine sezione viene dato un esempio (la cosiddetta "curva di Peano") di una funzione continua $F : I := [0,1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la cui immagine sia tutto il cubo unitario $[0,1]^2$ e quindi trasforma il segmento I che ha misura (bidimensionale) nulla, nel cubo (quadrato) unitario che ha misura (bidimensionale) uguale ad uno.

2.15 (i) *Se* $s = \sum_{R\in\widehat{\mathscr{R}}(P)} c_R\chi_R$ *è una funzione a scalini (cfr. 1.8), allora s è integrabile e*

$$\int s = \sum_{R\in\widehat{\mathscr{R}}(P)} c_R \operatorname{mis} R\ . \tag{3.40}$$

(ii) *f è integrabile su E se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due funzioni a scalini su E , $s_1(x)$ e $s_2(x)$, tali che*

$$s_1(x) \le f(x) \le s_2(x)\ , \qquad \forall\ x \in E\ , \qquad \text{e} \quad \int_E \Big(s_2 - s_1\Big) \ \le \varepsilon\ ; \tag{3.41}$$

tali funzioni possono essere espresse intermini dello stesso ricoprimento disgiunto di E.
(iii) *f è integrabile su E se e solo se esistono due funzioni integrabili su E, g_1 e g_2 tali che*

$$g_1(x) \le f(x) \le g_2(x)\ , \qquad \forall\ x \in E\ , \qquad \text{e} \quad \int_E \Big(g_2 - g_1\Big) \ \le \varepsilon\ ; \tag{3.42}$$

Dimostrazione (i): Un rettangolo limitato è misurabile e la sua misura è l'integrale della sua funzione caratteristica; dunque da 2.6 e 2.5 segue la tesi.
(ii): Sia f integrabile ed $\varepsilon > 0$. Sia P una partizione come in (3.27) e sia $\widehat{\mathscr{R}}(P)$ un qualunque ricoprimeno disgiunto associato a P. Chiaramente, per ogni $R \in \widehat{\mathscr{R}}$, si ha $\sup_R f - \inf_R f \le \sup_{\overline{R}} f - \inf_{\overline{R}} f$ e quindi se $\bar{c}_R = \sup_R f$, $\underline{c}_R = \inf_R f$, $s_2 = \sum_{R\in\widehat{\mathscr{R}}} \bar{c}_R\chi_R$ e $s_1 = \sum_{R\in\widehat{\mathscr{R}}} \underline{c}_R\chi_R$, segue la (3.41).
Assumiamo, ora, che valga la (3.41). Prendendo la partizione unione P associata alle due rappresentazioni si ottiene subito che s_1 e s_2 possono essere espresse in termini dello stesso ricoprimento disgiunto di E associato ad una stessa partizione P come in (3.4). Sia $0 < \delta < \min_{i,j}(\xi^{(i)}_{j+1} - \xi^{(i)}_j)/2$ e consideriamo la partizione $P^\delta = (P^\delta_1, .., P^\delta_n)$ con $P^\delta_i = \{\xi^{(i)}_0, \xi^{(i)}_0 + \delta, \xi^{(i)}_1 - \delta, \xi^{(i)}_1, \xi^{(i)}_1 + \delta, ...\}$. I rettangoli di $\mathscr{R}()P^\delta)$ si suddividono in due famiglie: la prima, $\mathscr{R}_1$, formata da rettangoli R contenuti all'interno di un rettangolo di $\mathscr{R}(P$ ed una seconda famiglia, $\mathscr{R}_2$, formata da rettangoli in cui almeno un lato ha misura δ. Si osservi che se $R \in \mathcal{R}_1$, $\sup_R f - \inf_R f \le \sup_R s_2 - \inf_R s_1$ e che, quindi,

$$\sum_{R\in\mathscr{R}_1} \sup_R f - \inf_R f \operatorname{mis} R \le \sum_{R\in\mathscr{R}_1} \sup_R s_2 - \inf_R s_1 \operatorname{mis} R \le \sum_{R\in\mathscr{R}} \sup_R s_2 - \inf_R s_1 \operatorname{mis} R \le \varepsilon\ .$$

D'altra parte, esiste una costante $c >$ indipendente da δ, tale che $\sum_{R\in\mathcal{R}_2} \operatorname{mis} R < c\delta$. Dall'arbitrarietà di δ segue l'asserto.
(iii) Deriva facilmente dai punti (ii) e (i) precedenti. ∎

2.16 *Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata su di un insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^n$ allora f è integrabile su A.*

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$ e sia E un rettangolo standard contenente A e sia P una partizione di E per cui valga (3.29) con $B = A$. Poiché f è continua sul compatto $K := \bigcup_{R \in \mathscr{R}'_A} R \subseteq A$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ per ogni coppia di punti x e x' in K con $|x - x'| \leq \delta$. Sia P' un raffinamento di P di diametro non superiore a δ e chiamiamo $\mathscr{R}_1$ i rettangoli di $\mathscr{R}(P')$ che appartengono a K e $\mathscr{R}_2 := \mathscr{R}_A(P') \backslash \mathscr{R}_1$. Chiaramente da (3.29) segue che $\sum_{R \in \mathscr{R}_2} \operatorname{mis} R \leq \varepsilon$ e che $\operatorname{osc}(f_A, R) := \operatorname{osc}(f, R) \leq \varepsilon$ per ogni $R \in \mathscr{R}_1$. Dunque

$$\sum_{R \in \mathscr{R}(P')} \operatorname{osc}(f_A, R) \operatorname{mis} R \leq 2 \sup_A |f| \sum_{R \in \mathscr{R}_2} \operatorname{mis} R + \varepsilon \sum_{R \in \mathscr{R}_1} \operatorname{mis} R \leq \varepsilon (2 \sup_A |f| + \operatorname{mis} A).$$

Da 1.11 e dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. ∎

2.17 *Sia $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente Lipschitziana con costante di Lipschitz $L > 0$ rispetto alla norma del sup. Allora, per ogni $\delta > 0$, per ogni partizione P di E con $\operatorname{diam} P \leq \delta$ e per ogni scelta di punti Q relativa a P si ha*[13]

$$\Big| \int_E f(x)\ dx - S(f, P, Q) \Big| \leq \delta\ L\ \operatorname{mis} E\ . \tag{3.43}$$

Dimostrazione Segue subito osservando che se il diametro della partizione P è minore di δ, l'oscillazione di F su un rettangolo qualunque della partizione è minore di $L\delta$. ∎

2.18 *Se $f : B = \bigcup_i B_i \to \mathbb{R}$ è continua a tratti (cfr. 1.12), allora f è integrabile su B e*

$$\int_B f = \sum_{i=1}^N \int_{\mathring{B}_i} f\ .$$

Dimostrazione Da 2.12 segue che B è misurabile e che (essendo $\operatorname{mis} \partial B_i = 0$ per ogni i) $\operatorname{mis} B = \sum_{i=1}^N \operatorname{mis} B_i$; da 2.16 segue la tesi. ∎

3 Integrali iterati

La seguente proposizione, di fondamentale importanza nella pratica, permette, sotto opportune ipotesi sul dominio di integrazione, di ridurre il calcolo di un integrale n–dimensionale (ovvero di una funzione di n variabili) al calcolo successivo di un integrale unidimensionale e di un integrale $(n-1)$–dimensionale.

Proposizione 3.1 *Sia $n \geq 2$ e $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un insieme misurabile; siano α e β due funzioni integrabili su A e sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme definito come*

$$B := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} :\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}\ . \tag{3.44}$$

[13] Questa formula è alla base del calcolo approssimato (con un semplice controllo dell'errore) degli integrali di funzioni regolari su rettangoli.

Allora: (i) *B è misurabile e*

$$\text{mis}\, B = \int_A \Big(\beta(x) - \alpha(x)\Big) dx \ . \tag{3.45}$$

(ii) *Se f è una funzione integrabile su B e $y \to f(x,y)$ è integrabile su $[\alpha(x), \beta(x)]$ per ogni $x \in A$ allora la funzione*

$$g(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\ dy \tag{3.46}$$

è integrabile su A e, (iii),

$$\int_B f \ = \ \int_A g := \int_A \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\ dy \Big) dx \ . \tag{3.47}$$

Osservazione 3.2 (i) Un insieme B della forma (3.44) prende il nome di **insieme normale** rispetto all'asse delle[14] y; nel caso A sia misurabile e le funzioni α e β siano continue e limitate su A l'insieme B si dice C^0–normale. Ovviamente un rettangolo E è normale (rispetto a qualunque asse e le funzioni α e β sono costanti).
(ii) Un caso assai importante nelle applicazioni è quando α, β e f sono continue e limitate (rispettivamente su A e su B): in tal caso infatti, per 2.16, le ipotesi della Proposizione 3.1 sono soddisfatte.
(iii) È chiaro che se α, β e f sono continue e limitate (su A e su B) e se A è a sua volta un insieme C^0–normale in $\mathbb{R}^{n-1}$ la proposizione può essere riapplicata. Possiamo quindi costruire induttivamente la classe degli in insiemi C^0–normali in $\mathbb{R}^n$, denotata con $\mathcal{N}^n$, usando la (3.44) con $A \in \mathcal{N}^{n-1}$. *Iterando, ove possibile, si ridurrà il calcolo dell'integrale di f su B al calcolo successivo di n integrali unidimensionali*. In particolare se $E := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ è un rettangolo standard e $f \in C(E)$ e se σ è una qualunque una permutazione[15] di $\{1, ..., n\}$, allora

$$\int_E f = \int_{a_{\sigma_n}}^{b_{\sigma_n}} \Big(\cdots \Big(\int_{a_{\sigma_1}}^{b_{\sigma_1}} f(x) dx_{\sigma_1} \Big) \cdots \Big) dx_{\sigma_n} \ . \tag{3.48}$$

(iv) Le ipotesi della Proposizione 3.1 non possono essere indebolite; si vedano a tal proposito E **3.2** e E **3.3** di fine sezione.

Dimostrazione Sia E un rettangolo standard in $\mathbb{R}^{n-1}$ che contiene A e sia $a := \inf_A \alpha < b := \sup_A \beta$, cosicché $B \subseteq E' := E \times [a,b]$.
Cominciamo col dimostrare la misurabilità di B costruendo, dato $\varepsilon > 0$, due insiemi elementari B_1 e B_2 tali che $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$ e $\text{mis}_n\, B_2 \backslash B_1 \leq c\, \varepsilon$ con una costante $c > 0$ indipendente da ε (cfr. 2.11–(ii)). Dalle ipotesi segue che esiste una partizione P di E tale che

$$\sum_{R \in \mathscr{R}_A(P) \backslash \mathscr{R}'_A(P)} \text{mis}\, R \leq \varepsilon \ , \tag{3.49}$$

$$\sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \text{osc}\, (\alpha_A, R)\, \text{mis}\, R \leq \varepsilon \ , \qquad \sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \text{osc}\, (\beta_A, R)\, \text{mis}\, R \leq \varepsilon \ , \tag{3.50}$$

[14]Naturalmente il ruolo di $x_1, ..., x_{n-1}$ e y è del tutto arbitrario e analogamente si definirà un insieme normale rispetto ad un qualunque asse.
[15]Una permutazione σ dell'insieme $I = \{1, ..., n\}$ è una applicazione biunivoca $\sigma : i \in I \to \sigma_i \in I$.

dove $\mathrm{mis} = \mathrm{mis}_{n-1}$. Definiamo le seguenti famiglie disgiunte di rettangoli di $\mathscr{R}(P)$:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{R}_0 := \mathscr{R}_A(P) \backslash \mathscr{R}'_A(P) \ , \\
&\mathscr{R}_1 := \{R \in \mathscr{R}'_A(P) : \ \sup_R \alpha \geq \inf_R \beta\} \ , \\
&\mathscr{R}_2 := \mathscr{R}'_A(P) \backslash \mathscr{R}_1 = \{R \in \mathscr{R}'_A(P) : \ \sup_R \alpha < \inf_R \beta\} \ .
\end{aligned}$$

Si noti che $\mathscr{R}_1$ potrebbe essere vuota, ma se non lo è, allora per ogni $R \in \mathscr{R}_1$ si ha che

$$\begin{aligned}
\sup_R \beta - \inf_R \alpha &= (\sup_R \beta - \inf_R \beta) - (\sup_R \alpha - \inf_R \beta) + (\sup_R \alpha - \inf_R \alpha) \\
&\leq (\sup_R \beta - \inf_R \beta) + (\sup_R \alpha - \inf_R \alpha) \\
&= \operatorname{osc}(\beta_A, R) + \operatorname{osc}(\alpha_A, R) \ . \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Definiamo ora

$$\begin{aligned}
B_1 &:= \bigcup_{R \in \mathscr{R}_2} R \times [\sup_R \alpha, \inf_R \beta] \ , \\
B_2^{(0)} &:= \bigcup_{R \in \mathscr{R}_0} R \times [a, b] \ , \\
B_2^{(1)} &:= \bigcup_{R \in \mathscr{R}_1} R \times [\inf_R \alpha, \sup_R \beta] \ , \\
B_2^{(2)} &:= \bigcup_{R \in \mathscr{R}_2} R \times [\inf_R \alpha, \sup_R \beta] \ , \\
B_2 &:= B_2^{(0)} \cup B_2^{(1)} \cup B_2^{(2)} \ .
\end{aligned}$$

Chiaramente questi insiemi sono elementari e

$$B_1 \subseteq B \subseteq B_2 \ , \qquad B_2 \backslash B_1 = B_2^{(0)} \cup B_2^{(1)} \cup (B_2^{(2)} \backslash B_1) \ .$$

Ora, da (3.49) segue che

$$\mathrm{mis}_n\, B_2^{(0)} = \Big(\sum_{R \in \mathscr{R}_0} \mathrm{mis}_n\, R \Big)(b-a) \leq \varepsilon(b-a) \quad ; \qquad (3.52)$$

mentre da (3.51) e da (3.50) segue che

$$\mathrm{mis}_n\, B_2^{(1)} = \sum_{R \in \mathscr{R}_1} (\mathrm{mis}\, R)\, (\sup_R \beta - \inf_R \alpha) \leq \sum_{R \in \mathscr{R}_1} (\mathrm{mis}\, R) \Big(\operatorname{osc}(\beta_A, R) + \operatorname{osc}(\alpha_A, R) \Big) \leq 2\varepsilon \ . \qquad (3.53)$$

Infine,

$$\begin{aligned}
\mathrm{mis}_n (B_2^{(2)} \backslash B_1) &= \sum_{R \in \mathscr{R}_2} (\mathrm{mis}\, R) \Big((\sup_R \beta - \inf_R \beta) + (\sup_R \alpha - \inf_R \alpha) \Big) \\
&\leq \sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \operatorname{osc}(\alpha_A, R)\, \mathrm{mis}\, R + \sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \operatorname{osc}(\beta_A, R)\, \mathrm{mis}\, R \\
&\leq 2\varepsilon \ . \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

Mettendo assieme (3.52)÷(3.54) si ha che $\mathrm{mis}\, B_2 \backslash B_1 \leq c\varepsilon$ con $c = 4 + (b-a)$ da cui segue la misurabilità di B.

Dimostriamo l'integrabilità di g su A e simultaneamente la (3.47) (dalla quale deriva immediatamente (3.45) scegliendo $f := 1$). Innanzitutto g è limitata su A infatti, per ogni $x \in A$, si ha

$$|g(x)| \le (\sup_A |\beta - \alpha|)\ (\sup_B |f|) \le \Big(\sup_A |\beta| + \sup_A |\alpha|\Big)(\sup_B |f|)\ .$$

Sia ora P' una qualunque partizione di E' e si noti che $P' = (P, P_n)$ con P partizione di E e P_n partizione di $[a,b]$ e che i rettangoli R' di $\mathscr{R}(P')$ sono dati dai prodotti cartesiani dei rettangoli $R \in \mathscr{R}(P)$ per rettangoli (intervalli) $I \in \mathscr{R}(P_n)$. Si noti anche che dalle ipotesi segue che la funzione di una variabile $y \to f_B(x,y)$ è integrabile su I. Quindi, dato $R' = R \times I \in \mathscr{R}(P')$ e fissato $x \in R$, integrando su I la relazione

$$\inf_{R'} f_B \le f_B(x,y) \le \sup_{R'} f_B\ , \tag{3.55}$$

si ha che

$$(\inf_{R'} f_B) \operatorname{mis} I \le \int_{I'} f_B(x,y)dy \le (\sup_{R'} f_B) \operatorname{mis} I\ . \tag{3.56}$$

Sommando le relazioni in (3.56) su tutti gli $I \in \mathscr{R}(P_n)$ (tenendo fisso il rettangolo R di $\mathscr{R}(P)$), otteniamo per ogni $x \in R$,

$$\begin{aligned}
\sum_{I\in\mathscr{R}(P_n)} (\inf_{R'} f_B) \operatorname{mis} I &\le \int_I f_B(x,y)dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_B(x,y)dy = g_A(x)\\
\sum_{I\in\mathscr{R}(P_n)} (\sup_{R'} f_B) \operatorname{mis} I &\ge \int_I f_B(x,y)dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_B(x,y)dy = g_A(x)\ .
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Prendendo, rispettivamente, l'estremo inferiore su R nella prima riga di (3.57) e quello superiore nella seconda, otteniamo

$$\sum_{I\in\mathscr{R}(P_n)} (\inf_{R'} f_B) \operatorname{mis} I \le \inf_R g_A\ , \qquad \sum_{I\in\mathscr{R}(P_n)} (\sup_{R'} f_B) \operatorname{mis} I \ge \sup_R g_A\ . \tag{3.58}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{E'}(f_B, P') &= \sum_{R'\in\mathscr{R}(P)} (\inf_{R'} f_B) \operatorname{mis}(R') = \sum_{\substack{R\in\mathscr{R}(P)\\ I\in\mathscr{R}(P_n)}} (\inf_{R'} f_B) \operatorname{mis} R \cdot \operatorname{mis} I\\
&= \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \operatorname{mis} R \sum_{I\in\mathscr{R}(P_n)} (\inf_{R'} f_B) \operatorname{mis} I\\
&\le \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \operatorname{mis} R \inf_R g_A = \underline{S}_E(g_A, P)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

e (ragionando in maniera analoga per le somme superiori ed usando la seconda delle (3.59)) si ottiene $\overline{S}_{E'}(f_B, P') \ge \overline{S}_E(g_A, P)$. Dall'integrabilità di f_B su E' segue dunque l'asserto. ∎

4 Le funzioni integrabili secondo Riemann

Il resto di questo capitolo è dedicato a rendere rigorosa l'affermazione fatta all'inizio di 1.11, e cioè che l'integrabilità secondo Riemann di una funzione è intimamente connessa alla sua continuità. Fondamentale a tale scopo è la nozione di insieme di misura nulla.

Definizione 3.3 *Un insieme $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice di misura nulla se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia numerabile di rettangoli aperti $\{R_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ tale che*[16]

$$Q \subseteq \bigcup_{j\geq 1} R_j \ , \qquad \text{e} \quad \sum_{j\geq 1} \mathrm{mis}(R_j) \leq \varepsilon \ . \tag{3.60}$$

Osservazione 3.4 (i) Si noti, che non si è richiesto che Q sia limitato *né tantomeno che Q sia misurabile secondo Peano–Jordan*. Sia infatti Q un *qualunque insieme numerabile e denso*[17] *in* $\mathbb{R}^n$; si può prendere, ad esempio, l'insieme $Q = \mathbb{Q}^n$ dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ a componenti razionali. Poiché Q è numerabile $Q = \{r_j\}_{j\geq 1}$. Scegliamo ora R_j come il cubo aperto centrato in r_j di lato $(\varepsilon j^{-2})^{\frac{1}{n}}$. Allora $\mathrm{mis}(R_j) = \varepsilon j^{-2}$ e

$$\sum_{j\geq 1} \mathrm{mis}(R_j) \leq (\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j^2}) \ \varepsilon \ , \tag{3.61}$$

il che è chiaramente equivalente a dire che Q è di misura nulla. D'altra parte Q non è limitato né, per lo stesso motivo visto sopra[18], è misurabile $Q \cap E$ qualunque sia il rettangolo E.
(ii) Ovviamente *un sottoinsieme di un insieme di misura nulla è di misura nulla.*
(iii) *Un'unione numerabile di insiemi di misura nulla è di misura nulla.*
Dimostrazione Sia $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di misura nulla e sia $\varepsilon > 0$. Allora per ogni $j \geq 1$ esisono rettangoli aperti $R_i^{(j)}$ tali che $Q_j \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} R_i^{(j)}$ e $\sum_{i\geq 1} \mathrm{mis}\, R_i^{(j)} \leq \varepsilon 2^{-j}$. La famiglia $\{R_i^{(j)}\}_{i,j\in\mathbb{Z}_+}$, come è ben noto, è numerabile ed una numerazione può essere fatta come segue: definiamo $R_1 := R_1^{(1)}$ e, per ogni $r \geq 1$, definiamo[19]

$$R_{r^2+1} := R_{r+1}^{(1)} \ , \ R_{r^2+2} := R_{r^2+1}^{(2)} \ , ..., \ R_{r^2+r+1} := R_{r+1}^{(r+1)} \ , R_{r^2+r+2} := R_r^{(r+1)} \ , ..., \ R_{r^2+2r+1} := R_1^{(r+1)} \ .$$

Si noti che secondo tale numerazione, per ogni $N \geq 1$, $\{R_1,...,R_{N^2}\} := \{R_j^{(i)} : 1 \leq i,j \leq N\}$. Allora, per ogni $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{N} \mathrm{mis}\, R_r \quad &\leq \quad \sum_{r=1}^{N^2} \mathrm{mis}\, R_r = \sum_{i,j\leq N} \mathrm{mis}\, R_j^{(i)} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{mis}\, R_j^{(i)} \\ &\leq \quad \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{mis}\, R_j^{(i)} \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^j} \leq \varepsilon \ . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

(iv) A volte è utile, nella definizione di insieme di misura nulla, sostituire i rettangoli con cubi; vale infatti la seguente affermazione:

Un insieme $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ è di misura nulla se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento numerabile di Q fatto da cubi aperti la somma delle cui misure non eccede ε.

Per dimostrare tale affermazione osserviamo innanzitutto che

---

[16] Normalmente, una famiglia (non necessariamente numerabile) di insiemi aperti, la cui unione contenga un insieme Q, si chiama un *ricoprimento (aperto) di Q*; si ricorda che $\mathbb{Z}_+$ denota l'insieme degli interi positivi $\{1, 2, 3, ...\}$.

[17] Si ricordi che un insieme $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **denso in** $\mathbb{R}^n$ se la sua chiusura $\overline{Q}$ coincide con tutto $\mathbb{R}^n$. Analogamente, se C è un insieme chiuso di $\mathbb{R}^n$, si dice che $Q \subseteq C$ è denso in C se la sua chiusura coincide con C.

[18] E cioè che in ogni rettangolo R di una qualunque partizione di E cadono sia punti di Q (essendo Q denso in E), sia punti di $E\backslash Q$ (si ricordi che ogni intervallo di numeri reali è non numerabile).

[19] La seguente numerazione corrisponde alla numerazione di $\{(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2\}$ fatta considerando i quadrati di vertici $(1,1)$, $(r+1,1)$, $(r+1,r+1)$ e $(1,r+1)$ e numerando successivamente i lati "esterni" nel verso che va da $(r+1,1)$ a $(r+1,r+1)$ e poi da $(r+1,r+1)$ a $(1,r+1)$.

dato un qualunque rettangolo limitato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e dato comunque $\sigma > 0$ è possibile ricoprire E con un numero finito di cubi aperti la cui somma non ecceda[20] $\operatorname{mis} E + \sigma$. Sia ora $\varepsilon > 0$. Poichè Q è di misura nulla esiste un ricoprimento numerabile di rettangoli aperti R_j la somma delle cui misure non eccede $\varepsilon/2$. Per ogni j siano $K_1^{(j)}$,...,$K_{N_j}^{(j)}$ cubi aperti che ricoprono R_j e la somma delle cui misure non ecceda $\operatorname{mis}(R_j) + \varepsilon/2^{j+1}$. Allora l'insieme dei cubi $\{K_i^{(j)}\}$, con $j \geq 1$ e $1 \leq i \leq N_j$, è un insieme numerabile e l'unione di tali cubi ricopre Q ed inoltre

$$\sum_{j\geq 1}\sum_{i=1}^{N_j} \operatorname{mis}\left(K_i^{(j)}\right) \leq \sum_{j\geq 1} \operatorname{mis}(R_j) + \varepsilon \sum_{j\geq 1} \frac{1}{2^{j+1}} \leq \varepsilon \ . \qquad \blacksquare$$

La 2.14 si estende facilmente agli insiemi di misura nulla non necessariamente misurabili secondo Peano–Jordan. Vale infatti la seguente

Proposizione 3.5 *Sia $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme di misura nulla e sia $F : Q \to \mathbb{R}^n$ una funzione uniformemente lipschitziana su Q. Allora $F(Q)$ è un insieme di misura nulla.*

Dimostrazione Per il punto (iv) dell'osservazione precedente esiste un ricoprimento di cubi aperti, $\{K_j\}$, di Q per cui $\sum \operatorname{mis} K_j \leq \varepsilon$ e possiamo assumere che $K_j \cap Q \neq \emptyset$ per ogni j (altrimenti eliminiamo semplicemente K_j). Fissiamo un $x^{(j)} \in K_j \cap Q$ e chiamiamo r_j il lato di K_j cosicché $\operatorname{mis}(K_j) = r_j^n$. Definiamo K'_j il cubo aperto di centro $F(x^{(j)})$ e lato $r'_j := 2Lr_j$, dove L è la costante di Lipschitz di F su Q rispetto la norma $|\cdot|_\infty$ su $\mathbb{R}^n$, cioè: $|F(x)-F(y)|_\infty \leq L|x-y|_\infty$ per ogni $x, y \in Q$. Allora $F(K_j \cap Q) \subseteq K'_j$, infatti se $x \in K_j \cap Q$, si ha che $|x - x^{(j)}|_\infty \leq r_j$ e quindi $|F(x) - F(x^{(j)})| \leq L|x - x^{(j)}| \leq (Lr_j) = r'_j/2$, ovvero $F(x) \in K'_j$. Quindi $\{K'_j\}$ è un ricoprimento di $F(Q)$: se $y \in F(Q)$ allora esiste $x \in Q$ tale che $y = F(x)$, ma, poiché Q è ricoperto dai cubi K_j, esisterà un cubo K_{j_0} che contiene x, ma allora K'_{j_0} contiene y. Inoltre

$$\sum_j \operatorname{mis}(K'_j) = \sum (2Lr_j)^n = (2L)^n \sum r_j^n = (2L)^n \sum \operatorname{mis}(K_j) \leq (2L)^n \varepsilon \ , \tag{3.62}$$

e dall'arbitrarietà di ε segue l'asserto. $\blacksquare$

L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann può essere ora completamente caratterizzato[21].

Teorema 3.6 *Una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (E rettangolo standard di $\mathbb{R}^n$) è integrabile secondo Riemann su E se e solo se l'insieme dei punti di E in cui f è discontinua è un insieme di misura nulla.*

---

[20] Sia infatti $E = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ (i casi in cui E non è chiuso derivano banalmente dal caso in cui E è chiuso); sia $\delta = \sigma/(2nL^{n-1})$ dove $L = \max(b_i - a_i)$; sia $k_i = [(b_i - a_i)\delta^{-1}] + 1$ (dove $[\cdot]$ denota la funzione "parte intera"); sia, infine, $b'_i = a_i + \delta k_i$. Allora $E' = [a_1, b'_1] \times \cdots \times [a_n, b'_n] \supseteq E$ e $\operatorname{mis} E' \leq \operatorname{mis} E + n\delta L^{n-1} \leq \operatorname{mis} E + \sigma/2$. Sia, ora, P la partizione di E' con $P_i = \{a_i + j\delta \text{ con } 0 \leq j \leq k_i\}$. Chiaramente $\mathscr{R}(P')$ è formata da cubi di lato δ che denoteremo $\widetilde{K}_i$ per $i = 1$,...,N = cardinalità di $\mathscr{R}(P')$. Siano $K_i(r)$ i cubi aperti con lo stesso centro di $\widetilde{K}_i$ e lato $\delta + r$ cosicché $\overline{K_i(0)} = \widetilde{K}_i$. Ovviamente per ogni $r > 0$ $E \subseteq E' \subseteq \bigcup_i K_i(r)$ e la funzione $f(r) = \sum_{i=1}^N \operatorname{mis} K_i(r)$ è una funzione continua di r e $f(0) = \operatorname{mis} E' \leq \operatorname{mis} E + \sigma/2$. Dunque esiste r_0 tale che per ogni $0 \leq r \leq r_0$ si ha $f(r) \leq \operatorname{mis} E + \sigma$ e l'asserto si ottiene prendendo $K_i = K_i(r)$ per un qualunque $0 < r < r_0$.

[21] In effetti tale descrizione è stata fatta alquanto dopo i contributi di Riemann ed è essenzialmente basata sulla moderna teoria dell'integrazione dovuta a Lebesgue, Vitali, Caratheodory etc.

Dimostrazione Chiamiamo $D(f)$ l'insieme dei punti di E in cui f è discontinua ed osserviamo che se $Q_j := \{x \in E :\ \mathrm{osc}\,(f,x) \geq 1/j\}$ allora $D(f) = \cup_j Q_j$. Ricordando il punto (iii) dell'Osservazione 3.4, è sufficiente dunque dimostrare:
"*f è integrabile su E $\iff$ Q_j è un insieme di misura nulla per ogni j*".
Si noti che Q_j è chiuso (e quindi, essendo $Q_j \subseteq E$, è compatto).
Dimostriamo " $\Longrightarrow$ ": Siano $j, \varepsilon > 0$ allora esiste una partizione P di E tale che

$$\sum_{R \in \mathscr{R}} \mathrm{osc}\,(f,R)\,\mathrm{mis}\,R \leq \varepsilon/j\ .$$

Sia $\tilde{\mathscr{R}} := \{R \in \mathscr{R} : R \cap Q_j \neq \emptyset\}$ (cosicché, se $R \in \tilde{\mathscr{R}}$ allora $\mathrm{osc}\,(f,R) \geq 1/j$). Allora

$$\sum_{R \in \tilde{\mathscr{R}}} \mathrm{mis}\,R = j \sum_{R \in \tilde{\mathscr{R}}} \frac{\mathrm{mis}\,R}{j} \leq j \sum_{R \in \tilde{\mathscr{R}}} \mathrm{osc}\,(f,R)\,\mathrm{mis}\,R \leq \varepsilon\ .$$

Se $N := \#\tilde{\mathscr{R}}$, prendendo dei rettangoli aperti $K_R \supseteq R$ tali che $\mathrm{mis}\,K_R \leq \mathrm{mis}\,R + \varepsilon/N$ si ha che $Q_j \subseteq \bigcup_{R \in \tilde{\mathscr{R}}} K_R$ e $\sum_{R \in \tilde{\mathscr{R}}} \mathrm{mis}\,K_R \leq 2\varepsilon$. Dunque Q_j è un insieme di misura nulla.
Dimostriamo ora "$\Longleftarrow$": Sia $\varepsilon > 0$ e sia $j > 2/\varepsilon$ e sia $Q := Q_j$. Poiché Q è di misura nulla esiste un ricoprimento numerabile di Q formato da cubi aperti K_i tali che $\sum \mathrm{mis}\,K_i \leq \varepsilon$. Essendo Q compatto esistono K_{i_1},...,K_{i_s} che ricoprono Q (e ovviamente $\sum_{j=1}^{s} \mathrm{mis}\,K_{i_j} \leq \varepsilon$). Sia D la chiusura di $(E \backslash \bigcup_{j=1}^{s} K_{i_j})$. Per ogni $x \in D$ si ha $\mathrm{osc}\,(f,x) \leq 1/j < \varepsilon/2$. Per ogni $x \in D$ sia $C(x)$ un cubo chiuso di centro x tale che $\mathrm{osc}\,(f,x) \leq \varepsilon$ (l'esistenza di tali cubi deriva dalla definizione di oscillazione e dal fatto che $\mathrm{osc}\,(f,x) < \varepsilon/2$). Chiaramente $\bigcup_{x \in D} \mathring{C}(x) \supseteq D$ e quindi esistono C_1,...,C_N, con $C_i := C(x^{(i)})$ per qualche $x^{(i)} \in D$, tali che $D \subseteq \mathring{C}_1 \cup \cdots \cup \mathring{C}_N$. Sia P la partizione di E tale che P_i contanga la i–esima coordinata di tutti i vertici dei K_{i_j} e degli C_i. Chiaramente se chiamiamo $\mathscr{R}_1 := \{R \in \mathscr{R} : R \subseteq C_i$ per qualche $i\}$ e $\mathscr{R}_2 := \{R \in \mathscr{R} : R \subseteq K_{i_j}$ per qualche $j\}$, si ha $\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$. Allora $\sum_{R \in \mathscr{R}_2} \mathrm{mis}\,R \leq \varepsilon$ e

$$\begin{aligned}\sum_{R \in \mathscr{R}} \mathrm{osc}\,(f,R)\,\mathrm{mis}\,R &\leq \sum_{R \in \mathscr{R}_1} \mathrm{osc}\,(f,R)\,\mathrm{mis}\,R + \sum_{R \in \mathscr{R}_2} \mathrm{osc}\,(f,R)\,\mathrm{mis}\,R \\ &\leq \varepsilon\,\mathrm{mis}\,E + 2 \sup_E |f|\ \varepsilon\ . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Una conseguenza immediata di questo risultato, di 2.2 e del fatto che l'insieme di discontinuità di χ_B coincide con la frontiera di B è la seguente

Proposizione 3.7 *Un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano–Jordan se e solo sela sua frontiera è un insieme di misura nulla.*

Concludiamo questo capitolo con *un esempio di una funzione sul cubo unitario $K := [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ il cui insieme di discontinuità coincida con $K \cap \mathbb{Q}^n$*. Sia $\{r_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+} = K \cap \mathbb{Q}^n$ e sia $f : K \to [0,1]$ la funzione che vale zero se $x \in K \backslash \mathbb{Q}^n$ e $f(r_j) = 1/j$. Chiaramente $\mathrm{osc}\,(f,x) = 1/j > 0$. Facciamo vedere che f è continua in ogni $x \in K \backslash \mathbb{Q}^n$ $(:= \{x \in K : f(x) = 0\})$. Sia $\varepsilon > 0$; sia $j_0 > 1/\varepsilon$ e sia $\delta := \max_{1 \leq j \leq j_0} |x - r_j|$ (poiché $x \notin \mathbb{Q}^n$, $\delta > 0$). Se $x' \in B_\delta(x)$ o $x' \notin \mathbb{Q}^n$, nel qual caso $|f(x') - f(x)| = 0$, oppure $x' \in \mathbb{Q}^n$, nel qual caso $x = r_j$ per qualche $j \geq j_0$, e quindi $|f(x') - f(x)| = 1/j \leq 1/j_0 < \varepsilon$.

5 *Esercizi e complementi*

Esercizio 3.1 Si dimostrino le seguenti proprietà del diametro: (i) $\operatorname{diam} A = 0$ se e solo se A è costituito da un solo punto. (ii) A è limitato se e solo il suo diametro è finito.
(iii) Si calcoli il diametro di $A := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0|_p < r\}$ per $1 \le p \le \infty$.

Esercizio 3.2 Sia $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 se $x_1 \ne 1/2$ e, per $x_1 = 1/2$ la funzione $x_2 \in [0,1] \to f(1/2, x_2)$ vale 1 se x_2 è irrazionale e 0 se x_2 è razionale. Si dimostri che f è integrabile su $[0,1]^2$ (mentre, come sappiamo, $x_2 \in [0,1] \to f(1/2, x_2)$ non è integrabile su $[0,1]$).

Esercizio 3.3 L'ipotesi che f sia integrabile su B nella proposizione 3.1 non può essere rimossa, anche se assumessimo che $g(x)$ fosse integrabile su E. Si consideri, infatti, la seguente funzione $f : K \to \mathbb{R}$ con $K := [0,1]^2$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1\ , & \text{se } x_1 \in [0,1] \text{ è irrazionale}\ , \\ \\ 2x_2 & \text{se } x_1 \text{ è razionale}\ . \end{cases} \tag{3.63}$$

La funzione $x_2 \to f(x_1, x_2)$ coincide o con la funzione costante 1 o con $2x_2$ che sono entrambe funzioni integrabili su $[0,1]$ ed inoltre

$$\int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2 = 1\ , \qquad \forall\, x_1 \in [0,1]\ .$$

Dunque anche $g(x) := g(x_1) := 1$ è una funzione integrabile. D'altra parte (esercizio)

$$\sup \underline{S}_K(f,P) = \frac{3}{4}\ , \qquad \inf \overline{S}_K(f,P) = \frac{5}{4}\ . \tag{3.64}$$

Esercizio 3.4 (Un esempio di insieme aperto non misurabile secondo Peano–Jordan) Sia Q l'insieme di tutti i punti a coordinate razionali nel cubo unitario $[0,1]^n$. Sia $c > 0$; sia $\{r_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ una numerazione di Q [ovvero $Q = \{r_j : j \ge 1 \text{ e } j \text{ intero}\}$]; sia B_j la sfera aperta di centro r_j e raggio c/j^2 e sia B l'insieme aperto $B := \cup_{j \in \mathbb{Z}_+} B_j$.

(i) Si faccia vedere che $\operatorname{mis\,est} B \ge 1$.
(ii) Si faccia vedere che $\operatorname{mis\,int} B \le 2c \sum j^{-2}$ e si concluda che, se c è sufficientemente piccola, $\operatorname{mis\,int} B < \operatorname{mis\,est} B$ e che quindi B non è misurabile secondo Peano–Jordan.

Esercizio 3.5 * **(Curva di Peano)** *Esiste una funzione continua* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $\varphi([0,1]) = Q := [0,1] \times [0,1]$ ossia esiste una "curva" che ricopre un quadrato.
Se $I := [0,1] \times \{0\}$ denota il segmento unitario immerso in $\mathbb{R}^2$ e se, per ogni $(x,y) \in I$, definiamo $f(x,y) = \varphi(x)$, vediamo che $f \in C(I, \mathbb{R}^2)$, $\operatorname{mis}_2(I) = 0$ ma $\operatorname{mis}_2(f(I)) = \operatorname{mis}_2([0,1]^2) = 1$.

Si completino i dettagli del seguente schema di dimostrazione:
1) Sia K un quadrato di lato di lunghezza ℓ e lo si suddivida in quattro quadrati di lato $\ell/2$. Si fissi un lato L di K e su di esso si fissi un punto M a distanza $\ell/4$ da uno dei vertici di L e si fissi un altro lato L' di K diverso da L. Si faccia vedere che esiste una ed una sola poligonale[22] di lunghezza 2ℓ, che passi per i centri dei quattro quadrati in cui è stato suddiviso K e con estremi M ed N dove N è un punto su L' a distanza $\ell/4$ da uno dei suoi due estremi.
2) Sia $a < b$. Si "parametrizzi" su $[a,b]$ una qualunque poligonale in $\mathbb{R}^n$ ossia, se gli estremi della poligonale hanno coordinate x e y, si trovi una funzione $\gamma : t \in [a,b] \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ e tale che l'insieme $\{\gamma(t) : a \le t \le b\}$ coincida con la poligonale data. [Suggerimento: un segmento di estremi x e z è parametrizzato su $[a,b]$ da $\gamma(t) = x + \frac{t-a}{b-a}(y-x)$.]
3) La funzione (o "curva") φ sarà ottenuta come limite (uniforme) di funzioni continue $\varphi_k : [0,1] \to Q$. Ogni φ_k sarà una parametrizzazione di una poligonale chiusa che passa per ogni centro dei 2^{2k}

[22]Una "poligonale" in $\mathbb{R}^n$ è l'unione di $N \ge 1$ segmenti aventi come estremi coppie di punti $(x^{(1)}, x^{(2)})$, $(x^{(2)}, x^{(3)})$,...,$(x^{(N)}, x^{(N+1)})$.

quadrati di lato 2^{-k} in cui si divide Q. Denoteremo con Γ_k la poligonale parametrizzata da φ_k, cioè $\Gamma_k := \{\varphi_k(t) : 0 \le t \le 1\}$. *Primo passo*: si divida Q in quattro quadrati di lato 1/2 e sia Γ_1 la poligonale formata dai quattro segmenti che uniscono i centri dei quattro quadrati. *Secondo passo*: Si consideri il quadrato Q_1^1 di lato 1/2 di centro $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ e sia $\Gamma_1^1 := \Gamma_1 \cap Q_1^1$. Si divida Q_1^1 in quattro quadrati di lato 1/4 (che chiameremo Q_2^1,...,Q_2^4) ed usando il punto 1) si costruisca una poligonale Γ_2^1 che passi per i quattro centri di Q_2^j con estremi a distanza 1/8 dai due punti in $\Gamma_1^1 \cap Q_1^1$: vi sono infatti due poligonali con tali proprietà e per eliminare tale ambiguità si scelga quella con uno degli estremi in $(\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$. Si divida Q in 16 quadrati di lato 1/4, Q_2^j, $j = 1, ..., 16$. Iterando il procedimento sopra descritto si costruisca la poligonale chiusa Γ_2 che passi per tutti i 16 centri dei Q_2^j (e per il punto $(\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$: $\Gamma_2^1 = \Gamma_2 \cap Q_1^1$ *etc.*). *Terzo passo:* si generalizzi il procedimento descritto sopra e per ogni k si costruisca una poligonale chiusa, Γ_k, che passi per i 2^{2k} centri dei quadrati di lato 2^{-k} in cui è possibile suddividere Q. Tale costruzione è unica se si impone che la poligonale passi anche per il punto $(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}})$.
4) Si parametrizzi Γ_k tramite $\varphi_k(t)$ in modo tale che $\varphi_k(\frac{j}{2^{k+1}})$ coincida, per ogni $j = 1, ..., 2^{2k}$, con il centro di Q_k^j (si noti che Γ_k dà un ordine ai quadrati di lato 2^{-k} per i cui centri passa).
5) Si dimostri che per ogni $0 \le t \le 1$ vale $|\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)| \le \frac{1}{2^{k-1}}$ e da questo si deduca che $\varphi_k(t)$ converge uniformemente: il limite $\varphi(t)$ sarà dunque una funzione continua da $[0, 1]$ in Q (e $\varphi(0) = (\frac{1}{2}, 1)$).
6) Si dimostri che φ è surgettiva su Q cioè $\varphi([0, 1]) = Q$.
7) φ è anche iniettiva? [Risposta: no]

Esercizio 3.6 (Integrali impropri I) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme *non limitato*. Supponiamo che per ogni $r > 0$, l'insieme $A_r := A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le r\}$ sia misurabile. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia integrabile su A_r per ogni $r > 0$.

Definizione 3.8 *Se esiste finito il limite*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{A_r} |f| < \infty \tag{3.65}$$

si dice che f è integrabile su A e si pone

$$\int_A f = \lim_{r\to\infty} \int_{A_r} f \ . \tag{3.66}$$

(i) Si controlli che tale definizione è ben posta.
(ii) Dire se $f = e^{-|x|}$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$ (nel senso della definizione appena data) e, in caso affermativo, si stimi $\int_{\mathbb{R}^n} f$.
[Suggerimento: si noti che $\exp(-|x|) \le \exp(-\frac{1}{\sqrt{n}}|x|_1)$.]
(iii) Sia $n = 2$ e $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \le 1\}$. Si dica se è integrabile su A la funzione $f = x_1^{100}(\cos x_2)(1 + |x_2|)^{-\frac{3}{2}}$ e, in caso affermativo, si stimi $\int_A f$.

Esercizio 3.7 (Integrali impropri II) Sia A un insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$ e sia $\bar{x} \in A$. Sia $A' := A \backslash \{\bar{x}\}$ e sia $f : A' \to \mathbb{R}$. Sia B_r una sfera di raggio r centrata in $\bar{x}$. Supponiamo che f sia integrabile su $A'_r := A \backslash B_r$ per ogni $r > 0$.

Definizione 3.9 *Se esiste finito il limite*

$$\lim_{r\to 0} \int_{A'_r} |f| < \infty \tag{3.67}$$

si dice che f è integrabile su A e si pone

$$\int_A f = \lim_{r\to 0} \int_{A'_r} f \ . \tag{3.68}$$

(i) Si controlli che tale definizione è ben posta.
(ii) Sia A la sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ per $n \le 3$, $\bar{x} = 0$ e $f = \frac{1}{|x|^\alpha}$. Dire per quali α, f è integrabile su A e per tali α stimare $\int_A f$.
(iii)* Svolgere il punto (ii) nel caso di n arbitrario.

Esercizio 3.8 Dimostrare che se $A \in \mathcal{N}^k$, $B \in \mathcal{N}^h$ allora $A \times B \in \mathcal{N}^{k+h}$.

Esercizio 3.9 Dimostrare che se A è un insieme misurabile secondo Peano–Jordan, lo sono anche $\overline{A}$, $\mathring{A}$ e ∂A.

Esercizio 3.10 Dimostrare che $\mathbb{Q}^n \cap E$ (con E rettangolo qualunque) è un insieme di misura nulla non misurabile secondo Peano–Jordan.

Esercizio 3.11 Dimostrare che se A è misurabile secondo Peano–Jordan allora A è di misura nulla se e solo se $\mathrm{mis_n}\, A = 0$.

Esercizio 3.12 Sia R un rettangolo chiuso in $\mathbb{R}^n$. (i) Si dimostri che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono N cubi aperti R_1,...,R_N tali che $R \subseteq E := R_1 \cup \cdots \cup R_N$ e che $m(E \backslash R) \le \varepsilon$. (ii) Si dia una stima di N in termini di ε e delle lunghezze dei lati di R.

C 3.13 (Integrazione di funzioni $C([a,b], \mathbb{R}^n)$)

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Se $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ definiamo l'integrale di u su un intervallo $[a,b] \subseteq I$, il vettore

$$\int_a^b u(t)dt = \Big(\int_a^b u_1(t)dt, ..., \int_a^b u_n(t)dt \Big) \tag{3.69}$$

Ricordiamo che se $v \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ allora $v'(t)$ non è altro che il vettore costituito dalle derivate di v: $\Big(v'(t)\Big)_i := (v_i)'(t)$ per ogni $1 \le i \le n$. Le seguenti proprietà (i) e (ii) sono di immediata verifica:

(i) se $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ allora per ogni $t_0 \in I$ la funzione $v(t) = \int_{t_0}^t u(\tau)d\tau$ appartiene a $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ e vale il *teorema fondamentale del calcolo*: $v'(t) = u(t)$.

(iii) Se $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ e $[a,b] \subseteq I$, per ogni norma $|\cdot|$ su $\mathbb{R}^n$, si ha

$$|\int_a^b u(t)dt| \le \int_a^b |u(t)|dt \ . \tag{3.70}$$

Dimostrazione di (iii): Dalla teoria di Riemann dell'integrazione (relativa a funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$), osservando che la funzione $t \to |u(t)|$ è continua e ponendo $\delta_k = \frac{b-a}{k}$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
|\int_a^b u(t)dt| &= \Big|\Big(\int_a^b u_1(t)dt, ..., \int_a^b u_n(t)dt \Big)\Big| \\
&= \lim_{k\to\infty} \Big|\Big(\sum_{j=1}^k \delta_k u_1(a+\delta_k j), ..., \sum_{j=1}^k \delta_k u_n(a+\delta_k j) \Big)\Big| \\
&= \lim_{k\to\infty} \Big| \sum_{j=1}^k \delta_k \big(u_1(a+\delta_k j), ..., u_n(a+\delta_k j) \big) \Big| \\
&\le \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^k \delta_k \Big| \big(u_1(a+\delta_k j), ..., u_n(a+\delta_k j) \big) \Big| = \int_a^b |u(t)|dt \ . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

(iv) Sia $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ e $(a,b) \subseteq I$ e si consideri la successione di vettori

$$x^{(k)} = \sum_{j=1}^k \frac{b-a}{k} u(a + \frac{b-a}{k} j) \ , \tag{3.71}$$

allora $x^{(k)}$ converge (in qualunque norma in $\mathbb{R}^n$) a $\int_a^b u(t)dt$. La formula (3.71) non è altro che la somma di Riemann relativa alla partizione ottenuta dividendo $[a,b]$ in k intervalli uguali.

Capitolo 4

Diffeomorfismi

1 Preliminari: spazi di matrici; lemma delle contrazioni; integrazione di funzioni vettoriali

Spazi di Banach di matrici

Si ricordino le definizioni date in § 4, Cap. 1.

Proposizione 4.1 (i) *Siano* $|\cdot|_a$ *e* $|\cdot|_b$ *due norme arbitrarie in, rispettivamente,* $\mathbb{R}^m$ *e* $\mathbb{R}^n$ *e per*[1] $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ *si definisca*

$$\|A\|_{a,b} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ |x|_a = 1}} |Ax|_b \ . \tag{4.1}$$

Allora $\Big(\mathrm{Mat}(n \times m), \|\cdot\|_{a,b}\Big)$ *è uno spazio di Banach e*

$$|Ax|_b \le \|A\|_{a,b}\ |x|_a \ , \quad \forall\ A \in \mathrm{Mat}(n \times m)\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^m \ . \tag{4.2}$$

Nel caso speciale $a = b = \infty$ *si ha*

$$\|A\|_{\infty,\infty} = \sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \ , \tag{4.3}$$

dove a_{ij} *denotano gli elementi di matrice di* A.
(ii) *(Algebre di Banach) Siano* $|\cdot|_a$, $|\cdot|_b$ *e* $|\cdot|_c$ *tre norme arbitrarie in, rispettivamente,* $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^p$. *Allora, se* $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ *e se* $B \in \mathrm{Mat}(m \times p)$, *si ha che*

$$\|AB\|_{c,b} \le \|A\|_{a,b} \|B\|_{c,a} \ . \tag{4.4}$$

Inoltre se I_n *denota la matrice identità in* $\mathrm{Mat}(n \times n)$ *si ha che* $\|I_n\|_{a,a} = 1$ *per ogni scelta della norma* $|\cdot|_a$ *in* $\mathbb{R}^n$*:* $(\mathrm{Mat}(n \times n), \|\cdot\|_{a,a})$ *è una "algebra di Banach".*
(iii) *(Serie di Neumann) Sia* $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ *e* $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{a,b}$. *Se* $\|A\| < 1$ *allora la matrice* $(I - A)$ *è invertibile* $(I := I_n)$ *e*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \qquad \text{ovvero} \qquad \lim_{N \to \infty} \|(I - A)^{-1} - \sum_{k=0}^{N} A^k\| = 0 \ . \tag{4.5}$$

[1] Si ricorda che $\mathrm{Mat}(n \times m)$ denota lo spazio vettoriale (reale) delle matrici $n \times m$.

Dimostrazione (i): che (4.1) definisca una norma è immediato come è immediato verificare che anche $\|A\| := \max_{i,j} |a_{ij}|$ è una norma. Dunque, poiché dalla Proposizione 1.21 segue che le norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{a,b}$ sono equivalenti è sufficiente dimostrare che $\mathrm{Mat}(n \times m)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|$. Ma la convergenza in norma $\|\cdot\|$ è equivalente alla convergenza elemento per elemento e dunque dalla completezza di $\mathbb{R}$ segue la completezza di $(\mathrm{Mat}(n \times m), \|\cdot\|)$.
Per $x = 0$ la (4.2) è verificata (con $=$). Sia $0 \neq x \in \mathbb{R}^m$, allora, dalla definizione di $\|\cdot\|_{a,b}$, segue che

$$\Big\| A \frac{x}{|x|_a} \Big\| \leq \|A\|_{a,b} \ ,$$

il che è equivalente a (4.2).
Per verificare (4.3) si osservi che se $x \in \mathbb{R}^m$ con $|x|_\infty \leq 1$ (ovvero $|x_j| \leq 1$ per ogni j),

$$|Ax|_\infty := \sup_i |\sum_j a_{ij} x_j| \leq \sup_i \sum_j |a_{ij}||x_j| \leq \sup_i \sum_j |a_{ij}|$$

ovvero $\|A\|_{\infty,\infty} \leq \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^m |a_{ij}|$. D'altra parte, sia i_0 tale che $\sup_i \sum_j |a_{ij}| = \sum_j |a_{i_0 j}|$ e sia $x_j := \mathrm{segno}\,(a_{i_0 j})$ se $a_{i_0 j} \neq 0$ e $x_j = 1$ altrimenti; allora si ha che $|x|_\infty = 1$ e $a_{i_0 j} x_j \geq 0$. In tal caso $\sup\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}| = \sum\limits_j |a_{i_0 j}| = \sum\limits_j a_{i_0 j} x_j = |\sum\limits_j a_{i_0 j} x_j| \leq \|A\|_{\infty,\infty}$ il che prova (4.3).

(ii): se $x \in \mathbb{R}^p$ con $|x|_c = 1$ allora (per l'associatività del prodotto tra matrici) e per la definizione (4.1) si ha che

$$|ABx|_b \leq \|A\|_{a,b}\ |Bx|_a \leq \|A\|_{a,b}\ \|B\|_{c,a} \ ,$$

il che implica (4.4). L'asserto su $\|I_n\|_{a,b}$ è ovvio.
(iii): poiché $\|A\| < 1$, dal punto (ii) (iterato) segue che $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ per ogni k e dunque, per ogni $M \geq N \geq 0$, $\Big\| \sum\limits_{k=N}^M A^k \Big\| \leq \sum\limits_{k=N}^M \|A\|^k$, quantità che tende a zero al crescere di N. Questo significa che la successione delle ridotte $\{\sum_{k=0}^N A^k\}$ è una successione di Cauchy e quindi, per il punto (i), ammette limite in $(\mathrm{Mat}(n \times n), \|\cdot\|)$. Sia B tale limite e facciamo vedere che B coincide con l'inversa di[2] $(I - A)$:

$$\begin{aligned} B(I-A) \quad &:= \big(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^N A^k\big)(I-A) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^N \big(A^k(I-A)\big) \\ &= \lim_{N\to\infty} I - A^{N+1} = I \ , \end{aligned}$$

ma dire che $B = (I-A)^{-1}$ è equivalente alla (4.5). ∎

[2] Si noti che se B e C sono due matrici quadrate e $BC = I$ allora $B = C^{-1}$: infatti da $BC = I$ segue che $(\det B)(\det C) = 1$ e quindi sia B che C sono invertibili e moltiplicando a destra ambo i membri della relazione $BC = I$ si ottiene $B = C^{-1}$ (e, invertendo ambo i membri di tale relazione, $B^{-1} = C$). Si osservi anche se $\{A_k\}$ tende a A (cioè, per definizione, $\|A_k - A\| \to 0$) allora, per ogni B, $\{A_k B\}$ tende a AB; infatti: $\|A_k B - AB\| \leq \|A_k - A\|\|B\| \to 0$.

Il Lemma delle contrazioni

Proposizione 4.2 (Teorema di punto fisso o Lemma delle contrazioni) *Sia $E \neq \emptyset$ un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo (X, d) e sia Φ una funzione da E in E tale che, per un qualche $0 < \theta < 1$, valga*

$$d\big(\Phi(u), \Phi(v)\big) \leq \theta d(u, v) \ , \qquad \forall\ u, v \in E \ . \tag{4.6}$$

Allora esiste un unico $\bar{u} \in E$ tale che $\Phi(\bar{u}) = \bar{u}$; inoltre si ha che

$$\bar{u} = \lim_{k \to \infty} \Phi^k(u_0) := \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{k \text{ volte}}(u_0) \ , \qquad \forall\ \ u_0 \in E \ . \tag{4.7}$$

Una funzione Φ per cui vale (4.6) si chiama *contrazione*. Si noti che *ogni contrazione è continua* cioè se $d(v_k, v) \to 0$ allora $d\big(\Phi(v_k), \Phi(v)\big) \leq \theta d(v_k, v) \to 0$.

L'ipotesi che θ sia strettamente minore di uno è essenziale: $\Phi : x \in \mathbb{R} \to \Phi(x) := 1 + x \in \mathbb{R}$, ($\mathbb{R}$ con metrica euclidea) verifica (4.6) con $\theta = 1$ ma ovviamente Φ non ha alcun punto fisso in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione Sia u_0 un *punto arbitrario* di E e definiamo la seguente successione per ricorrenza:

$$v_0 = u_0 \ , v_1 = \Phi(v_0) \ , ..., v_k = \Phi(v_{k-1}) := \Phi^k(u_0) \ , ... \tag{4.8}$$

Poiché Φ manda E in se stesso tale successione è ben definita e $v_k \in E$ per ogni $k \geq 0$. Poiché Φ è una contrazione, si ha:

$$d(v_j, v_{j-1}) = d(\Phi(v_{j-1}), \Phi(v_{j-2})) \leq \theta d(v_{j-1}, v_{j-2}) \leq \theta^{j-1} d(v_1, v_0) \ .$$

Dunque, per ogni $k > h$ si ha

$$\begin{aligned} d(v_k, v_h) &\leq d(v_k, v_{k-1}) + d(v_{k-1}, v_h) \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-h-1} d(v_{h+j+1}, v_{h+j}) \leq \sum_{j=0}^{k-h-1} \theta^{h+j} d(v_1, v_0) \\ &\leq \theta^h \ d(v_1, v_0) \ \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j = \theta^h \ \frac{d(v_1, v_0)}{1 - \theta} \ . \end{aligned}$$

Tale quantità tende a 0 per $h \to \infty$ e ciò significa che la successione $\{v_k\}$ è di Cauchy. Poiché X è completo v_k converge a $\bar{u} \in X$ e poiché E è chiuso $\bar{u} \in E$. Quindi, per la continuità di Φ si ha che $\bar{u} = \lim v_k = \lim \Phi(v_{k-1}) = \Phi(\bar{u})$. Per dimostrare l'unicità, supponiamo, per assurdo, che $\bar{v} \in E$ sia un altro punto fisso per Φ: $\Phi(\bar{v}) = \bar{v}$. Si ha allora $d(\bar{u}, \bar{v}) = d(\Phi(\bar{u}), \Phi(\bar{v})) \leq \theta d(\bar{u}, \bar{v}) < d(\bar{u}, \bar{v})$ che è una contraddizione. ∎

Integrazione di funzioni vettoriali

Concludiamo questo paragrafo di prerequisiti con una breve discussione sull'*integrazione di funzioni* $C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Sia $t \in [a, b] \to f := (f_1(t), ..., f_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ una funzione continua (il che significa che le n funzioni scalari $f_i(t)$ sono funzioni continue sull'intervallo chiuso $[a, b]$) e definiamo

$$\int_a^b f(t) \ dt := \Big(\int_a^b f_1(t) dt \ , ..., \int_a^b f_n(t) dt \Big) \ . \tag{4.9}$$

È evidente che da tale definizione segue che l'integrale di funzioni vettoriali continue di una variabiabile reale è una operazione lineare. Inoltre, è noto che dalla teoria dell'integrazione di Riemann (in una variabile) segue che, per ogni $g \in C([a,b],\mathbb{R})$,

$$\int_a^b g(t)dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N g(t_i)\ \frac{1}{N}\ , \qquad t_i := a + i\ \frac{b-a}{N}\ . \tag{4.10}$$

Dunque, se $|\cdot|_a$ è una qualunque norma in $\mathbb{R}^n$, se t_i è come in (4.10), si ha

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(t)dt\Big|_a &= \Big|\Big(\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N f_1(t_i)\frac{1}{N},...,\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N f_n(t_i)\frac{1}{N}\Big)\Big|_a = \Big|\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N f(t_i)\frac{1}{N}\Big|_a \\ &= \lim_{N\to\infty}\Big|\sum_{i=1}^N f(t_i)\frac{1}{N}\Big|_a \le \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N \frac{|f(t_i)|_a}{N} = \int_a^b |f(t)|_a dt\ .\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato: *se $f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ e se $|\cdot|_a$ è una norma su $\mathbb{R}^n$ allora*

$$\Big|\int_a^b f(t)dt\Big|_a \le \int_a^b |f(t)|_a dt\ . \tag{4.11}$$

2 Teorema delle funzioni implicite

Consideriamo ora il problema di trovare le soluzioni di un sistema di n equazioni (nelle incognite $y_1,...,y_n$) che contengano m parametri. In altre parole vogliamo trovare $y \in \mathbb{R}^n$ che soddisfi il sistema di n equazioni

$$F(y,x) = 0\ , \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} F_1(y_1,...,y_n,x_1,...,x_m) = 0 \\ F_2(y_1,...,y_n,x_1,...,x_m) = 0 \\ \vdots \\ F_n(y_1,...,y_n,x_1,...,x_m) = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

al variare dei "parametri" $x \in \mathbb{R}^m$ avendo assegnato la funzione $F : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$. Esempi semplici di natura geometrica sono dati dai grafici di funzioni.

(a) Sia $F(y,x) = y^3 - x$, $(n = m = 1)$; in tal caso le soluzioni, al variare di $x \in \mathbb{R}$, di $F(y,x) = 0$ sono $y = \sqrt[3]{x}$ cioè l'insieme delle soluzioni di $F(y,x) = 0$, $\{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : F(y,x) = 0\}$, coincide con il grafico di $\sqrt[3]{x}$ ovvero con l'insieme $\{(\sqrt[3]{x},x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(b) Sia $F(y,x) = y^2 - x$ (ancora $n = m = 1$). Se $x < 0$ non esistono soluzioni di $F(y,x) = 0$; se $x = 0$, l'unica soluzione è data da $y = 0$; se $x > 0$ vi sono due soluzioni date da $y = \pm\sqrt{x}$. Quindi, fissato $x_0 > 0$, in un intorno (sufficientemente piccolo) di $(x_0,y_0) := (x_0,\sqrt{x_0})$ *vi è una unica funzione di x che soddisfi identicamente* $F(y(x),x) = 0$, tale funzione essendo, ovviamente, $y(x) = +\sqrt{x}$ mentre in un intorno di $(x_0,y_0) := (x_0,-\sqrt{x_0})$, avremo la soluzione $y(x) = -\sqrt{x}$. In un intorno di $(x_0,y_0) = (0,0)$ invece non è possibile definire in maniera univoca le soluzioni di $F(y,x) = 0$ in termini di funzioni di x. Il punto $(0,0)$ è dunque, rispetto al nostro problema, "singolare": il numero di soluzioni varia tra 0 e 2 quando $x \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, comunque piccolo sia $\varepsilon > 0$. Notiamo anche che in tale punto singolare si ha $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Già da questi semplicissimi esempi si vede che una formulazione più propria del problema che ci stiamo ponendo è:

Dato un punto (y_0, x_0) tale che $F(y_0, x_0) = 0$, è possibile trovare una funzione $y = g(x)$ tale che $g(x_0) = y_0$ e tale che il grafico di g rappresenti localmente tutte le soluzioni di[3] *$F(y, x) = 0$?*

(c) Cambiamo punto di vista e diamo un esempio analitico con n ed m arbitrari. Consideriamo il sistema di equazioni *lineari* nelle incognite $y_1, ..., y_n$ con coefficienti che dipendono da $x \in \mathbb{R}^m$:

$$A(x)y + b(x) = 0 \ , \tag{4.13}$$

dove $A(x) \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ e $b(x) \in \mathbb{R}^n$. È evidente che tale sistema è unicamente risolubile se $\det A(x) \neq 0$, nel qual caso si ha

$$y = -A(x)^{-1} b(x) \tag{4.14}$$

e se $A(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue di x, così risulterà anche la funzione $y(x)$ definita dalla (4.14). Si noti che, se poniamo $F(y, x) = A(x)y + b(x)$, $A(x)$ coincide con la matrice jacobiana $\frac{\partial F}{\partial y}$ e dunque la condizione di risolubilità è che tale matrice jacobiana sia invertibile.

Alla luce di queste osservazioni, l'enunciato del seguente teorema potrebbe risultare alquanto naturale.

Proposizione 4.3 (Teorema delle funzioni implicite) *Sia $(y, x) \in \mathbb{R}^{n+m} \to F(y, x) \in \mathbb{R}^n$ una funzione continua insieme alla sua matrice jacobiana $\frac{\partial F}{\partial y}$ in un intorno di*[4] *(y_0, x_0). Assumiamo che*

$$F(y_0, x_0) = 0 \ , \qquad \text{e} \qquad \det \frac{\partial F}{\partial y}(y_0, x_0) \neq 0 \ . \tag{4.15}$$

Allora esiste una ed una sola funzione g continua in un intorno di x_0, che soddisfi

$$g(x_0) = y_0 \ , \qquad \text{e} \qquad F(g(x), x) := 0 \tag{4.16}$$

per ogni x in tale intorno.

Dedurremo tale risultato come immediato corollario della seguente "versione quantitativa".

Proposizione 4.4 (Versione quantitativa del teorema delle funzioni implicite) *Sia $X_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme compatto, $Y_0 := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq \rho\}$ una sfera di raggio ρ in $\mathbb{R}^n$ e $F : (y, x) \in Y_0 \times X_0 \to F(y, x) \in \mathbb{R}^n$ una funzione continua su $Y_0 \times X_0$ assieme alle sue derivate parziali rispetto alle y_j. Assumiamo che esista una matrice $T \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ per cui valgano le seguenti due condizioni:*

$$\sup_{X_0} |F(y_0, x)| \leq \frac{\rho}{2\|T\|} \ , \tag{4.17}$$

$$\sup_{Y_0 \times X_0} \|I - T \frac{\partial F}{\partial y}(y, x)\| \leq \frac{1}{2} \tag{4.18}$$

dove $I \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ è la matrice identità. Allora esiste un'unica $g \in C(X_0, Y_0)$ che soddisfa $F(g(x), x) = 0$ per ogni $x \in X_0$. Inoltre, il grafico $\{(y, x) = (g(x), x) : x \in X_0\}$ rappresenta tutte e sole le soluzioni di $F(y, x) = 0$ in $Y_0 \times X_0$.

[3] Ovvero $F(g(x), x) = 0$ in un intorno di x_0 e l'insieme delle coppie $(g(x), x)$ al variare di x in tale intorno sono *tutte* le soluzioni di $F(y, x) = 0$ in un intorno di (y_0, x_0).

[4] Cioè esiste un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ contenente (y_0, x_0) dove $F_i(y, x)$ e $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ sono continue per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$.

Osservazione 4.5 (i) Sotto le ipotesi enunciate nella Proposizione 4.3, è sempre possibile trovare ρ, X_0 e T per cui le due condizioni della Proposizione 4.4 valgano. Infatti, poniamo

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x_0| \le r\} \ , \qquad T := \Big(\frac{\partial F}{\partial y}(y_0, x_0)\Big)^{-1} \ , \tag{4.19}$$

e vediamo come, grazie alle ipotesi della Proposizione 4.3, sia possibile determinare r e ρ in modo tale da soddisfare (4.17) ed (4.18). Poiché $x \to F(y_0, x)$ è continua in x_0 e $F(y_0, x_0) = 0$, si ha che, per per ogni $\rho > 0$, è sempre possibile scegliere $r = r(\rho)$ per il quale (4.17) è soddisfatta (nelle notazioni standard ρ corrisponde ad ε e r a δ); dopodiché, essendo anche $(y, x) \to \|I - T\frac{\partial F}{\partial y}(y, x)\|$ continua in (y_0, x_0) dove vale 0, esistono ρ_1 e r_1 tali che $(y, x) \to \|I - T\frac{\partial F}{\partial y}(y, x)\| \le 1/2$ per ogni y e x tali che $|y - y_0| \le \rho_1$ e $|x - x_0| \le r_1$ (qui ε corrisponde a $1/2$, ρ_1 e r_1 a δ). Dunque, scegliendo

$$\rho := \rho_1 \ , \qquad r := \min\{r_1 \ , r(\rho_1)\}$$

le (4.17) e (4.18) saranno soddisfatte.
Viceversa *l'enunciato "quantitativo" nella Proposizione 4.4 è più generale dell'enunciato della Proposizione 4.3*: infatti non viene assunto che $F(y_0, x_0) = 0$ ovvero non viene assunta l'esistenza di una soluzione *esatta* di $F = 0$; d'altra parte si assume che esistano, per valori dei parametri x in X_0, delle *soluzioni approssimate* di $F = 0$ (si veda (4.17) dove ρ dovrà essere "piccolo" per poter soddisfare (4.18)).

(ii) L'enunciato della Proposizione 4.4 potrebbe, a prima vista, apparire più generale dell'enunciato della Proposizione 4.3 anche perché non viene assunto esplicitamente che la matrice jacobiana $\frac{\partial F}{\partial y}$ è invertibile per un qualche punto di $Y_0 \times X_0$; ma, in effetti, la (4.18) implica che $\frac{\partial F}{\partial y}$ *è invertibile per ogni punto di* $Y_0 \times X_0$. Infatti, se poniamo $A := I - T\frac{\partial F}{\partial y}$, da (iii) della Proposizione 4.1 segue che la matrice $I - A = T\frac{\partial F}{\partial y}$ è invertibile, e quindi, sia T che $\frac{\partial F}{\partial y}$, per ogni y e x, sono invertibili.

(iii) (i) Il fattore $\frac{1}{2}$ che compare nelle condizioni (4.17) e (4.18) è alquanto arbitrario ed in effetti dalla dimostrazione del teorema segue facilmente che le condizioni (4.17) e (4.18) possono venire sostituite, rispettivamente, con

$$\sup_{X_0} |F(y_0, x)| \le \alpha \frac{\rho}{\|T\|} \ , \qquad T := \Big(\frac{\partial F}{\partial y}(y_0, x_0)\Big)^{-1} \ ; \tag{4.20}$$

e da

$$\sup_{Y_0 \times X_0} \|I - T\frac{\partial F}{\partial y}(y, x)\| \le (1 - \alpha) \tag{4.21}$$

con $0 < \alpha < 1$ prefissato.

(iv) Le norme usate nella Proposizione 4.4 sono state fissate per semplicità ma è immediato verificare nella dimostrazione che segue che *la Proposizione 4.4 vale per qualunque scelta delle norme in* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$ *e con la relativa norma* (4.1) *su* $\mathrm{Mat}(n \times n)$. Ad esempio, è spesso più conveniente nelle applicazioni usare le norme $|\cdot|_\infty$ in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ con la relativa norma $\|\cdot\|_{\infty,\infty}$, (4.3), sulle matrici $n \times n$.

(v) Il nome "funzioni implicite" deriva dal fatto che la relazione (4.12), sotto le ipotesi (4.15), *definisce implicitamente* la funzione $y = g(x)$.

Dimostrazione (della Proposizione 4.4) Poniamo $G(y, x) = y - TF(y, x)$, cosicché $\frac{\partial G}{\partial y} = I - T\frac{\partial F}{\partial y}$. Allora, per ogni $y, z \in Y_0$ e $x \in X_0$, in virtù del teorema fondamentale del calcolo di (4.11), di (4.2) e di (4.18), si ha

$$
\begin{aligned}
|G(y,x)-G(z,x)| &= \Big|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial y}\big(z+t(y-z),x\big)[y-z]dt\ \Big| \\
&\le \sup_{Y_0\times X_0}\Big\|\frac{\partial G}{\partial y}\Big\|\,|y-z| \le \frac{1}{2}|y-z|\ . \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Sia, ora, $E := C(X_0, Y_0)$. Si noti che E è un sottoinsieme chiuso dello spazio di Banach[5] $C(X_0, \mathbb{R}^n)$ (dotato della norma uniforme $\|\cdot\|_{\infty,X_0}$). Sull'insieme E definiamo la seguente mappa Φ che associa ad una funzione $u \in C(X_0, Y_0)$ la funzione $\Phi(u)$ definita da

$$
\Phi(u)(x) := G(u(x), x) = u(x) - TF(u(x), x)\ . \qquad (4.23)
$$

Si noti che tale definizione è ben posta poiché i valori $u(x)$ cadono nella sfera chiusa Y_0 su cui $F(\cdot, x)$ è continua. Per ogni $u, v \in E$, e per ogni $x \in X_0$, da (4.22) (con $y = u(x)$ e $z = v(x)$) segue che

$$
|\Phi(u)(x) - \Phi(v)(x)| \le \frac{1}{2}|u(x) - v(x)| \qquad (4.24)
$$

e, prendendo l'estremo superiore su X_0, vediamo che

$$
\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{\infty,X_0} \le \frac{1}{2}\|u - v\|_{\infty,X_0}\ . \qquad (4.25)
$$

Cioè Φ *è una contrazione* sullo spazio di Banach $C(X_0)$. Chiamiamo $u_0(x)$ la funzione costante $u_0(x) := y_0$; tale funzione è ovviamente in E e da (4.25), la definizione di Φ e da (4.17), si ottiene[6], per ogni $u \in E$,

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u) - y_0\|_\infty &\le \|\Phi(u) - \Phi(u_0)\|_\infty + \|\Phi(u_0) - y_0\|_\infty \le \\
&\le \frac{1}{2}\|u - u_0\|_\infty + \|TF(y_0, x)\|_\infty \\
&\le \frac{1}{2}\|u - y_0\|_\infty + \|T\|\frac{\rho}{2\|T\|} \le \rho\ , \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

cioè $\Phi(u)(x) \in Y_0$ per ogni $x \in X_0$, il che equivale a dire che $\Phi(u) \in C(X_0, Y_0) = E$. Quindi Φ manda E in se stesso ed è una contrazione. Per il teorema di punto fisso 4.2 possiamo concludere che esiste una unica funzione $g \in C(X_0, Y_0)$ tale che $\Phi(g) = g$, ovvero $g - TF(g, x) = g$, ma questa relazione è equivalente a

$$
F(g(x), x) = 0\ , \qquad \forall\ x \in X_0\ . \qquad (4.27)
$$

Dimostriamo ora che il grafico $\{(y, x) = (g(x), x) : x \in X_0\}$ è l'insieme di *tutte* le soluzioni di $F(y, x) = 0$ in $Y_0 \times X_0$. Per dimostrare tale affermazione, supponiamo, per assurdo, che esista $\bar{x} \in X_0$ ed un $\bar{y} \in Y_0$ tale che $\bar{y} \ne \bar{g} := g(\bar{x})$ e tale che $F(\bar{y}, \bar{x}) = 0$. Allora, dalla definizione di G e da (4.22) seguirebbe che

$$
|\bar{y} - \bar{g}| = |G(\bar{y}, \bar{x}) - G(\bar{g}, \bar{x})| \le \frac{1}{2}|\bar{y} - \bar{g}| \qquad (4.28)
$$

[5] $u_k \in E$ significa $u_k \in C(X_0, \mathbb{R}^n)$ e $|u_k(x) - y_0| \le \rho$ per ogni $x \in X_0$; se $\{u_k\}$ è di Cauchy allora, poiché $(C(X_0,), \|\cdot\|_{\infty,X_0})$ è uno spazio di Banach, esiste $u \in C(X_0, \mathbb{R}^n)$ tale che $\sup_{x\in X_0} |u_k(x) - u(x)| \to 0$ e quindi, per ogni $x \in X_0$, $|u(x) - y_0| = \lim_{k\to\infty} |u_k(x) - y_0| \le \rho$ e quindi $u \in E$.

[6] Qui $\|\cdot\|_\infty$ denota, per brevità, $\|\cdot\|_{\infty,X_0}$.

il che è assurdo (avendo noi assunto che $\bar{y} \neq \bar{g}$). ∎

Dimostrazione (della Proposizione 4.3) Come detto in (i) dell'Osservazione 4.5, le ipotesi della Proposizione 4.3 implicano quelle della Proposizione 4.4. Quindi l'unica cosa che resta da dimostrare è che $F(y_0, x_0) = 0$ implica che $g(x_0) = y_0$. Ma questo deriva dall'ultima affermazione nell'enunciato della Proposizione 4.4 che assicura che tutte le soluzioni di $F = 0$ in $Y_0 \times X_0$ (e $(y_0, x_0) \in Y_0 \times X_0$) sono date dal grafico su X_0 di g il che implica che $g(x_0) = y_0$. ∎

Esempio 4.6 Sia $F(y, x_1, x_2) = e^y - \operatorname{sen}(yx_1 + \frac{x_2\pi}{2})$, con $y \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, e sia $(y_0, x_0) := (y_0, x_{01}, x_{02}) = (0, 1, 1)$. Mostriamo che la Proposizione 4.3 è applicabile in un intorno di (y_0, x_0) e troviamo dei valori di ρ e r per cui (4.17) e (4.18) vengano soddisfatte con $X_0 = \{x : |x - x_0| \leq r\}$.

$F(0, 1, 1) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = e^y - x_1 \cos(yx_1 + \frac{x_2\pi}{2})$, e $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1, 1) = 1$. Quindi il teorema è applicabile nell'intorno di (y_0, x_0). Diamo ora delle stime concrete su ρ e r; per semplificare tali stime useremo le seguenti disuguaglianze elementari[7]:

$$\begin{aligned} &|1 - \cos y| \leq \frac{y^2}{2} \ , \qquad \forall\, y \in \mathbb{R} \ , \\ &|e^y - 1| \leq (e-1)|y| < 2|y| \ , \qquad \forall\, |y| \leq 1 \ . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Poiché $F(y_0, x) = 1 - \operatorname{sen}\frac{x_2\pi}{2}$, scrivendo $x_2 = 1 + a$ con $|a| \leq r$ ed usando la prima disuguaglianza in (4.29) otteniamo

$$\begin{aligned} \sup_{X_0} |F(y_0, x)| &= \sup_{|x_2 - 1| \leq r} |1 - \operatorname{sen}\frac{x_2\pi}{2}| \\ &= \sup_{|a| \leq r} |1 - \operatorname{sen}\frac{(1+a)\pi}{2}| = \sup_{|a| \leq r} |1 - \cos\frac{a\pi}{2}| \\ &\leq \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi r}{2}\Big)^2 < 2r^2 \ . \end{aligned} \tag{4.30}$$

Quindi, poiché $T = 1$ (e quindi $\|T\| = 1$), la condizione (4.17) è soddisfatta se scegliamo $r = \rho/2$. Passiamo alla condizione (4.18). Per ogni $|y| \leq \rho$ e $|x - (1, 1)| \leq r$, scrivendo ancora $x_2 = 1 + a$ con $|a| \leq r$, usando la seconda disuguaglianza in (4.29) e maggiorando $|\operatorname{sen} t|$ con $|t|$, si ha

$$\begin{aligned} |1 - \frac{\partial F}{\partial y}| &= |e^y - 1 - x_1 \cos(yx_1 + \frac{x_2\pi}{2})| \leq |e^y - 1| + |x_1|\,|\operatorname{sen}(yx_1 + \frac{a\pi}{2})| \\ &\leq 2|y| + |x_1|\,(|y|\,|x_1| + \frac{|a|\pi}{2}) \leq 2\rho + (1+r)[\rho(1+r) + \frac{r\pi}{2}] \end{aligned} \tag{4.31}$$

quindi, per la definizione di r, si ottiene

$$\sup_{Y_0 \times X_0} |1 - T\frac{\partial F}{\partial y}| \leq 2\rho + (1 + \frac{\sqrt{\rho}}{2})[\rho(1 + \frac{\sqrt{\rho}}{2}) + \frac{\sqrt{\rho}\pi}{4}]$$

e quindi (4.18) è soddisfatta se prendiamo, ad esempio, $\rho = (1/16)$ (e quindi $r = (1/8)$).

[7] $|1 - \cos y| = |\int_0^y \operatorname{sen} t \; dt| \leq \int_0^{|y|} |\operatorname{sen} t| \; dt \leq \int_0^{|y|} t \; dt = \frac{|y|^2}{2}$.
Per $|y| \leq 1$, $\Big|\frac{e^y - 1}{y}\Big| \leq \sum_{k \geq 1} \frac{|y|^{k-1}}{k!} \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} = e - 1 < 2.$

Esempio 4.7 Sia $F(y_1, y_2, x) := (\,\text{senh}\,(y_2+x)+y_1^2+y_2^2, \frac{1}{8}+y_1+(xy_1)^2)$ e si cerchino soluzioni di $F(g(x), x) = 0$ con g funzione regolare di una variabile reale ed a valori in $\mathbb{R}^2$. Si noti che non vi sono soluzioni ovvie di $F(y_0, x_0) = 0$ e quindi non è possibile applicare immediatamente il teorema delle funzioni implicite nella versione classica della Proposizione 4.3. Proviamo ad applicare la Proposizione 4.4 cercando una "buona" soluzione *approssimata* di $F(y_0, x_0) = 0$ (e fissando le norme $|\cdot|_\infty$). Scegliamo $y_0 = (-\frac{1}{8}, 0)$ e $x_0 = 0$, $T := \Big(\frac{\partial F}{\partial y}(y_0, x_0)\Big)^{-1}$ (che è sempre la scelta più naturale), $X_0 := \{|x| \le r\}$ e cerchiamo di determinare r e ρ cosicché siano soddisfatte (4.17) e (4.18). Lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ è dato da

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y, x) = \begin{pmatrix} 2y_1 & \cosh(y_2 + x) + 2y_2 \\ 1 + 2y_1 x^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} . \tag{4.32}$$

Ora, per $|x| \le r$ (che assumeremo comunque minore di 1)

$$|F(y_0, x)|_\infty = |(\frac{1}{64} + \text{senh}\, x, \frac{x^2}{64})|_\infty \le \frac{1}{64} + \text{senh}\, r \ , \tag{4.33}$$

e poiché $\|T\| = \|T\|_{\infty,\infty} = 5/4$ la (4.17) è implicata da

$$\frac{5}{128} + \frac{5}{2}\,\text{senh}\, r \le \rho \ , \tag{4.34}$$

(si noti che tale relazione ci dice che ρ non potrà esser scelto più piccolo di $5/128$). Per $|x| \le r$, $|y_1 + \frac{1}{8}| \le \rho$ e $|y_2| \le \rho$ (e assumendo che $\rho + r < 1$) si ha che[8]

$$\begin{aligned} \|I - T\frac{\partial F}{\partial y}\| \ &= \ \left\| \begin{pmatrix} 2y_1 x^2 & 0 \\ 2y_1 + \frac{1}{4} + \frac{y_1 x^2}{2} & \cosh(y_2 + x) - 1 + 2y_1 \end{pmatrix} \right\| \\ &\le \ \max\Big\{ 2|y_1| r^2 + 2\rho + \frac{|y_1| r^2}{2} \ , \ (\rho + r)^2 + 2|y_1| \Big\} \ . \end{aligned} \tag{4.36}$$

Osservando che $|y_1| \le \frac{1}{8} + \rho$ e scegliendo $\rho = \frac{1}{10}$ e $r = \frac{1}{50}$, da (4.34) e da (4.36) segue che (4.17) ed (4.18) sono soddisfatte e che, dunque, valgono le tesi della Proposizione 4.4.

Se la funzione F del teorema delle funzioni implicite è più regolare, lo è anche la funzione implicita g:

Proposizione 4.8 *Siano Y_0 e X_0 due insiemi aperti di, rispettivamente, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ e sia k un intero positivo o $+\infty$. Supponiamo che $F \in C^k(Y_0 \times X_0, \mathbb{R}^n)$, che $\frac{\partial F}{\partial y}$ sia invertibile $\forall$ $(y, x) \in Y_0 \times X_0$ e che $g \in C(X_0, Y_0)$ verifichi $F(g(x), x) = 0$ per ogni $x \in X_0$. Allora $g \in C^k(X_0)$ ed in particolare, per ogni $1 \le j \le m$ e per ogni $x \in X_0$, si ha*

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = -\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(g(x), x)\Big)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(g(x), x) \ . \tag{4.37}$$

Dimostrazione Fissiamo $x \in X_0$, $1 \le j \le m$ e poniamo, per $t \in \mathbb{R}$:

$$\xi(t) := x + te^{(j)} \ , \qquad \eta(t) := g(x + te^{(j)})$$

[8] In tali disuguaglianze si è usato che, se $|t| \le 1$ allora

$$0 \le \cosh t - 1 \le t^2 \ , \tag{4.35}$$

infatti $\cosh t - 1 = t^2 \sum_{j=1}^\infty \frac{t^{2(j-1)}}{(2j)!} \le t^2 \sum_{j=2}^\infty \frac{1}{j!} < t^2$.

dove, come al solito $e^{(j)}$ è il versore (in $\mathbb{R}^m$) nella j–esima direzione. Per $|t|$ sufficientemente piccolo, diciamo $|t| \le a$, si ha $(\eta(t), \xi(t)) \in Y_0 \times X_0$ e $(\eta(0), \xi(0)) = (g(x), x)$. Consideriamo ora la matrice

$$M(t) := \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y}(\eta(0) + s(\eta(t) - \eta(0)), \xi(t))ds$$

ed osserviamo che $t \in [-a, a] \to M(t) \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ è una funzione continua e che $M(0) = \frac{\partial F}{\partial y}(g(x), x)$. Ora, per il teorema del valor medio in $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{F\big(\eta(t), \xi(t)\big) - F\big(\eta(0), \xi(0)\big)}{t} \\ &= \frac{F\big(\eta(t), \xi(t)\big) - F\big(\eta(0), \xi(t)\big)}{t} + \frac{F\big(\eta(0), \xi(t)\big) - F\big(\eta(0), \xi(0)\big)}{t} \\ &= M(t)\frac{\eta(t) - \eta(0)}{t} + \frac{F\big(\eta(0), \xi(t)\big) - F\big(\eta(0), \xi(0)\big)}{t} \ , \end{aligned}$$

e moltiplicando (a sinistra) tale relazione per $M(0)^{-1}$ e prendendo il limite per $t \to 0$, si ottiene (4.37). Sia ora $k > 1$ ed assumiamo induttivamente che $g \in C^{k-1}$. Essendo $F \in C^k$, dalla identità (4.37) segue che $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ è di classe C^{k-1} (per ogni j) il che è naturalmente equivalente a dire che $g \in C^k$. ∎

3 Teorema della funzione inversa e diffeomorfismi

Un importante corollario del teorema delle funzioni implicite è il seguente risultato che fornisce un criterio per decidere quando una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia (localmente) *invertibile*.

Teorema 4.9 (Teorema della funzione inversa)

Sia k un intero positivo o $+\infty$ e sia f una funzione C^k in un intorno di un punto $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ed a valori in $\mathbb{R}^n$. Se la matrice jacobiana $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$ è invertibile, allora esiste (ed è unica) la funzione inversa g di f. Tale funzione g è C^k in un intorno di $x_0 = f(y_0)$ e vale

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = T \ , \qquad \text{con} \qquad T := \big(\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)\big)^{-1} \ . \tag{4.38}$$

Più precisamente, sia ρ tale che

$$\sup_{Y_0} \|I - T\frac{\partial f}{\partial y}(y)\| \le \frac{1}{2} \tag{4.39}$$

con $Y_0 := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \le \rho\}$. Allora, se poniamo $r := \rho(2\|T\|)^{-1}$ e $X_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \le r\}$, esiste una unica $g \in C^k(X_0, Y_0)$ tale che $g(x_0) = y_0$, $f(g(x)) = x$ in X_0 e $g(f(y)) = y$ in[9] $g(X_0)$.

Dimostrazione Basta porre $F(y, x) = f(y) - x$. Per definizione di x_0, $F(y_0, x_0) = 0$ e $F \in C^1(Y_0 \times X_0)$. Inoltre $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ e $F(y_0, x) = f(y_0) - x = x_0 - x$, quindi la condizione (4.17) è automaticamente soddisfatta grazie alla definizione di r. Da queste osservazioni, dalla Proposizione 4.4 e dalla Proposizione 4.8 seguono tutte le tesi del Teorema 4.9 tranne quella sull'identità $g(f(y)) = y$. Sia $\bar{y} \in g(X_0)$, ovvero sia $\bar{y} = g(\bar{x})$ per qualche $\bar{x} \in X_0$. Allora, essendo $f(g(x)) = x$ per $x \in X_0$, si ha che $f(\bar{y}) = \bar{x}$, da cui $g(f(\bar{y})) = g(\bar{x}) = \bar{y}$. ∎

[9] $g(X_0)$ è l'insieme dei valori $g(x)$ per x che varia in X_0.

Corollario 4.10 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Allora f è invertibile su A con inversa C^1 se e solo se f è iniettiva e lo jacobiano $\frac{\partial f}{\partial y}(y)$ è invertibile per ogni $y \in A$.*

Dimostrazione "se": chiamiamo g, definita per $x \in B := f(A)$, la funzione inversa di f (che esiste per ipotesi essendo f iniettiva su A). Se lo jacobiano $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$ è invertibile ($y_0 \in A$), dal Teorema 4.9 segue che $g \in C^1\{x_0\}$ con $x_0 := f(y_0)$.
"solo se": se $f(y_0) = x_0$ e $g \in C^1\{x_0\}$ è la funzione inversa di f, calcolando lo jacobiano in x_0 della relazione $f \circ g(x) = x$ (che vale in un intorno di x_0) si ottiene $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = I$ il che significa che la matrice $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0)$ è l'inversa della matrice $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$. ∎

Osservazione 4.11 Si noti che le ipotesi di questo risultato non possono essere indebolite:

(i) la funzione $f : y \in (-1,1) \to y^3 \in (-1,1)$ è biunivoca su $(-1,1)$, C^∞ ma il suo jacobiano (che in questo caso coincide con la derivata $f'(y) = 3y^2$) non è invertibile in $y = 0$ ed infatti la funzione inversa $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ è continua ma non è derivabile in $x = 0$;

(ii) la funzione $f : A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x^2 + y^2 < 1\} \to (x^2 - y^2, 2xy) \in \mathbb{R}^2$ è $C^\infty(A, \mathbb{R}^2)$, ha jacobiano $f' = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ invertibile su tutto A, $f(A) = A$, ma f non è iniettiva su A (e quindi non invertibile *globalmente* su A): per ogni $(x_0, y_0) \in A$ si hanno esattamente due soluzioni di $f(x,y) = (x_0, y_0)$ e sono date da

$$(x,y) = \pm\left(\sqrt{\frac{r_0 + x_0}{2}}, \sigma\,\sqrt{\frac{r_0 - x_0}{2}}\right) \ ,$$

dove $r_0 := \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ e $\sigma = \text{segno}(y_0)$ se $y_0 \neq 0$ e 1 se $y_0 = 0$.

Un'altra conseguenza del teorema della funzione inversa è che funzioni con jacobiano invertibile mandano insiemi aperti in insiemi aperti:

Corollario 4.12 (Teorema della applicazione aperta) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ ed assumiamo che* $\det \frac{\partial f}{\partial y}(y) \neq 0$ *per ogni $y \in A$. Allora f è una "applicazione aperta", ovvero, per ogni aperto $B \subseteq A$ l'insieme $f(B) := \{f(y) : y \in B\}$ è un insieme aperto.*

Dimostrazione Sia B un sottoinsieme aperto di A e sia $\bar{x} = f(\bar{y})$ per un qualche $\bar{y} \in B$. Per il teorema della funzione inversa, sulla sfera aperta $\mathring{X}_0$ attorno a $\bar{x}$ è definita l'inversa di f, g, che manda $\mathring{X}_0$ in $Y_0 \subseteq B$. Ma questo significa che $\mathring{X}_0 \subseteq f(B)$ ovvero che l'insieme $f(B)$ è aperto. ∎

4 Diffeomorfismi e integrazione: Il teorema del cambio di variabili

Teorema 4.13 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto misurabile e $\phi \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$ tale che*[10]

$$\phi \text{ è iniettiva in } A \ , \qquad \det \phi' \neq 0 \quad \text{su } A \ . \tag{4.40}$$

Allora $B := \phi(A)$ è un aperto misurabile di $\mathbb{R}^n$ e se f è una funzione integrabile su B allora $f \circ \phi$ è integrabile su A e si ha che

$$\int_B f(y)dy = \int_A f \circ \phi(x) \left| \det \phi'(x) \right| dx \ . \tag{4.41}$$

[10] Si ricorda che $\phi' = \phi'(x)$ denota lo jacobiano di ϕ ossia la matrice con elementi $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$.

In particolare, per $f \equiv 1$, si ha

$$\mathrm{mis}(\phi(A)) = \int_A \big|\det \phi'(x)\big| dx \ . \tag{4.42}$$

In questo paragrafo $|x|$ denota la norma del sup in $\mathbb{R}^n$ ($|x| = \max_i |x_i|$) e, se T è una matrice, $\|T\|$ la relativa norma matriciale ($\|T\| = \sup_{|x|=1} |Tx|$).
Cominciamo con il seguente

Lemma 4.14 *Siano A e ϕ come nel Teorema 4.13. Allora*
(i) *$B = \phi(A)$ è un aperto misurabile di $\mathbb{R}^n$.*
(ii) *Per ogni insieme D tale che $\overline{D} \subseteq A$ si ha che $\partial\phi(D) = \phi(\partial D)$; se D è misurabile lo è anche $\phi(D)$.*

Dimostrazione (i) Ovviamente B è limitato (essendo ϕ continua sulla chiusura di A). Dal Corollario 4.12 segue che B è un insieme aperto.
Dimostriamo ora che

$$\partial B \subseteq \phi(\partial A) \ . \tag{4.43}$$

Sia $y \in \partial B$. Essendo B aperto, $y \notin B$ ed esistono $y_n \in B$ tali che $y_n \to y$. Siano $x_n \in A$ tali che $\phi(x_n) = y_n$. Poiché $\overline{A}$ è compatto, esiste una sottosuccesione x_{n_k} in $\overline{A}$ tale che $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in \overline{A}$. Per la continuità di ϕ, $\phi(x_{n_k}) = y_{n_k} \to \phi(x)$, cioè $y = \phi(x)$. Inoltre $x \in \partial A$: se fosse $x \in A$, $y = \phi(x)$ apparterrebbe a B ed avremmo una contraddizione. La (4.43) è dimostrata.
Poiché A è misurabile, la sua frontiera ha misura nulla (2.12); quindi (essendo ϕ uniformemente Lipschitziana su $\overline{A}$) da 2.14–(ii) segue che anche $\phi(\partial A)$ ha misura nulla e quindi, per (4.43), anche ∂B ha misura nulla; dunque per 2.12 possiamo concludere che B è misurabile.
(ii) Dalle ipotesi (4.40) e dal teorema della funzione inversa segue che ϕ è un omemomorfismo[11] da A su B e questo implica, in particolare, che $\partial\phi(D) = \phi(\partial D)$ per ogni insieme D tale che $\overline{D} \subseteq A$ (cosicché anche $\partial D \subseteq A$). Da 2.14–(ii) e 2.12 segue che se D è misurabile, lo è anche $\phi(D)$. ∎

La presenza del determinante nel Teorema 4.13 verrà chiarito nel Lemma 4.16. Prima di enunciare tale lemma, ricordiamo le proprietà fondamentali del determinante ed introduciamo il concetto di parallelepipedo n–dimensionale.

Si ricordi[12] che il determinante, visto come funzione delle colonne, è caratterizzato dalle seguenti tre proprietà: 1) scambiando di posto a due colonne, il valore del determinante cambia segno, 2) il determinante è una funzione lineare della prima colonna[13], 3) il determinante di $(e^{(1)}, ..., e^{(n)})$, dove $\{e^{(i)}\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^n$, vale 1. Tale caratterizzazione significa che se Δ è una funzione a valori reali e definita su n–nuple di vettori in $\mathbb{R}^n$ che verifica

$$\begin{aligned}
&1) \quad \Delta(..., v^{(i)}, ..., v^{(j)}, ...) = -\Delta(..., v^{(j)}, ..., v^{(i)}, ...) \ , \quad i \neq j \ , \\
&2) \quad \Delta(av^{(1)} + bw^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \\
&\qquad\qquad = a\Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + b\Delta(w^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ , \\
&3) \quad \Delta(e^{(1)}, ..., e^{(n)}) = 1 \ ,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

(dove la scrittura simbolica nel punto 1) sta a significare che scambiando l'i–esimo argomento lo j–esimo, il valore di Δ cambia segno) allora Δ coincide con il determinante, cioè

$$\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = \det[v^{(1)}, ..., v^{(n)}] = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma v^{(1)}_{\sigma_1} \cdots v^{(n)}_{\sigma_n} \ ,$$

[11] Ossia una funzione continua, invertibile con inversa continua.
[12] Si veda Appendice B.
[13] E dunque, per 1), il determinante è una funzione lineare della j–esima colonna, con j qualunque.

dove la sommatoria è estesa a tutte le permutazioni σ dell'insieme $\{1, ..., n\}$ e ε_σ denota il[14] "segno di σ".

Siano, ora, $v^{(1)}$,..., $v^{(n)}$, n vettori in $\mathbb{R}^n$ e sia $T := [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$ la matrice che ha come j–esima colonna le n componenti, $v_i^{(j)}$, di $v^{(j)}$.

Definizione 4.15 *Si chiama "parallelepipedo con lati $v^{(1)}, ..., v^{(n)}$" (o anche "parallelepipedo generato da $v^{(1)}, ..., v^{(n)}$") l'insieme*

$$\Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) := \{y \in \mathbb{R}^n : \ y = \sum_{j=1}^n x_j v^{(j)} \ \text{ con } \ 0 \le x_j \le 1 \ , \forall 1 \le j \le n\} \ . \tag{4.45}$$

Se $x \in \mathbb{R}^n$, $Tx = \sum_{j=1}^n x_j v^{(j)}$, dunque da tale definizione segue immediatamente che

$$\Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = TK_1 \ , \qquad \Big(T := [v^{(1)}, ..., v^{(n)}] \ , K_1 := [0,1]^n\Big) \ . \tag{4.46}$$

Lemma 4.16 *Sia T una matrice $(n \times n)$ e $K_1 = [0,1]^n$. Allora*[15]

$$\text{mis}_n(TK_1) = \big|\det T\big| \ . \tag{4.47}$$

Inoltre se R un rettangolo limitato di $\mathbb{R}^n$ si ha

$$\text{mis}_n(TR) = \big|\det T\big| \,\text{mis}_n\, R \ . \tag{4.48}$$

Dimostrazione Il caso $n = 1$ (e quindi $T \in \mathbb{R}$) è immediato essendo $T[0,1] = [0,T]$ se $T \ge 0$ e $[T,0]$ se $T < 0$, la cui misura è $|T|$ in entrambi i casi.

Consideriamo $n \ge 2$. Identificando una n-pla di vettori in $\mathbb{R}^n$, $(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$, con la matrice $T := [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$, definiamo

$$\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) := \text{mis}\Big(\Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)})\Big) \ , \tag{4.49}$$

e[16]

$$\Delta(T) := \text{ segno}\,(\det T) \ \Delta_0(T) \ . \tag{4.50}$$

Si noti che se $\det T = 0$, $\Pi(T)$ è contenuto in uno spazio vettoriale di dimensione $m < n$ e dunque , in tal caso, $\text{mis}(\Pi(T)) = 0$ e $\Delta(T) = 0$.

Per dimostrare (4.47) basterà dimostrare che la funzione Δ verifica 1), 2), 3) di (4.44) cosicché si avrà $\Delta(T) = \det T$ e prendendo il modulo di tale relazione si otterrà (4.47).

Dalla definizione di $\Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$ segue che

$$\Pi(..., v^{(i)}, ..., v^{(j)}, ...) = \Pi(..., v^{(j)}, ..., v^{(i)}, ...) \tag{4.51}$$

e da (4.46) e da (4.50) segue immediatamente che, scambiando due vettori di posto, Δ cambia segno: la proprietà 1) è verificata.

È anche chiaro che

$$\Pi(e^{(1)}, ..., e^{(n)}) = K_1 \tag{4.52}$$

[14] Una permutazione σ di $\{1, ..., n\}$ è una mappa uno–uno $\sigma : j \in \{1, ..., n\} \to \sigma_j \in \{1, ..., n\}$ e ε_σ è il segno di σ (cioè $(-1)^p$ dove p è il numero di scambi che bisogna fare per ordinare la n–nupla $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ o, più analiticamente, $\varepsilon_\sigma = \prod_{i<j} \text{segno}(\sigma_j - \sigma_i)$).

[15] Si noti che (4.47) è un caso speciale di (4.42) prendendo $x \in \mathbb{R}^n \to \phi(x) = Tx$ (essendo $\phi' = T$) e $A = \mathring{R}$..

[16] Useremo qui la convenzione che $\text{segno}\,(0) = 0$.

e dunque $\Delta(e^{(1)}, ..., e^{(n)}) = 1$ e cioè vale la proprietà 3). Più delicata è la verifica della linearità. Cominciamo con l'osservare che se p è un intero positivo, notando che $[0, p] = \{x_1 p : 0 \le x_1 \le 1\} = \cup_{i=1}^{p} (i-1) + [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\Pi(pv^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) &:= \{x_1 p v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} x_j v^{(j)} : \ 0 \le x_j \le 1\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{p} \{(i-1+x_1) v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} x_j v^{(j)} : \ 0 \le x_j \le 1\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{p} \Big((i-1)v^{(1)} + \Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \Big) \ . \qquad (4.53)
\end{aligned}$$

Poiché l'insieme nell'ultima riga di (4.53) è formato dall'unione di p insiemi di eguale misura (essendo la misura invariante per traslazioni) aventi in comune solo insiemi di misura nulla ("facce" dei parallelepipedi), si ha che la misura di $\Pi(pv^{(1)}, v^{(2)}, ...)$ è p volte la misura di $\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, ...)$; cioè

$$\Delta_0(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \qquad (4.54)$$

vale con $a = p$ intero positivo. Ora se $\det T > 0$ da (4.54) segue

$$\Delta(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \ , \qquad (4.55)$$

e se $\det T < 0$, per (4.54) si ha che

$$\begin{aligned}
\Delta(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) &= -\Delta_0(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) \\
&= -a\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \\
&= a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \ , \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

il che dimostra la (4.55) per ogni T. Ora,

$$\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(p\ \frac{1}{p} v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = p\Delta(\frac{1}{p} v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \qquad (4.57)$$

e quindi (dividendo la (4.57) per p, si vede che) (4.55) vale anche per $a = \frac{1}{p}$ con p intero positivo. Combinando questi due fatti si ottiene subito che (4.55) vale per a numero razionale positivo. Dopodiché osservando che, se $0 < \alpha < \beta$

$$\Pi(\alpha v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \subseteq \Pi(\beta v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \qquad (4.58)$$

si ottiene facilmente (4.54) per $a \in (0, \infty)$: basta infatti considerare due successioni monotone di numeri razionali positivi, $a_i < a < a_i'$ che tendano, rispettivamente da sinistra e da destra al numero reale a, ed usare (4.55) per razionali positivi che insieme alla relazione (4.58) implica

$$a_i \Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \le \Delta_0(av^{(1)}, .., v^{(n)}) \le a_i' \Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$$

e prendendo il limite per $i \to \infty$ si ottiene (4.54) con a numero reale positivo. Da (4.54) segue la (4.55) quando $\det T > 0$ e, nel caso $\det T < 0$, la (4.55) per $a > 0$ segue da (4.56). Per $a = 0$, (4.55) deriva immediatamente dalla definizione, essendo $\det[0, v^{(2)}, .., v^{(n)}] = 0$. Infine, se $a = -1$,

$$\begin{aligned}
v^{(1)} + \Pi(-v^{(1)}, ..., v^{(n)}) &= \{(1-x_1)v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} x_j v^{(j)} : \ 0 \le x_j \le 1\} \\
&= \Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \qquad (4.59)
\end{aligned}$$

e dunque, essendo il segno di $\det(-v^{(1)}, ..., v^{(n)})$ opposto a quello di $\det(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$, si ottiene (4.55) con $a = -1$. Infine se a è un numero reale negativo, $a = -|a|$, si ottiene

$$\Delta(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) = -\Delta(|a|v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \ ,$$

quindi (4.55) è vera per ogni $a \in \mathbb{R}$.
Usando la (già dimostrata) proprietà 1) si ottiene immediatamente che

$$\Delta(v^{(1)}, ..., av^{(j)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \ , \tag{4.60}$$

per qualunque $1 \le j \le n$.
Resta ora da dimostrare

$$\Delta(v + w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ . \tag{4.61}$$

Cominciamo col discutere un caso particolare di (4.61) e cioè $v = v^{(1)}$, $w = v^{(2)}$ (in qual caso il secondo addendo a destra di (4.61) è nullo per definizione di Δ), ossia, dimostriamo che

$$\Delta(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ . \tag{4.62}$$

Se $\det T = \det[v^{(1)}, ..., v^{(n)}] = 0$, la (4.62) è chiaramente vera. Assumiamo che $\det T > 0$ e introduciamo i seguenti "prismi"

$$D_1 := \{x \in K_1 : x_2 \le x_1\} \ , \quad D_2 := \{x \in K_1 : x_2 \ge x_1\} \ , \quad D_3 := e^{(2)} + D_1 \tag{4.63}$$

e si noti che $\mathrm{mis}(D_1 \cap D_2) = 0$, $\mathrm{mis}(D_2 \cap D_3) = 0$; che $\Pi(e^{(1)}, ..., e^{(n)}) = K_1$ e che

$$\begin{aligned}
\Pi(e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(2)}, ..., e^{(n)}) &= \{x_1 e^{(1)} + (x_1 + x_2)e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_i \le 1\} \\
&= \{x_1 e^{(1)} + y e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_1 \le 1 \ , \ x_1 \le y \le 1 + x_1 \ , ...\} \\
&= \{x_1 e^{(1)} + y e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_1 \le 1 \ , \ x_1 \le y \le 1 \ , ...\} \cup \\
&\quad\ \{x_1 e^{(1)} + (1 + y)e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_1 \le 1 \ , \ 0 \le y \le x_1 \ , ...\} \\
&= D_2 \cup \Big(e^{(2)} + D_1\Big) =: D_2 \cup D_3
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Si ricordi anche che, se $T = [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$, $Te^{(i)} = v^{(i)}$ e che, per ogni $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, $AT = [Av^{(1)}, ..., Av^{(n)}]$ e $A\Pi(T) = \Pi(AT)$. Quindi,

$$\begin{aligned}
\Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) &= TK_1 = TD_1 \cup TD_2 \ , \\
\Pi(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) &= \Pi\Big(Te^{(1)} + Te^{(2)}, Te^{(2)}, ..., Te^{(n)}\Big) \\
&= \Pi\Big(T(e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(2)}, ..., e^{(n)})\Big) \\
&= T\Pi(e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(2)}, ..., e^{(n)}) \\
&= TD_2 \cup TD_3 \\
&= TD_2 \cup (v^{(2)} + TD_1) \ .
\end{aligned}$$

Quindi, poiché $\mathrm{mis}(TD_1 \cap TD_2) = 0$ e $\mathrm{mis}(TD_2 \cap TD_3) = 0$ (essendo $x \to Tx$ derivabile) e poiché la misura è invariante per traslazioni, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{mis}\,\big(\Pi(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})\big) &= \mathrm{mis}(TD_2) + \mathrm{mis}(TD_1) \\
&= \mathrm{mis}(TD_1 \cup TD_2) \\
&= \mathrm{mis}\,\big(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}\big) \ ,
\end{aligned}$$

il che dimostra (4.62) nel caso $\det T > 0$; poiché $\det[v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ...] = \det[v^{(1)}, v^{(2)}, ...]$, il caso $\det T < 0$ segue immediatamente. Combinando (4.62) con la proprietà 1) si ottiene

$$\Delta(v^{(1)} + v^{(j)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \tag{4.65}$$

per ogni $2 \le j \le n$. Sia ora a un numero diverso da 0. Allora da (4.60) (con $j = 2$) e da (4.62), si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta(v^{(1)} + av^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) &= \frac{1}{a}\Delta(v^{(1)} + av^{(2)}, av^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\ &= \frac{1}{a}\Delta(v^{(1)}, av^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\ &= \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ . \end{aligned} \tag{4.66}$$

Naturalmente per $a = 0$, l'uguaglianza tra il primo e l'ultimo membro di (4.66) è banalmente vera. Usando ancora la proprietà 1), otteniamo, per ogni $2 \le j \le n$, e per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(v^{(1)} + av^{(j)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ ; \tag{4.67}$$

da tale relazione segue facilmente che, per ogni a_j,

$$\Delta(v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} a_j v^{(j)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ , \tag{4.68}$$

che equivale alla (4.61) nel caso in cui w appartenga allo spazio generato da $\{v^{(j)}, j \ge 2\}$. Naturalmente se $v^{(2)}, ..., v^{(n)}$ sono linearmente dipendenti (4.61) è banalmente vera, essendo entrambi i membri a sinistra e destra dell'uguaglianza nulli. Assumiamo dunque $w =: v^{(1)}$, $v^{(2)}, ..., v^{(n)}$ linearmente indipendenti, cosicché $v^{(1)}, ..., v^{(n)}$ forma una base in $\mathbb{R}^n$. Allora esistono n costanti a_i tali che $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v^{(i)}$ ed usando (4.67) ed (4.55),

$$\begin{aligned} &\Delta(v + w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\ &\quad = \Delta(\sum_{i=1}^{n} a_i v^{(i)} + v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\ &\quad = \Delta((1 + a_1)v^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} a_i v^{(i)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\ &\quad = \Delta((1 + a_1)v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\ &\quad = (1 + a_1)\Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\ &\quad = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(a_1 v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\ &\quad = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(a_1 v^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} a_i v^{(i)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) \\ &\quad = \Delta(v, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ . \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione della proprietà 2) e quindi, per quanto discusso sopra, vale (4.47).

Sia ora R il rettangolo $[0, b_1] \times \cdots \times [0, b_n]$ con $b_n > 0$.
Allora $R = \Lambda K_1$ dove $\Lambda = \operatorname{diag}(b_1, ..., b_n)$ e quindi

$$\begin{aligned} \operatorname{mis}(TR) &= \operatorname{mis}\big(T(\Lambda K_1)\big) = \operatorname{mis}\big((T\Lambda)K_1\big) = |\det(T\Lambda)| \\ &= |\det T| \ |\det \Lambda| = |\det T|(b_1 b_2 \cdots b_n) = |\det T| \operatorname{mis}(R) \ . \end{aligned}$$

E poiché, se $a = (a_1, ..., a_n)$,

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = a + [0, b_1 - a_1] \times \cdots \times [0, b_n - a_n]$$

dall'invarianza della misura per traslazione segue che

$$\text{mis}(TR) = |\det T| \, \text{mis}(R) \tag{4.69}$$

per ogni rettangolo in $\mathbb{R}^n$. $\blacksquare$

Dimostrazione (del Teorema 4.13). Sia $\delta(x) := |\det \phi'(x)|$. Dividiamo la dimostrazione di (4.42) in quattro passi:
(1) per ogni cubo chiuso $D \subseteq A$, vale

$$\text{mis}(\phi(D)) = \int_D \delta(x) dx \ . \tag{4.70}$$

(2) la formula (4.70) vale anche se D è un qualunque insieme misurabile contenuto in A.
(3) per ogni insieme elementare $D \subseteq A$ si ha che

$$\int_{\phi(D)} f = \int_D f \circ \phi \ \delta \ . \tag{4.71}$$

(4) vale (4.41) (e quindi (4.42)).

(1): Sia D un cubo chiuso contenuto in A. Possiamo scrivere per ogni $x \in D$ ed ogni h tale che $x_0 + h \in D$

$$\phi(x_0 + h) = \phi(x_0) + \phi'(x_0)h + \theta(h, x_0) \tag{4.72}$$

con

$$\theta(h, x_0) := \Big[\int_0^1 \Big(\phi'(x_0 + th) - \phi'(x_0)\Big) dt\Big] h \tag{4.73}$$

(si noti che D è un insieme convesso e quindi il segmento $\{x_0 + th : t \in [0,1]\}$ è interamente contenuto in D). Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $s > 0$ tale che

$$|\delta(x) - \delta(y)| \le \varepsilon \ , \quad \Big\|\phi'(x) - \phi'(y)\Big\| \le \varepsilon \tag{4.74}$$

per ogni $x, y \in D$ tali che $|x - y| \le s$. Da (4.74) e (4.73) segue che, per ogni $x \in D$, $x + h \in D$ con $|h| \le s$

$$|\theta(h, x)| \le |h|\varepsilon \ . \tag{4.75}$$

Sia P una partizione di D in cubi di lato r con $r \le s$. Introduciamo la seguente notazione: indichiamo con $K_\rho(x)$ il cubo chiuso di lato ρ centrato in x ovvero:

$$K_\rho(x) := \{y : \ |y - x| \le \frac{\rho}{2}\} \ . \tag{4.76}$$

Dimostriamo che esiste una costante $c_1 > 0$ indipendente da ε tale che, per ogni cubo $K = K_r(x_0) \in \mathscr{R}(P)$ della partizione P,

$$TK_{r(1-c_1\varepsilon)}(y_0) \subseteq \phi(K) \subseteq TK_{r(1+c_1\varepsilon)}(y_0) \ , \tag{4.77}$$

dove $T := \phi'(x_0)$ e $y_0 = T^{-1}\phi(x_0)$. Riscriviamo la (4.77) come

$$K_{r(1-c_1\varepsilon)}(y_0) \subseteq T^{-1}\phi(K) \subseteq K_{r(1+c_1\varepsilon)}(y_0) \ . \tag{4.78}$$

Poiché la mappa $x \to T^{-1}\phi(x)$, su $D = \overline{D} \subseteq A$, è continua, invertibile ed aperta, per il lemma 4.14 si ha che

$$\partial\Big(T^{-1}\phi(K)\Big) = T^{-1}\phi(\partial K)\ . \tag{4.79}$$

Se $x \in \partial K$, cioè, se $x = x_0 + h$ con $|h| = \frac{r}{2}$, usando (4.72) (moltiplicata per T^{-1}), si ottiene

$$\begin{aligned} |T^{-1}\phi(x) - y_0| &= |h + T^{-1}\theta| \\ &\geq |h| - |T^{-1}\theta| = \frac{r}{2} - |T^{-1}\theta| \\ &\geq \frac{r}{2}(1 - \|T^{-1}\|\,\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.80}$$

dove, nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato (4.75). Se poniamo

$$c_1 = \sup_D \Big\|\big(\phi'\big)^{-1}\Big\| \tag{4.81}$$

otteniamo che un punto sulla frontiera di $T^{-1}\phi(K)$ ha distanza (in norma del massimo $|\cdot|$) *almeno* $\frac{r}{2}(1 - c_1\varepsilon)$ da y_0 e quindi

$$K_{r(1-c_1\varepsilon)}(y_0) \subseteq T^{-1}\phi(K)\ .$$

Analogamente, se x è un punto di K, e quindi $x = x_0 + h$ con $|h| \leq \frac{r}{2}$,

$$\begin{aligned} |T^{-1}\phi(x) - y_0| &= |h + T^{-1}\theta| \\ &\leq |h|(1 + c_1\varepsilon) \leq \frac{r}{2}(1 + c_1\varepsilon)\ , \end{aligned} \tag{4.82}$$

ovvero vale anche la seconda inclusione di (4.78).

Sia $\varepsilon > 0$ e s come in (4.74). Dimostriamo che esiste una costante c_2 (indipendente da ε) tale che, per ogni cubo $K = K_r(x_0) \subseteq D$ con $r \leq s$, si ha

$$\Big|\delta(x_0)\,\mathrm{mis}\,\big(K\big) - \mathrm{mis}\,\big(\phi(K)\Big| = \Big|\,\mathrm{mis}\,\big(\phi'(x_0)\,K\big)\ -\ \mathrm{mis}\,\big(\phi(K)\Big| \leq c_2\,\varepsilon\ \mathrm{mis}(K)\ . \tag{4.83}$$

La prima uguaglianza è conseguenza del Lemma 4.16. Ora, assumiamo (senza perdere generalità) che $\varepsilon < 1$ e $c_1\varepsilon < 1$ ed osserviamo che dalla formula del binomio di Newton segue che

$$\begin{aligned} &1 = (1 - c_1\varepsilon + c_1\varepsilon)^n \leq (1 - c_1\varepsilon)^n + \bar{c}\varepsilon\ , \qquad \bar{c} := c_1 \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}\ , \\ &1 = (1 + c_1\varepsilon - c_1\varepsilon)^n \geq (1 + c_1\varepsilon)^n - \bar{c}\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Quindi, se poniamo $y_0 := (\phi'(x_0))^{-1}\phi(x_0)$ e $c_2 := \bar{c}\,\sup_A |\det\phi'(x)|$, si ha che

$$\begin{aligned} \mathrm{mis}\,\big(\phi'(x_0)\,K\big) &= |\det\phi'(x_0)|\,r^n \\ &\leq |\det\phi'(x_0)|\,\Big(r(1 - c_1\varepsilon)\Big)^n + c_2\,\varepsilon\,r^n \\ &= |\det\phi'(x_0)|\ \mathrm{mis}\,\big(K_{r(1-c_1\varepsilon)}(y_0)\big) + c_2\,\varepsilon\ \mathrm{mis}(K) \\ &= \mathrm{mis}\,\big(\phi'(x_0)\,K_{r(1-c_1\varepsilon)}(y_0)\big) + c_2\,\varepsilon\ \mathrm{mis}(K) \\ &\leq \mathrm{mis}\,\Big(\phi(K)\Big) + c_2\,\varepsilon\ \mathrm{mis}(K)\ . \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si ottiene

$$\operatorname{mis}\big(\phi'(x_0)\,K\big) \geq \operatorname{mis}\Big(\phi(K)\Big) - c_2\,\varepsilon\,\operatorname{mis}(K)$$

e, dunque, la validità di (4.83).

Ora, sia $\varepsilon > 0$ arbitrario e s come sopra e sia P una qualunque partizione del cubo D con $\mathscr{R}(P)$ formata da cubi R_j di lato $r \leq s$ e centro $x^{(j)}$. Allora, per (4.74) e (4.83), si ha

$$\begin{aligned}
\Big|\int_D \delta - \operatorname{mis}(\phi(R))\Big| &= \Big|\sum_j \int_{R_j} \delta - \sum_j \operatorname{mis}(\phi(R_j))\Big| \\
&\leq \sum_j \Big|\int_{R_j} \delta\; - \delta(x^{(j)})\operatorname{mis}(R_j)\Big| \\
&\qquad + \sum_j \Big|\delta(x^{(j)})\operatorname{mis}(R_j) - \operatorname{mis}(\phi(R_j))\Big| \\
&\leq \varepsilon \sum_j \operatorname{mis}(R_j) + c_2\varepsilon \sum_j \operatorname{mis}(R_j) \\
&\leq \operatorname{mis}(A)(1+c_2)\,\varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la (4.70) con D cubo chiuso in A.

(2): Sia R un qualunque rettangolo chiuso contenuto in A, sia $\varepsilon > 0$ e siano K_j cubi come in 2.10. Siano $R_1 := \cup_j K_j$ e $R_2 = R \backslash R_1$. Allora[17], per **(1)**,

$$\int_{R_1} \delta = \sum_{i=1}^N \int_{K_i} \delta = \sum_{i=1}^N \operatorname{mis}(\phi(K_i)) = \operatorname{mis}(\phi(R))$$

da cui

$$\begin{aligned}
\Big|\int_R \delta - \operatorname{mis}(\phi(R))\Big| &= \Big|\int_{R_2} \delta - \operatorname{mis}(\phi(R_2))\Big| \\
&\leq \Big(\sup_A \delta + L^n + 1\Big)\,\varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la (4.70) vale con $D = R$ rettangolo chiuso contenuto in A. Se $D \subseteq A$ è un insieme elementare, la (4.70) segue poiché D è unione di rettangoli chiusi che hanno in comune al più insiemi di misura zero. Infine se $D \subseteq A$ è un insieme misurabile la (4.70) si ottiene approssimando dall'interno D con insiemi elementari.

(3): Sia $D \subseteq A$ un insieme elementare e siano E ed E' due rettangoli standard tali che $D \subseteq E$ e $C := \phi(D) \subseteq E'$. Dimostriamo innanzitutto che $f \circ \phi$ è integrabile su D. Si noti che

$$(f\circ\phi)_D = f_C \circ \phi\ ; \qquad \chi_R \circ \phi = \chi_{\phi^{-1}(R)}\ . \tag{4.84}$$

Poiché f è integrabile su[18] C, per 2.15, esistono due funzioni a scalini $s_1 \leq f_C \leq s_2$ con $s_i = \sum c_j^{(i)} \chi_{R_j}$ tali che $\int_{E'}(s_2 - s_1) \leq \varepsilon$. Siano $g_i := s_i \circ \phi = \sum_j c_j^{(i)} \chi_{\phi^{-1}(R_j)}$: tali funzioni

[17] Gli R_j hanno in comune al più insieme di misura zero; ϕ è un diffeomorfismo e, per 2.14, manda insieme con misura nulla in insiemi con misura nulla.

[18] Per ipotesi f è integrabile su $B = \phi(A)$ e quindi è integrabile su qualunque sottoinsieme misurabile di B.

sono integrabili su E, $g_1 \le f_C \circ \phi = (f \circ \phi)_D \le g_2$ e, per 2.14 (applicata a $F = \phi^{-1}$), si ha

$$\begin{aligned}\int_E g_2 - g_1 &= \sum_j \big(c_j^{(2)} - c_j^{(1)}\big)\,\mathrm{mis}\,\big(\phi^{-1}(R_j)\big)\\ &\le M^n \sum_j \big(c_j^{(2)} - c_j^{(1)}\big)\,\mathrm{mis}(R_j)\\ &= M^n \int_E s_2 - s_1 \le M^n \varepsilon\ ,\end{aligned}$$

dove M è la costante di Lipschitz di ϕ^{-1} su[19] C. L'integrabilità di $f \circ \phi$ su D (ossia, l'integrabilità di $(f \circ \phi)_D$ su E) segue ora da 2.15–(iii).
Dunque, anche $(f \circ \phi)_D\ \delta_D$ è integrabile su E. Sia ora P' una qualunque partizione di E' così fine che i rettangoli che intersecano C (ossia i rettangoli in $\mathscr{R}_C(P')$) siano contenuti in B dove è definita ϕ^{-1} e cosicché l'unione degli $\phi^{-1}(R)$ al variare di R in $\mathscr{R}_C(P')$ ricoprono D. Ora, ricordando (4.84), si ha che

$$\begin{aligned}\int_D f \circ \phi\ \delta &= \int_E (f \circ \phi)_D\ \delta_D\\ &= \sum_{R \in \mathscr{R}_C(P')} \int_{\phi^{-1}(R)} (f \circ \phi)_D\ \delta_D\\ &\le \sum_{R \in \mathscr{R}_C(P')} \Big(\sup_{\phi^{-1}(R)} (f \circ \phi)_D\Big) \int_{\phi^{-1}(R)} \delta\\ &= \sum_{R \in \mathscr{R}_C(P')} (\sup_R f_C)\,\mathrm{mis}\,R\\ &= \overline{S}(f_C, P')\end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza si è usato il punto **(2)** con D sostituito da $\phi^{-1}(R)$. Prendendo l'estremo inferiore su tutte le partizioni P' di E', segue che

$$\int_D f \circ \phi\ \delta \le \int_C f\ .$$

La disuguaglianza inversa si dimostra in maniera del tutto analoga.

(4): Poiché A è misurabile, la sua frontiera è misurabile ed ha misura nulla. Quindi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un insieme elementare $G \supseteq \partial A$ di misura minore di ε. Definendo $D := A \backslash G$ (che è un sottoinsieme elementare di A per cui vale la (4.71)) si ha che

$$\begin{aligned}\Big|\int_A f \circ \phi\ \delta - \int_B f\Big| &= \Big|\int_{A\backslash D} f \circ \phi\ \delta - \int_{\phi(A\backslash D)} f\Big|\\ &\le \int_{A\backslash D} |f \circ \phi|\ \delta + \int_{\phi(A\backslash D)} |f|\\ &\le \sup_B |f| (\sup_A \delta + L^n)\,\mathrm{mis}(A\backslash D)\\ &\le \sup_B |f| (\sup_A \delta + L^n)\,\mathrm{mis}\,G\\ &\le \sup_B |f| (\sup_A \delta + L^n)\ \varepsilon\ ,\end{aligned}$$

[19] Si ricorda che se $F \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$ con $E \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e convesso allora F è uniformemente Lipschitziana su E con costante di Lipschitz (rispetto alle norme del sup) $\max_E \|F'\|$ (come deriva immediatamente dal teorema della media integrale: $F(x) - F(y) = \big[\int_0^1 F(y + t(x-y))dt\big](x-y)$. Si ricorda anche che dal teorema della funzione inversa ϕ^{-1} è C^1 su B.

e dall'arbitrarietà di ε segue (4.41). ∎

5 *Esercizi e complementi*

Esercizio 4.1 Data la funzione $F(y,x) = x^2 + x^4y^2 + \operatorname{sen} xy$ determinare i punti dove è possibile applicare il Teorema delle Funzioni Implicite.

Esercizio 4.2 Sia F la funzione:

$$F(y,x) = x + x^3y^2 + y + \frac{\operatorname{sen} xy - xy}{x} \ .$$

Dire se è possibile applicare il Teorema delle funzioni implicite in $(0,0)$ ed in caso affermativo calcolare $y'(0)$ e $y''(0)$.

Esercizio 4.3 Sia $f(x,y) := \Big(\operatorname{sen}(x-y^2), x^4 + \tan y \Big)$. Si enunci il teorema della funzione inversa, si dimostri che f è invertibile in un intorno di $(0,0)$ e si trovi una sfera su cui è definita la funzione inversa.

Esercizio 4.4 (i) Si dica quante funzioni continue $(x,y) \to z(x,y)$ soddisfano l'equazione $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$ nell'intorno di $(x,y) = (0,0)$.
(ii) Si calcolino le derivate parziali delle funzioni di cui al punto (i) (sempre in un intorno dell'origine).

Esercizio 4.5 Si verifichi che le condizioni (4.17) e (4.18) nel Teorema 4.3 possono essere sostituite da (4.20) e (4.21) con un qualunque $\alpha \in (0,1)$.

Esercizio 4.6 (i) Sia $F(y,x) = y^2 + x^2 - 1$, con $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ e si fissi $(y_0, x_0) = (1,0)$. Si trovino ρ ed r tali che (4.17) e (4.18) valgano.

(ii) Si dimostri che il valore $r = (1/\sqrt{2})$ è il valore massimo che si può ottenere anche se si usano (4.20) e (4.21) facendo variare $\alpha \in (0,1)$.

Esercizio 4.7 Sia $F : (y,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to F(y,x) \in \mathbb{R}^2$ definita come

$$\begin{aligned} F_1(y_1,y_2,x) &= \operatorname{sen} x + e^x y_1 + x \operatorname{sen}(y_1y_2) \ , \\ F_2(y_1,y_2,x) &= 3|x| + y_2 + y_1^4 \ , \end{aligned} \tag{4.85}$$

e sia $(y_0, x_0) := (y_{01}, y_{02}, x_0) = (0,0,0)$. Si dica se il Teorema 4.3 è applicabile in un intorno di (y_0, x_0) e se sì si trovino dei valori di ρ e r per cui (4.17) e (4.18) vengano soddisfatte.

Esercizio 4.8 Si consideri la funzione $f : y \in \mathbb{R}^2 \to f(y) = (f_1(y), f_2(y)) \in \mathbb{R}^2$ definita come

$$f_1 = y_1 + y_1^2 \cos y_2 \ , \qquad f_2 = y_2 + y_1^2 \ . \tag{4.86}$$

Si dica se la funzione f è invertibile in un intorno di $y_0 = (0,0)$ e se sì , si dia una stima di ρ in modo tale che valga (4.39).

Esercizio 4.9 Si studi il luogo dei punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{2} - \cos x = E\}$ al variare del parametro reale E.

Esercizio 4.10 Sia $E_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2\}$ e sia K_r il quadrato chiuso di lato $2r$ centrato nell'origine. Dimostrare che nell'intorno di $(0,0)$ è applicabile il teorema delle funzioni implicite ma che non esiste $r > 0$ tale che $E_0 \cap K_r$ possa essere espresso come grafico di una funzione delle x o delle y.

Esercizio 4.11 Sia $\varepsilon \geq 0$ e $f(x) := x + \varepsilon g(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e $g \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, dove $D := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. Trovare $\varepsilon_0 > 0$ tale che f sia invertibile (con inversa C^1) su D.

Esercizio 4.12 Si dimostri che 1) e 2) di (4.44) implicano che Δ è lineare rispetto al j–esimo vettore, con j arbitrario.

Esercizio 4.13 Si dimostri che se $\Delta = \Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$ è una funzione definita su n–nuple di vettori in $\mathbb{R}^n$ che verifica (4.44), allora $\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = \det[v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$.

Esercizio 4.14 Sia $R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ e si dimostri che $R = \cup K_j$ con K_j cubi chiusi tali che $m(K_i \cap K_j) = 0$ se $i \neq j$.

Esercizio 4.15 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $\phi \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Dimostrare che ϕ è invertibile con inversa C^1 se e solo se ϕ è iniettiva e $\det \phi' \neq 0$ su A.

Esercizio 4.16 Sia $F(y)$ la trasformazione inversa della ϕ del Teorema 4.13 cioè

$$F : y \in B := \phi(A) \to x = F(y) \in A \ . \tag{4.87}$$

(i) Dimostrare che la coppia B e F verifica le ipotesi del Teorema 4.13.
(ii) Dimostrare che se g è una funzione integrabile su $A = F(B)$, allora si ha

$$\int_A g(x)dx = \int_B g \circ F(y) \cdot \big|\det \frac{\partial F}{\partial y}(y)\big| dy \ . \tag{4.88}$$

Esercizio 4.17 (Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$) Sia $B := (0, R) \times (0, 2\pi)$ e $F : B \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F : (\rho, \theta) \in B \to x = (\rho \cos\theta, \rho \,\mathrm{sen}\, \theta) \ . \tag{4.89}$$

(i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del Teorema 4.13 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y := (\rho, \theta)$).
(ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ.
(iii) Qual è l'immagine, secondo F, di un rettangolino $[r, r + s] \times [\theta, \theta + \sigma]$?

Esercizio 4.18 (i) Si dimostri che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{4.90}$$

(ii) Si dimostri che

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{\frac{n}{2}} \ . \tag{4.91}$$

Esercizio 4.19 Per ogni $m \in \mathbb{N}$, si calcoli $I_m := \displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-x^2} dx$.

Esercizio 4.20 Sia $A := B'_R := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < R\}$ e sia

$$\phi(x) := (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2) \ .$$

(i) Si dimostri che $\delta := |\det \phi'| > 0$ per ogni $x \in A$ ma che

$$\int_A \delta \ dx = 2\pi R^4$$
$$\phi(A) = B'_{R^2} \qquad \Longrightarrow \qquad m(\phi(A)) = \pi R^4 \ .$$

(ii) Si spieghi perchè non vale la tesi del Teorema 4.13.
(iii) Si trovi un insieme A' su cui, invece, valga la tesi del Teorema 4.13.

Esercizio 4.21 **(Coordinate polari in $\mathbb{R}^3$)** Sia $B := (0, R) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ e $F : B \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F : (\rho, \theta, \psi) \in B \to x = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\psi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi, \rho \cos\psi) \ . \tag{4.92}$$

(i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del Teorema 4.13 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y := (\rho, \theta, \psi)$).
(ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ.

Esercizio 4.22 **(Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$)** Sia $B := (0, R) \times (0, 2\pi) \times (-h, h)$ e $F : B \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F : (\rho, \theta, z) \in B \to x = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z) \ . \tag{4.93}$$

(i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del Teorema 4.13 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y := (\rho, \theta, z)$).
(ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ.

Esercizio 4.23 **(Solidi di rotazione in $\mathbb{R}^3$)** Sia $E_0 \subseteq (0, \infty) \times \mathbb{R}$ un insieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ e α un numero in $(0, 2\pi]$. Si dimostri che

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = \rho \cos\theta, \ y = \rho \operatorname{sen}\theta, \quad \text{con } (\rho, z) \in E_0 \ , \ \text{e } \theta \in [0, \alpha]\}$$

è un insieme misurabile in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli il volume in termini di un integrale doppio su E_0.

Esercizio 4.24 Si calcoli il volume del toro solido ottenuto ruotando un disco di raggio r attorno ad un asse a distanza $R > r$ dal centro del disco.

Capitolo 5

Proprietà locali di funzioni regolari

1 Formula di Taylor

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e f una funzione di classe $C^k(\{x_0\})$ (ovvero f è continua assieme a tutte le sue derivate parziali di ordine p con $p \leq k$ in un intorno di x_0). Per ogni $p \leq k$, definiamo il **tensore delle derivate di ordine** p, $D^p f(x_0)$, come la applicazione multilineare che a p vettori in $\mathbb{R}^n$, $\xi^{(1)}$,..., $\xi^{(p)}$ associa il seguente numero:

$$\begin{aligned} D^p f(x_0) : (\xi^{(1)}, ..., \xi^{(p)}) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n &\to D^p f(x_0)\big(\xi^{(1)}, ..., \xi^{(p)}\big) \\ := \sum_{j_1,...,j_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}}(x_0)\ \xi^{(1)}_{j_1} \cdots \xi^{(p)}_{j_p} \ . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Si noti *la differenza* tra gli oggetti $\partial_x^\alpha f(x_0)$ con $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ vettore a componenti interi non negativi e $D^p f(x_0)$ con p numero intero non negativo: il primo simbolo denota un numero (il valore della derivata parziale di ordine $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ fatta α_1 volte rispetto a x_1,..., α_n volte rispetto a x_n e calcolata nel punto x_0) mentre il secondo simbolo denota una applicazione multilineare.

Esempio 5.1 Sia $f = x_1^2 x_2^5$, $x_0 = (1,1)$, $\alpha = (1,3)$, $p = 3$, $\xi^{(1)} = (1,0)$, $\xi^{(2)} = (-1,1)$, $\xi^{(3)} = (3,-1)$ e calcoliamo, rispettivamente,

$$\partial_x^\alpha f(x_0) \ , \qquad \text{e} \quad D^p f(x_0)\big(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}\big) \ .$$

In relazione alla prima quantità, troviamo

$$\partial_x^\alpha f(x_0) := \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2^3}(x_0) = 120 x_1 x_2^2 \,|_{x=x_0} = 120 \ ,$$

mentre il valore del tensore delle derivate di ordine 3 di f, si ha (omettendo dapprima la dipendenza da x_0)

$$\begin{aligned}(D^p f)\big(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\xi^{(3)}\big) &= \sum_{i,j,k=1}^{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\xi_i^{(1)}\xi_j^{(2)}\xi_k^{(3)}\\ &= \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_j \partial x_k}\xi_j^{(2)}\xi_k^{(3)}\\ &= \sum_{k=1}^{2}\Big(-\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_k}+\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_k}\Big)\xi_k^{(3)}\\ &= -3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}+4\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2}-\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}\ .\end{aligned}$$

Calcolando tale valore nel punto $x_0 = (1, 1)$ si ha

$$D^p f(x_0)\big(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\xi^{(3)}\big) = 0 + 40 - 40 = 0.$$

Per semplificare un po' la notazione, diamo la seguente definizione: se $\xi \in \mathbb{R}^n$ e k è un intero non negativo, denotiamo con $(\xi)^k$ la k–upla di vettori $(\xi, ..., \xi)$ (ripetuti k volte) e poniamo $(\xi)^0 = 1$:

$$(\xi)^k := \underbrace{(\xi, ..., \xi)}_{\text{k volte}}\ , \quad (k \geq 1)\ ; \qquad (\xi)^0 = 1\ . \tag{5.2}$$

Proposizione 5.2 (Formula di Taylor) *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f \in C^k(\{x_0\})$ con $k \geq 1$. Vale, allora, per $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi|$ sufficientemente piccolo, la seguente formula:*

$$f(x_0+\xi) = \sum_{p=0}^{k-1}\frac{1}{p!}\ D^p f(x_0)\ (\xi)^p + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\ D^k f(x_0+t\xi)\ (\xi)^k\ dt\ , \tag{5.3}$$

dove, per definizione, $D^0 f(x_0) := f(x_0)$.

Si noti che, dalle ipotesi e dalla definizione di tensore delle derivate, segue che l'integrando in (5.3) è una funzione continua sull'intervallo $[0, 1]$. La formula di Taylor in $\mathbb{R}^n$ è una immediata conseguenza del teorema fondamentale del calcolo (in una variabile) e della formula (2.49).
Dimostrazione Se F è una funzione di una variabile e di classe $C^k\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ dal teorema fondamentale del calcolo segue che

$$F(1) = \sum_{p=0}^{k-1}\frac{F^{(p)}(0)}{p!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}F^{(k)}(t)dt\ . \tag{5.4}$$

Infatti, se $k = 1$ (5.4) è esattamente il teorema fondamentale del calcolo e, se $k \geq 2$, integrando per parti[1], si ha che

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}F^{(k)}(t)dt = -\frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-2}}{(k-2)!}F^{(k-1)}(t)dt\ . \tag{5.5}$$

Iterando tale relazione si perviene a (5.4).

[1] E l'integrazione per parti non è altro che una conseguenza immediata del teorema fondamentale del calcolo.

Dalle ipotesi della proposizione segue che esiste una sfera, B, di raggio ρ e centro x_0 tale che $f \in C^k(B)$. Fissiamo $\xi \in \mathbb{R}^n$ cosicché $|\xi| < \rho$. Sia ora $F(t)$ la seguente funzione di una variabile reale a valori in $\mathbb{R}$

$$F(t) := f(x_0 + t\xi) \ . \tag{5.6}$$

Dalle posizioni fatte e dal punto (i) dell'Osservazione 2.15 segue che $F \in C^k([0,1])$: Infatti da (2.49) (applicata con $f(t) := x_0 + t\xi$, per cui $f'(t) = \xi$) segue che

$$F'(t) = \nabla f(x_0 + t\xi) \cdot \xi := D^1 f(x_0 + t\xi)\ \xi := \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + t\xi) \ ; \tag{5.7}$$

tale relazione ed una seconda applicazione della formula (2.49) alle n funzioni $f_{x_i}(x_0 + t\xi)$ implicano

$$F''(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t\xi)\ \xi_j := D^2 f(x_0 + t\xi)\ (\xi)^2 \ , \tag{5.8}$$

o, più in generale, per ogni $0 \le p \le k$

$$F^{(p)}(t) = D^p f(x_0 + t\xi)(\xi)^p \ . \tag{5.9}$$

A questo punto l'asserto deriva da (5.5). ∎

Se $f \in C^j(\{x_0\})$, denotiamo con $P_j(\xi; x_0)$ il **polinomio di Taylor di ordine** j della funzione f nel punto x_0 e nelle n variabili ξ_1,...,ξ_n (cioè nelle n componenti del vettore ξ):

$$P_j(\xi; x_0) := \sum_{p=0}^j \frac{1}{p!}\ D^p f(x_0)\ (\xi)^p \ ; \tag{5.10}$$

e raccogliamo nel seguente corollario alcune conseguenze immediate della formula di Taylor.

Corollario 5.3 *Nelle ipotesi della Proposizione 5.2 valgono le seguenti affermazioni:*
(i) ("Formula di Taylor con resto di Lagrange")

$$f(x_0 + \xi) = P_{k-1}(\xi; x_0) + \frac{1}{k!} D^k f(y)(\xi)^k \ , \tag{5.11}$$

dove y è un punto sul "segmento aperto" I che unisce x_0 con $x_0 + \xi$:

$$I := \{x \in \mathbb{R}^n :\ x = x_0 + t\xi \ \ \text{con} \ \ t \in (0,1)\} \ ; \tag{5.12}$$

(ii) ("Ordine di infinitesimo del resto")

$$R_k(\xi; x_0) := f(x_0 + \xi) - P_k(\xi; x_0) = o(|\xi|^k) \tag{5.13}$$

e $(\xi, x) \to R_k(\xi; x)$ è una funzione continua in un intorno di $(0, x_0)$.
(iii) ("Stima del resto")

$$R_{k-1} := f(x_0 + \xi) - P_{k-1}(\xi; x_0) = O(|\xi|^k) \ ,$$

o più precisamente

$$|R_{k-1}| \le \frac{M}{k!}|\xi|_1^k \le \frac{M n^{\frac{k}{2}}}{k!}|\xi|^k \ , \tag{5.14}$$

dove, come al solito, $|\cdot|_1$ denota la "norma 1" in $\mathbb{R}^n$ ($|\xi|_1 := \sum |\xi_i|$) e, se $i_1, ..., i_k$ sono k indici che variano tra 1 ed n, la costante M è definita come (si ricordi (5.12))

$$M := \sup_{i_1,\dots,i_k} \sup_{x\in I} \Big|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x)\Big| \ . \tag{5.15}$$

(iv) ("Teorema del valor medio in $\mathbb{R}^n$")
Nelle ipotesi della Proposizione 5.2 con $k = 1$ si ha che

$$\begin{aligned} f(x_0+\xi) - f(x_0) &= \int_0^1 f'(x_0+t\xi)\cdot\xi \ dt \\ &= f'(y)\cdot\xi \ , \end{aligned} \tag{5.16}$$

dove $y \in I$ e I è definito in (5.12).

Dimostrazione

(i) Se $g(t)$ è una funzione continua su $[0, 1]$ si ha che

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\ g(t)\ dt = \frac{1}{k!}\int_0^1 g(1-s^{\frac{1}{k}})\ ds = \frac{g(\tau)}{k!} \ , \tag{5.17}$$

dove τ è un qualche punto nell'intervallo $(0, 1)$: nel primo passaggio si è fatto il cambiamento di variabile $s = (1-t)^k$, mentre il secondo passaggio è conseguenza del teorema del valor medio (in una variabile e forma integrale[2]). L'asserto in (i) segue ora da (5.17) applicato alla funzione $F^{(k)}(t)$ con F definita nella dimostrazione della Proposizione 5.2.

(ii) Dalle ipotesi segue che qualunque derivata di ordine k (ovvero $\partial_x^\alpha f(x)$ per qualunque $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$) è continua in x_0. Dato $\varepsilon > 0$, esiste δ tale che $|\partial_x^\alpha f(x) - \partial_x^\alpha f(x_0)| < (k!/n^{k/2})\varepsilon$ per qualunque α con $\sum \alpha_i = k$ e qualunque x con $|x - x_0| < \delta$. Allora per ogni $|\xi| < \delta$, dalla (5.11) del punto (i) e dalla definizione di P_k (5.10), segue che, per un $y \in I$,

$$\begin{aligned} R_k &= \frac{1}{k!}|D^k f(y)(\xi)^k - D^k f(x_0)(\xi)^k| \\ &= \frac{1}{k!}\Big|\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^n \Big[\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(y) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x_0)\Big]\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}\Big| \\ &\le \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^n \Big|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(y) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x_0)\Big||\xi_{i_1}|\cdots|\xi_{i_k}| \\ &< \frac{1}{k!}\ \varepsilon\ \frac{k!}{n^{k/2}}\ |\xi|_1^k \le \varepsilon\ |\xi|^k \end{aligned} \tag{5.18}$$

che è quanto volevasi dimostrare. La continuità in ξ e x di $R_k(\xi; x)$ deriva immediatamente dalla definizione e dalle ipotesi.

---

[2] *"Se $t \in [a, b] \to h(t) \in \mathbb{R}$ è una funzione continua allora $\int_a^b h(t)dt = (b-a)h(t_0)$ per un qualche $t_0 \in (a, b)$"*. Si noti, per inciso, che da (5.17) con $g = 1$ segue che

$$\frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\ dt \ .$$

(iii): La stima su $|R_{k-1}|$ segue facilmente dalla (5.11).

(iv): La prima uguaglianza in (5.16) è la (5.3) nel caso $k = 1$; la seconda uguaglianza è la (5.11) sempre nel caso $k = 1$. ∎

Osservazione 5.4 (i) La formula di Taylor "al secondo ordine" per funzioni f di classe $C^2(\{x_0\})$ viene usata spesso nella seguente versione. Se $f \in C^2(\{x_0\})$, si definisce la **matrice hessiana** di f nel punto x_0 la matrice simmetrica $(n \times n)$ costituita dalle derivate seconde di f in x_0:

$$f''(x_0) := \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\Big)_{i,j=1,\dots,n} \ . \tag{5.19}$$

Dal punto (ii) del Corollario alla formula di Taylor segue che

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \xi + \frac{1}{2} f''(x_0)\xi \cdot \xi + o(|\xi|^2) \ . \tag{5.20}$$

(ii) Un'altra versione della formula di Taylor usata frequentemente si ottiene *raccogliendo i termini comuni in* $D^p f\ (\xi)^p$. Infatti, in $D^p f\ (\xi)^p$, appaiono le derivate di ordine p nella forma

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}} \tag{5.21}$$

dove gli indici $j_1, ..., j_p$ variano indipendentemente tra 1 e n. La (5.21) può essere riscritta come $\partial_x^\alpha f$ dove $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ è tale che $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = p$ e α_1 è il numero di indici j_i in (5.21) che assumono il valore 1, α_2 è il numero di indici j_i con valore 2, etc. Un esempio (con $n = 4$ e $p = 5$) è dato da

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x_1 \partial x_4 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_1} = \partial_x^{(3,1,0,1)} f$$

(qui $j_1 = 1$, $j_2 = 4$, $j_3 = 2$, $j_4 = 1$, $j_5 = 1$ e quindi $\alpha = (3, 1, 0, 1)$). D'altra parte, in generale, vi sono varie scelte degli indici j_1,...,j_p tali da ottenere la stessa derivata $\partial_x^\alpha f$: *il numero di tale scelte è esattamente il numero di modi in cui si possono ripartire p oggetti in n gruppi formati, rispettivamente, da α_1,...,α_n oggetti*. Un calcolo combinatorio elementare[3] mostra che tale numero è

$$\frac{p!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} := \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \ . \tag{5.22}$$

È convenzione usare per vettori $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la notazione $|\alpha|$ per la norma $|\cdot|_1$ cioè (essendo tutte le componenti di α non negative) per $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Inoltre sono comuni le seguenti notazioni: se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ si pone

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i \ , \qquad \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n! := \prod_{j=1}^n \alpha_j! \ , \qquad \xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n} := \prod_{j=1}^n \xi_j^{\alpha_j} \ . \tag{5.23}$$

In vista della discussione che ha condotto a (5.22) e delle convenzioni (5.23), si ottiene l'identità

$$D^p f(x_0)\ (\xi)^p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n:\ |\alpha| = p} \frac{p!}{\alpha!}\ \partial_x^\alpha f(x_0)\ \xi^\alpha \ . \tag{5.24}$$

---

[3]Si ricordi che il coefficiente binomiale $\binom{p}{a}$ è il numero di modi di ripartire p oggetti in due gruppi formati rispettivamente da a oggetti e da $p - a$ oggetti.

Dunque il polinomio di Taylor di ordine k di una funzione $f \in C^k(\{x_0\})$ prende la forma

$$P_k(\xi; x_0) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n:\ |\alpha|\le k} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!}\ \xi^\alpha\ . \tag{5.25}$$

(iii) Si noti che se α e β sono due vettori in $\mathbb{N}^n$ allora

$$\partial_x^\beta x^\alpha = \begin{cases} \dfrac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}\ x^{\alpha-\beta}\ , & \text{se } \alpha_i \ge \beta_i\ \forall\ i\ , \\ \\ 0\ , & \text{se } \exists\ i \text{ t.c. } \beta_i > \alpha_i\ . \end{cases} \tag{5.26}$$

In particolare

$$(\partial_x^\beta x^\alpha)(0) = \begin{cases} \alpha!\ , & \text{se } \alpha = \beta \\ 0\ , & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{5.27}$$

Tale relazione mostra, tra l'altro (e come ci si aspettava), che, se $P(x) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha x^\alpha$ è un polinomio in n variabili di grado k, il suo polinomio di Taylor in $x_0 = 0$ coincide con P stesso.

(iv) Dalla formula di Taylor in una variabile con "resto in forma di Lagrange[4]", dalla (5.9) e dalle dimostrazioni fatte segue facilmente che le ipotesi del Corollario 5.3 possono essere leggermente indebolite[5]:

Le tesi dei punti (i), (ii), (iii) valgono assumendo che $f \in C^{k-1}(\{x_0\})$, che le derivate di ordine $(k-1)$ di f siano differenziabili in un intorno di x_0 e che le derivate di ordine k di f siano continue in x_0; la seconda uguaglianza in (5.16) vale assumendo che f sia differenziabile in intorno di x_0.

Dal punto (ii) dell'osservazione precedente deriva immediatamente la seguente versione della Formula di Taylor in $\mathbb{R}^n$:

Proposizione 5.5 (Formula di Taylor (II)) *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f \in C^k(\{x_0\})$ con $k \ge 1$. Vale, allora, per $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi|$ sufficientemente piccolo, la seguente formula:*

$$\begin{aligned} & f(x_0+\xi) \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n:\ |\alpha|\le k-1} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!}\ \xi^\alpha\ + k \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n:\ |\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^{k-1}\partial_x^\alpha f(x_0+t\xi)\ dt \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n:\ |\alpha|\le k-1} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!}\ \xi^\alpha\ + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n:\ |\alpha|=k} \frac{\partial_x^\alpha f(y)}{\alpha!}\ \xi^\alpha \qquad (5.29) \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n:\ |\alpha|\le k} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!}\ \xi^\alpha\ + R_k(\xi; x_0)\ , \qquad R_k(\xi;x_0) = o(|\xi|^k)\ , \qquad (5.30) \end{aligned}$$

---

[4] *Se $F \in C^{k-1}([0,1])$ e $F^{(k)}(t)$ esiste per ogni $t \in (0,1)$ allora esiste $t_0 \in (0,1)$ tale che*

$$F(1) = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{F^{(p)}(0)}{p!} + \frac{F^{(k)}(t_0)}{k!}\ . \tag{5.28}$$

(Tale formula segue facilmente applicando k volte il teorema del valor medio di Lagrange applicato alle prime k derivate della funzione $G(t) = F(t) - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{F^{(p)}(0)}{p!} t^p - a t^k$ con $a = F(1) - \sum_{p=0}^{k-1} F^{(p)}(0)/p!$ notando che $G^{(p)}(0) = F^{(p)}(0)$ per $0 \le p \le k-1$ e che, per definizione di a, $G(1) = 0$).

[5] Tali ipotesi, infatti, sono sufficienti per provare la (5.9), che, grazie alla formula di Taylor in una variabile con "resto in forma di Lagrange" dà immediatamente la (5.11) e la (5.14). Nella (5.18) (che è la dimostrazione della (5.13)) si è usata la continuità delle derivate parziali di ordine k nel solo punto x_0.

dove $y := x_0 + t_0\xi$ *per un opportuno* $0 < t_0 < 1$*; la funzione* $R_k(\xi; x)$ *è continua in un intorno di* $(0, x_0)$*.*

Dimostriamo ora come la relazione (5.13) (o, equivalentemente la relazione (5.30)) *caratterizza completamente il polinomio di Taylor* per una funzione f. Iniziamo con un risultato preliminare:

Lemma 5.6 (i) *Sia* $P(x) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha x^\alpha$ *un polinomio di grado* k*. Allora* $P \equiv 0$ *se e solo se* $a_\alpha = 0$ *per ogni* α*.*

(ii) (caso $n = 1$) Sia $t \to g(t)$ una funzione tale che $g(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j t^j + o(|t|^k)$ e tale che $g(t) = 0$ per $|t| < \delta$. Allora $a_j = 0$ per ogni j.

(iii) (caso $n > 1$) Sia k un intero non negativo e sia f una funzione tale che

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n:\ |\alpha|\le k} a_\alpha\ x^\alpha + o(|x|^k)\ , \tag{5.31}$$

con $\alpha_\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f = 0$ in un intorno di $x = 0$ allora $a_\alpha = 0$ per ogni α.

Dimostrazione (i) Il "se" è ovvio. Il "solo se" deriva dalla formula (5.27).

(ii) Per induzione su k. Se $k = 0$, $0 = \lim_{t\to 0} g(t) = a_0$. Assumiamo la tesi vera per $0, ..., k-1$. Allora poiché $a_0 = 0$, $g(t)/t = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} a_{j+1} t^j + o(|t|^{k-1})$ e quindi per l'ipotesi induttiva (applicata alla funzione $\tilde g = g(t)/t$ per $t \neq 0$ e $\tilde g(0) = 0$), si ha che $a_j = 0$ per ogni $1 \le j \le k$.

(iii) Supponiamo per assurdo che $a_\alpha \neq 0$ per un qualche $|\alpha| \le k$. Dal punto (i) segue che il polinomio $P(x) := \displaystyle\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha x^\alpha$ non è identicamente nullo e cioè che esiste $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $P(x_0) \neq 0$. Sia $g(t) := f(tx) = P(tx) + o(|t|^k) := p(t) + o(|t|^k)$; per il punto (ii) $p := 0$ e quindi $0 = p(1) := P(x_0)$ portando ad una contraddizione. ∎

Infine, si ha il seguente risultato di unicità del polinomio di Taylor per funzioni $C^k(\{x_0\})$:

Proposizione 5.7 *Sia* $f \in C^k(\{x_0\})$ *e tale che*

$$f(x_0 + \xi) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n:\ |\alpha|\le k} a_\alpha\ \xi^\alpha + o(|\xi|^k) \tag{5.32}$$

allora esistono le derivate parziali fino ad ordine k *in* x_0 *e si ha*

$$a_\alpha = \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!}\ .$$

Dimostrazione Dalla (5.30) segue che $f(x_0 + \xi) = P_k(\xi; x_0) + r_1(\xi)$ dove P_k è il polinomio di Taylor di f e $r_1(\xi) = o(|\xi|^k)$; dalle ipotesi su f segue che $f(x_0+\xi) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha\ \xi^\alpha + r_2(\xi)$ con $r_2(\xi) = o(|\xi|^k)$. La tesi segue dal Lemma 5.6 applicato alla funzione

$$g(\xi) := \Big(\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \xi^\alpha - P_k(\xi; x_0)\Big) + r_2(\xi) - r_1(\xi)\ . \quad ∎$$

Esempio 5.8 Un esempio di funzione continua (e derivabile) in $t = 0$, non continua in alcun intervallo aperto contenente l'origine (e quindi senza derivata in alcun punto eccetto l'origine), ma con polinomio di Taylor di grado k in $t = 0$ è dato da $f(t) := t^{k+1}\chi_{\mathbb{Q}}(t)$, (dove $\chi_A(t)$ denota la funzione caratteristica dell'insieme A: $\chi_A(t) = 1$ se $t \in A$ e $\chi_A(t) = 0$ altrimenti). In tal caso il polinomio di Taylor di f di grado k è il polinomio nullo.

Esempio 5.9 (i) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 5 in $(x, y) = (0, 0)$ della funzione $(1+x)^y$. Calcolando le derivate fino all'ordine 5 si trova $(1+x)^y = P_5(x, y; 0, 0) + O(|(x, y)|^6)$ con

$$P_5(x, y; 0, 0) = 1 + xy - \frac{x^2y}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3y}{3} - \frac{x^4y}{4} - \frac{x^3y^2}{2} \ . \tag{5.33}$$

(ii) Calcoliamo ora il polinomio di Taylor di ordine 1000 in $x_0 = 0$ di

$$f(x) = x_1x_4^2 + (x_1 + x_3^2)\frac{1}{1 - x_1^2 - x_2^2} \ , \qquad x \in \mathbb{R}^4 \ .$$

Poiché

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{j=0}^{\infty} t^j = \sum_{j=0}^{500} t^j + O(|t|^{501}) \ ,$$

si ha che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-(x_1^2+x_2^2)} &= \sum_{j=0}^{500}(x_1^2 + x_2^2)^j + O(|x|^{1002}) \\
&= \sum_{j=0}^{500}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} x_1^{2i}x_2^{2(j-i)} + O(|x|^{1002}) \\
&= \sum_{\substack{h=(h_1,h_2)\in\mathbb{N}^2 \\ h_1+h_2\le 500}} \frac{(h_1+h_2)!}{h_1!\ h_2!} x_1^{2h_1}x_2^{2h_2} + O(|x|^{1002}) \ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$f(x) = x_1x_4^2 + \sum_{\substack{h=(h_1,h_2)\in\mathbb{N}^2 \\ h_1+h_2\le 500}} \frac{(h_1+h_2)!}{h_1!\ h_2!}\Big(x_1^{2h_1+1}x_2^{2h_2} + x_1^{2h_1}x_2^{2h_2}x_3^2\Big) + O(|x|^{1002}) \ .$$

Da tale relazione e dal punto (i) della Proposizione 5.7 segue che $f(x) = P_{1000}(x; 0) + O(|x|^{1002})$ con $P_{1000}(x; 0) := \displaystyle\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^4:\ |\alpha|\le 1000} a_\alpha x^\alpha$ e coefficienti a_α dati da

$$a_\alpha = \begin{cases} 1 \ , & \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \ ,\ \alpha_4 = 2 \ , \\ \dfrac{[(\alpha_1+\alpha_2-1)/2]!}{[(\alpha_1-1)/2]!\ (\alpha_2/2)!} \ , & \alpha_1 \text{ dispari},\ \alpha_2 \text{ pari } , \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \ , \\ \dfrac{[(\alpha_1+\alpha_2)/2]!}{(\alpha_1/2)!\ (\alpha_2/2)!} \ , & \alpha_1 \text{ pari},\ \alpha_2 \text{ pari } , \alpha_3 = 2 \ , \alpha_4 = 0 \ , \\ 0 \ , & \text{altrimenti} \ . \end{cases}$$

2 Punti critici

Massimi e minimi locali di funzioni di n variabili

In questa sezione discuteremo alcune condizioni legate all'esistenza di massimi o minimi locali di una funzione *scalare*[6] regolare di n variabili reali.

Definizione 5.10 (i) *Data una funzione $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ con $E \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto x_0 in cui si annulla il gradiente, cioè $f'(x_0) = 0$, si chiama* **punto critico** *(o anche "punto stazionario") per f.*
(ii) *Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in E$ è un punto di* **minimo locale** *(o "relativo") per f se esiste una sfera B di centro x_0 tale che*

$$f(x_0) \leq f(x) \ , \qquad \forall \ x \in E \cap B \ . \tag{5.34}$$

Se in (5.34) vale il segno di strettamente minore per $x \neq x_0$, si dice che x_0 è un minimo locale in **senso stretto**. *Le stesse definizioni si danno nel caso di* **massimo locale** *sostituendo "$\leq$" in (5.34) con "$\geq$" (e successivamente "$<$" con "$>$").*

Ricordiamo che una matrice (reale) $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ si dice **definita positiva** se è simmetrica e se

$$A\xi \cdot \xi > 0 \ , \qquad \forall \ \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \ , \tag{5.35}$$

in tal caso si scrive $A > 0$; se in (5.35) vale il segno "$\geq$" si dice che A è **semidefinita** positiva e si scrive $A \geq 0$; se in (5.35) vale il segno "$<$" (rispettivamente "$\leq$") si dice che A è **definita negativa** (rispettivamente **semidefinita** negativa) e si scrive $A < 0$ (rispettivamente "$A \leq 0$").[7]

Proposizione 5.11 *Se E è un aperto di $\mathbb{R}^n$ valgono le seguenti affermazioni:*
(i) *Condizione necessaria affinché una funzione $f \in C^1(E)$ abbia un punto di minimo o massimo locale in $x_0 \in E$ è che x_0 sia un punto critico per f.*
(ii) *Se $f \in C^2(E)$, x_0 è un punto critico per f e $f''(x_0) > 0$ (rispettivamente "$f''(x_0) < 0$"), allora f ha un minimo locale (rispettivamente "massimo locale") in senso stretto nel punto x_0.*
(iii) *Se $f \in C^2(E)$, x_0 è un punto critico per f e $f''(x_0)$ ha un autovalore positivo ed uno negativo, allora x_0 non è né un minimo né un massimo locale*[8].

Dimostrazione (i): Assumiamo che f abbia un massimo locale in x_0. Allora, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ fissato, la funzione di *una* variabile $t \to F(t) := f(x_0 + t\xi)$ sarà definita per t sufficientemente piccoli ed avrà un massimo locale in $t = 0$. Quindi $F'(0) = 0$ ovvero la derivata direzionale $\partial_\xi f(x_0) = 0$. Dall'arbitrarietà di ξ segue l'asserto.

(ii): dalle ipotesi e dalla (5.20) segue che (per $|\xi|$ sufficientemente piccolo)

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + \frac{1}{2} \ f''(x_0)\xi \cdot \xi + o(|\xi|^2) \ . \tag{5.36}$$

---

[6] Qui è essenziale che le funzioni che si considerano siano funzioni a valori in $\mathbb{R}$ (dove c'è un ordinamento naturale).

[7] Si ricorda che $A > 0$ *se e solo se A è simmetrica e tutti gli autovalori di A sono strettamente positivi*.

[8] Ovvero: arbitrariamente vicini al punto critico x_0 vi sono punti su cui f assume valori strettamente minori di $f(x_0)$ e punti su cui f assume valori strettamente maggiori di $f(x_0)$. I punti per cui vale (iii) vengono detti **punti di sella**.

La funzione di n variabili $G(x) := \frac{1}{2} f''(x_0)x \cdot x$ è continua sull'insieme compatto

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \tag{5.37}$$

e vi assume (essendo $f''(x_0)$ una matrice definita positiva) sempre valori positivi. Dunque, dal teorema di Weierstrass segue che

$$\min_{x \in S^{n-1}} G(x) := \lambda > 0 \ . \tag{5.38}$$

Allora, da (5.38), si deduce (per $|\xi|$ piccoli e diversi da 0) che

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi) &= f(x_0) + |\xi|^2 \Big(\frac{1}{2} f''(x_0) \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \frac{\xi}{|\xi|} + \frac{o(|\xi|^2)}{|\xi|^2} \Big) \\ &= f(x_0) + |\xi|^2 \Big(G(\frac{\xi}{|\xi|}) + \frac{o(|\xi|^2)}{|\xi|^2} \Big) \\ &\geq f(x_0) + |\xi|^2 \Big(\lambda + \frac{o(|\xi|^2)}{|\xi|^2} \Big) \\ &> f(x_0) \end{aligned}$$

($|\xi|$ dovrà essere preso così piccolo che, ad esempio, $|o(|\xi|^2)|/|\xi|^2 \leq \frac{\lambda}{2}$). Nel caso $f''(x_0) < 0$ basterà considerare la funzione $-f$ al posto di f.

(iii): Siano λ e $-\mu$ (con $\lambda > 0$, $\mu > 0$) i due autovalori di $A := f''(x_0)$ menzionati nell'ipotesi e siano v e w due corrispondenti autovettori: $Av = \lambda v$ e $Aw = -\mu w$. Essendo x_0 un punto critico per f, dalla formula di Taylor al secondo ordine (5.20) con $\xi = tv$ si ha[9]

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + \frac{1}{2}\lambda t^2 |v|^2 + o(t^2) = f(x_0) + t^2 \Big[\frac{\lambda}{2}|v|^2 + \frac{o(t^2)}{t^2} \Big] \ . \tag{5.39}$$

Poiché la funzione di t tra parentesi quadrate è strettamente positiva se t è sufficientemente piccolo, sulla retta di direzione v e passante per x_0 (ovvero la retta di equazione parametrica $\{y = x_0 + tv : t \in \mathbb{R}\}$) vi sono punti y arbitrariamente vicini a x_0 tali che $f(y) > f(x_0)$. Analogamente, si vede che sulla retta passante per x_0 e di direzione w vi sono punti y arbitrariamente vicini a x_0 tali che $f(y) < f(x_0)$. ∎

Esempio 5.12 (i) Dati n numeri reali diversi da zero $\lambda_1,...,\lambda_n$, definiamo

$$f(x) := \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + P(x) = x \cdot \Lambda x + P(x) \ , \tag{5.40}$$

dove[10] $\Lambda := \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ e $P(x)$ è, ad esempio, un monomio di grado $d > 2$. L'ipotesi su P implica che le derivate prime e seconde di P in 0 si annullano e quindi l'origine è un punto critico per f e dalla Proposizione 5.11 segue che tale punto è un minimo se $\lambda_i > 0$ per ogni i, è un massimo se $\lambda_i < 0$ per ogni i ed è una sella altrimenti.

(ii) Sia $f(x, y) = \sinh(x^2 + y^4)$ per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcolando le derivate si trova che $(0, 0)$ è l'unico punto critico e $f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi la Proposizione 5.11 non ci permettere di concludere nulla sul comportamento di f vicino al punto critico. D'altra parte $\sinh 0 = 0$ e $\sinh t > 0$ se $t > 0$ dunque l'origine è il minimo assoluto di f.

[9] Se $\xi = tv$, $\xi \cdot A\xi = t^2 v \cdot Av = t^2 \lambda v \cdot v = \lambda t^2 |v|^2$ e $o(|\xi|^2) = o(t^2)$.

[10] $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ denota la matrice diagonale $(n \times n)$ con elementi di matrice $\Lambda_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\Lambda_{ii} = \lambda_i$.

Massimi e minimi locali vincolati

Vediamo, in questo paragrafo, un'interessante applicazione del teorema delle funzioni implicite che permette di risolvere, in certi casi, *problemi di massimo o minimo vincolati*.

Supponiamo che un insieme compatto in $\mathbb{R}^n$ sia dato come l'insieme $K := \{x : \phi(x) \le 0\}$, con ϕ continua, e sia f una funzione continua su K. Dal teorema di Weierstrass sappiamo che f ammette massimo e minimo su K ed il problema che ci poniamo è quello di sviluppare dei metodi che permettano di determinare i punti estremali ovvero i punti di massimo o minimo. Per far questo assumeremo un po' di regolarità ovvero assumiamo che f e ϕ siano di classe C^1. Sappiamo che se un punto estremale è interno a K allora vi si annulla il gradiente di f e questo permette di selezionare i punti interni candidati ad essere estremali. Cosa possiamo dire se gli estremali di f sono sulla frontiera di K, che è contenuta nell'insieme $E_0 := \{x : \phi(x) = 0\}$? A tale proposito sussiste il seguente risultato dovuto a Lagrange. Prima una definizione:

Definizione 5.13 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\phi \in C^1(A)$. Un punto $x_0 \in E_0 := \{x \in A : \phi(x) = 0\}$ si dice regolare per E_0 se $\nabla\phi(x_0) \neq 0$.*

Proposizione 5.14 *Siano ϕ e E_0 come nella Definizione 5.13 e sia f una funzione $C^1(\{x_0\})$. Se $x_0 \in E_0$ è un punto regolare per E_0 ed è un massimo o un minimo relativo di f su E_0, allora esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0) = \lambda\nabla\phi(x_0)$.*

A volte, l'insieme $\{\phi = 0\}$ viene chiamato *vincolo*.
Dimostrazione Poiché x_0 è regolare, una delle derivate parziali di ϕ è non nulla in x_0. Supponiamo, tanto per fissare le idee, che sia la prima variabile: $\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$. Chiamiamo y la variabile x_1 e z il resto delle variabili, cioè $z = (x_2, ..., x_n)$; $y_0 := x_{01}$ e $z_0 := (x_{02}, ..., x_{0n})$. Dunque $\frac{\partial\phi}{\partial y}(y_0, z_0) \neq 0$ e per il teorema delle funzioni implicite e per la Proposizione 4.8, il luogo degli zeri di ϕ in un intorno di (y_0, z_0) è il grafico $\{(g(z), z) : z \in D\}$ di una funzione C^1 in un intorno D di z_0. Dunque se x_0 è, ad esempio, un massimo locale per f su E_0 significa che esiste $r > 0$ tale che $f(y_0, z_0) \ge f(g(z), z)$ per ogni $z \in D \cap B_r(z_0)$. Dunque il gradiente della funzione $z \to f(g(z), z)$ è nullo in z_0:

$$\frac{\partial}{\partial z} f(g(z), z)|_{z=z_0} = 0 \ ,$$

ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y_0, z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}((y_0, z_0) = 0 \ , \tag{5.41}$$

relazione che, in vista di (4.37), diviene

$$\frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, z_0)\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y}(y_0, z_0)\Big)^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial z}(y_0, z_0) \ . \tag{5.42}$$

Ma questo significa che per $i = 2, ..., n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lambda\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \ , \quad \lambda := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y}(x_0)\Big)^{-1} \ . \tag{5.43}$$

Per $i = 1$ la (5.43) è ovviamente vera. ∎

La Proposizione appena dimostrata implica immediatamente il seguente

Corollario 5.15 (Metodo dei moltiplicatori di Lagrange)
Siano ϕ e E_0 come nella Definizione 5.13 e sia f una funzione $C^1(E_0)$. Esiste $x_0 \in E_0$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0) = \lambda_0\nabla\phi(x_0)$ se e solo se (x_0, λ_0) è un punto critico per la funzione di $(n+1)$ variabili $F(x, \lambda) := f(x) - \lambda\phi(x)$.

Esempio 5.16 Sia $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i$, $M > 0$ e sia $B := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n x_i = M\}$. L'insieme B è compatto e si vuole determinare il massimo ed il minimo (assoluti) di f su B. Poichè $f \geq 0$ su B, i punti della frontiera in cui una delle coordinate è nulla (e sui quali $f = 0$) sono punti di minimo assoluto. Poiché $f_{x_j} = \prod_{i \neq j} x_i$, ∇f non si annulla mai all'interno di B; dunque il massimo di f è raggiunto su $A := \partial B \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0$ per ogni i e $\sum_{i=1}^n x_i = M\}$. Per trovare i punti critici su A usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Sia $F(x, \lambda) := f(x) - \lambda\phi(x)$ con $\phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i - M$. Poichè $F_{x_j} = \prod_{i \neq j} x_i - \lambda$ (e $x_i > 0$ su A) $F_{x_j} = 0$ su A se e solo se $f(x) = \lambda x_j$ per ogni j. Dunque $x_1 = \cdots = x_n$. Il massimo è dunque raggiunto su x_0 dove $x_{0j} = M/n$. Vale dunque

$$\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \ , \qquad x_i \geq 0 \ , \tag{5.44}$$

relazione nota come *disuguaglianza aritmetico–geometrica*.

Il metodo sopra esposto si generalizza facilmente al caso di più vincoli ovvero nel caso in cui la funzione ϕ che definisce il vincolo sia una funzione *vettoriale* $\phi \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (con $m < n$) in modo tale che

$$E_0 := \{\phi = 0\} = \bigcap_{i=1}^m \{\phi_i = 0\} \ .$$

Infatti, l'analogo della Definizione 5.13 è

Definizione 5.17 *Sia $\phi \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x_0 \in E_0 := \{x \in A : \phi(x) = 0\}$ si dice regolare per E_0 se la matrice jacobiana $\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0)$ ha rango massimo (e cioè uguale ad m).*

A questo punto la Proposizione 5.14 diviene

Proposizione 5.18 *Siano ϕ e E_0 come nella Definizione 5.17 e sia f una funzione $C^1(E_0)$. Se x_0 è un punto regolare per E_0 ed è un massimo o un minimo relativo di f su E_0, allora esiste un vettore $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tale che*[11] *$\nabla f(x_0) = \lambda \, \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0)$.*

La dimostrazione è una ripetizione parola per parola della dimostrazione della Proposizione 5.14 (con la giusta interpretazione dei simboli!). Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange diventa:

Corollario 5.19 (Metodo dei moltiplicatori di Lagrange per più vincoli) *Siano ϕ e E_0 come nella Definizione 5.17 e sia f una funzione $C^1(E_0)$. Esiste $x_0 \in E_0$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ tale che $\nabla f(x_0) = \lambda_0 \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0)$ se e solo se (x_0, λ_0) è un punto critico per la funzione di $(n+m)$ variabili $F(x, \lambda) := f(x) - \lambda \cdot \phi(x)$.*

Esempio 5.20 Si calcoli la distanza d tra l'ellisse $\mathcal{E} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1\}$ e la retta $R := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 4\}$. Si ricorda che la distanza tra due insiemi $\mathcal{E}$ ed R è data da

$$\mathrm{dist}\,(\mathcal{E}, R) := \inf_{\substack{x \in \mathcal{E} \\ y \in R}} |x - y| \ .$$

Per calcolare d usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange su $\mathbb{R}^4$ con:

$$f(x,y) := |x-y|^2 \ , \ (x, y \in \mathbb{R}^2) \ , \phi_1(x,y) := \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 \ , \ \phi_2(x,y) := y_1 + 2y_2 - 4 \ ,$$
$$F(x,y,\lambda) := f(x,y) - \lambda_1\phi_1(x,y) - \lambda_2\phi_2(x,y) \ .$$

[11] In questa formula, naturalmente, ∇f e λ vanno intesi come matrici, rispettivamente, $(1 \times n)$ e $(1 \times m)$ (ovvero come "vettori riga").

Eguagliando a zero le derivate rispetto ad x e y di F si ottiene

$$\begin{aligned}
&2(x_1 - y_1) - \lambda_1 \frac{x_1}{2} = 0 \\
&x_2 - y_2 - \lambda_1 x_2 = 0 \\
&2(y_1 - x_1) - \lambda_2 = 0 \\
&y_2 - x_2 - \lambda_2 = 0 \ .
\end{aligned}$$

Dalle ultime due equazioni otteniamo $2(x_1 - y_1) = x_2 - y_2$ e quindi dalle prime due equazioni segue che $x_1 = 2x_2$ (avendo osservato che $\lambda_1 \neq 0$ altrimenti si avrebbe $x = y$ il che è impossibile essendo $\mathcal{E} \cap R = \emptyset$). Da tale relazione, assieme a $\phi_1 = 0$, si ottiene che $x = (2/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ (avendo scartato, per ovvi motivi geometrici, l'altra soluzione nel quadrante $\{x_i < 0\}$). Infine da $2y_1 - y_2 = 2x_1 - x_2 = 3/\sqrt{2}$ e da $\phi_2 = 0$ si ottiene $y = \Big(\frac{2}{5}(2 + \frac{3}{\sqrt{2}}), \frac{1}{5}(8 - \frac{3}{\sqrt{2}})\Big)$ e quindi $d = 2\ \frac{\sqrt{5}}{5}\ (2 - \sqrt{2})$.

3 Successioni e serie di funzioni

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme non vuoto. Una **successione di funzioni** a valori in $\mathbb{R}^m$, $\{f^{(k)}\}$, è una mappa che associa ad ogni intero k una funzione $f^{(k)} : A \to \mathbb{R}^m$.

Definizione 5.21 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\{f^{(k)}\}$ una successione di funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$.*
(i) *Diremo che la successione di funzioni $\{f^{(k)}\}$ converge puntualmente in A a $f : A \to \mathbb{R}^m$ se*

$$\forall\ x \in A,\ \forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists\ k_0 \text{ t.c. } |f^{(k)}(x) - f(x)| < \varepsilon\ , \quad \forall\ k \geq k_0\ . \tag{5.45}$$

(ii) *Diremo che la successione di funzioni $\{f^{(k)}\}$ converge uniformemente in A a $f : A \to \mathbb{R}^m$ se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_0 \text{ t.c. } |f^{(k)}(x) - f(x)| < \varepsilon\ , \quad \forall\ k \geq k_0\ ,\ \forall\ x \in A\ , \tag{5.46}$$

ovvero, equivalentemente, se

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in A} |f^{(k)}(x) - f(x)| = 0\ . \tag{5.47}$$

Osservazione 5.22 (i) Chiaramente, condizione necessaria e sufficiente affinché $\{f^{(k)}\}$ converga puntualmente è che, per ogni $x \in A$, le successioni $\{f^{(k)}(x)\}$ siano di Cauchy.
(ii) Analogamente, condizione necessaria e sufficiente affinché $\{f^{(k)}\}$ converga uniformemente è che

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_0 \text{ t.c. } |f^{(k)}(x) - f^{(h)}(x)| < \varepsilon\ , \quad \forall\ k, h \geq k_0\ ,\ \forall\ x \in A\ . \tag{5.48}$$

Infatti, se vale (5.48), le successioni $\{f^{(k)}(x)\}$ sono di Cauchy in $\mathbb{R}^m$ per ogni $x \in A$. Quindi, per la completezza di $\mathbb{R}^m$, esiste il limite, per k che tende ad infinito, di tali successioni; se denotiamo tale limite $f(x)$, prendendo il limite per h che tende ad infinito in (5.48), otteniamo

$$|f^{(k)}(x) - f(x)| \leq \varepsilon\ , \quad \forall\ k \geq k_0\ ,\ \forall\ x \in A\ ,$$

che, per l'arbitrarietà di ε, è equivalente a (5.47). D'altra parte, se $\{f^{(k)}\}$ converge uniformemente ad f in A, vale, ovviamente, la (5.48).

Proposizione 5.23 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $f^{(k)} \in C(A, \mathbb{R}^m)$. La successione $\{f^{(k)}\}$ converge uniformemente in A se e solo se esiste $f \in C(A, \mathbb{R}^m)$ per cui $\{f^{(k)}\}$ converge uniformemente in A ad f.*

Dimostrazione In vista dell'Osservazione precedente l'unica cosa da dimostrare è che se le $f^{(k)}$ sono funzioni continue su A, allora la funzione limite f è anch'essa continua su A. Sia $x_0 \in A$ e sia $\varepsilon > 0$ e sia $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tale che $|f^{(k)}(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ per ogni $x \in A$ e per ogni $k \geq k_0$. Per continuità di $f^{(k_0)}$, sia ora $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tale che $|f^{(k_0)}(x) - f^{(k_0)}(x_0)| < \varepsilon/3$ per ogni $x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$. Allora, se $x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f^{(k_0)}(x)| + |f^{(k_0)}(x) - f^{(k_0)}(x_0)| + |f^{(k_0)}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \ ,$$

ovvero f è continua in x_0. ∎

Osservazione 5.24 (i) Dalla dimostrazione segue anche che se le funzioni $f^{(k)}$ sono *uniformemente continue su A allora anche f sarà uniformemente continua su A*, in tal caso, infatti, il δ nella dimostrazione precedente dipenderà solo da ε (si noti che anche k_0 dipende solo da ε).

(ii) *Sia $B \subseteq \partial A$. Se $f^{(k)} \in C(A \cup B)$ e $\{f^{(k)}\}$ converge uniformemente in A allora $\{f^{(k)}\}$ converge uniformemente in $A \cup B$.* La prova segue immediatamente dalla continuità di $f^{(k)}$ su $A \cup B$ osservando che, in tal caso, $\sup_{A\cup B} |f^{(k)} - f^{(h)}| = \sup_A |f^{(k)} - f^{(h)}|$. Ovvero abbiamo il seguente criterio per estendere la convergenza puntuale a quella uniforme: dunque, se $f^{(k)} \in C(A \cup B)$ e se $\{f^{(k)}\}$ converge in A ma per $y \in B$, la successione $\{f^{(k)}(y)\}$ non è convergente in $\mathbb{R}^m$, allora la convergenza su A non è uniforme.

Osservazione 5.25 Si noti che per dedurre l'uniforme convergenza di $\{f^{(k)}\}$, anche l'ipotesi sulla limitatezza di A è di fondamentale importanza: se per esempio poniamo $A := \mathbb{R}^2$, e $f^{(k)}(x, y) := (x/k, y/k)$, allora $f^{(k)} \to 0$ puntualmente su A, ma $f^{(k)}$ non converge uniformemente a 0 (per ogni k, $\sup_A |f^{(k)}| = \infty$).

I prossimi risultati danno dei criteri sufficienti affinché si possa scambiare l'ordine dei limiti tra integrazione o derivazione e nel calcolare il limite di una successione di funzioni.

Proposizione 5.26 *Sia A sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$. Se la successione $\{f_k\} \subseteq C(A, \mathbb{R})$ converge uniformemente ad f allora*

$$\lim_{k\to\infty} \int_A |f_k(x) - f(x)| dx = 0 \ , \qquad \lim_{k\to\infty} \int_A f_k(x) dx = \int_A f(x) dx \ . \tag{5.49}$$

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Dalle ipotesi (si veda, in particolare, (5.47)) segue che esiste $k_0 > 0$ tale che, per ogni $k \geq k_0$,

$$\sup_A |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{mis} A} \ .$$

Da tale relazione segue che

$$\int_A |f_k(x) - f(x)| dx \leq \int_A \frac{\varepsilon}{\operatorname{mis} A} dx = \varepsilon \ ,$$

il che dimostra la prima relazione in (5.49). La seconda relazione in (5.49) è conseguenza del fatto che

$$\Big| \int_A f_k(x) dx - \int_A f(x) dx \Big| \leq \int_A |f_k(x) - f(x)| dx \ . \qquad ∎$$

Proposizione 5.27 *Sia A un intervallo aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ e sia $\{f_k\} \subseteq C^1(A)$. Assumiamo che, per $x_0 \in A$ e per $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = \alpha$ e che $\{f'_k\}$ sia una successione uniformemente convergente su A. Allora $f_k(x)$ converge per ogni $x \in A$ ad $f(x)$ con $f \in C^1(A)$ e $\{f'_k\}$ converge (uniformemente) a f' su A. Se A è limitato allora anche $\{f_k\}$ converge uniformemente a f in A.*

Dimostrazione Dalla Proposizione 5.23 segue che esiste $g \in C(A)$ tale che $\{f'_k\}$ converge uniformemente a g in A. Dalla Proposizione 5.26, dal teorema fondamentale del calcolo e dalla ipotesi su $\{f_k(x_0)\}$ segue che, per ogni $x \in A$,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \Big(f_k(x_0) + \int_{x_0}^x f'_k(t)dt \Big) = \alpha + \int_{x_0}^x g(t)dt \ . \tag{5.50}$$

Se denotiamo $f(x)$ tale limite, da (5.50) (ancora per il teorema fondamentale del calcolo) segue che $f \in C^1(A)$ e che $f' = g$, il che dimostra la prima parte della tesi.

Assumiamo ora che A sia limitato e cioè che $A = (a, b)$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste k_0 tale che, per ogni $k \geq k_0$,

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \ , \qquad \sup_A |f'_k(x) - f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \ .$$

Dalla Proposizione 5.26 segue che, per ogni $x \in A$ e per ogni $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &= \Big| f_k(x_0) - f(x_0) + \int_{x_0}^x \Big(f'_k(y) - f'(y) \Big) dy \Big| \\ &\leq |f_k(x_0) - f(x_0)| + \Big| \int_{x_0}^x |f'_k(y) - f'(y)| dy \Big| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + (b-a) \ \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon \ . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 5.28 Si noti che per dedurre l'uniforme convergenza di $\{f_k\}$, l'ipotesi che A sia limitato è essenziale: $f_k(x) := x/k$ converge a 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'_k = 1/k$ converge a 0 *uniformemente* su $\mathbb{R}$ ma f_k non converge uniformemente a 0 (per ogni k, $\sup_{\mathbb{R}} |f_k| = \infty$).

Serie di Funzioni

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e $u^{(k)} : A \to \mathbb{R}^m$ per ogni k; vogliamo studiare il comportamento della **serie di funzioni** $f := \sum_{k\geq 0} u^{(k)}$, o più semplicemente $\sum u^{(k)}$.

Studiare il comportamento della serie equivale a studiare la successione delle "ridotte"

$$f^{(n)} := \sum_{k=0}^n u^{(k)} \tag{5.51}$$

e dunque tutto ciò che si è detto per successioni di funzioni si estende immediatamente a serie di funzioni f.

Osservando che, per $m \geq n$,

$$f^{(m)} - f^{(n-1)} = \sum_{k=n}^m u^{(k)}$$

si ha che *una serie di funzioni $\sum u^{(k)}$ converge uniformemente su A se e solo se*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \Big| \sum_{k=n}^\infty u^{(k)}(x) \Big| = 0 \ . \tag{5.52}$$

Vi è però un concetto nuovo particolarmente naturale nell'ambito delle serie ed è quello di **convergenza totale**:

Definizione 5.29 *Diremo che la serie di funzioni $\sum u^{(k)}$ converge totalmente su A se e solo se converge la serie numerica a termini non negativi $\sum \sup_A |u^{(k)}|$ ovvero se e solo se*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \sup_{x\in A} |u^{(k)}(x)| = 0 \ . \tag{5.53}$$

Osservazione 5.30 *La convergenza totale implica la convergenza uniforme.* Ovviamente, poiché per ogni $m \geq n$, e per ogni $x \in A$

$$\Big| \sum_{k=n}^{m} u^{(k)}(x) \Big| \leq \sum_{k=n}^{m} \sup_A |u^{(k)}| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sup_A |u^{(k)}| \ ,$$

prendendo prima il limite per $m \to \infty$ (nel primo membro) e poi l'estremo superiore per $x \in A$, si ha che $\sup_A \Big| \sum_{k=n}^{\infty} u^{(k)}(x) \Big| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sup_A |u^{(k)}(x)|$.

Come è naturale aspettarsi vi sono esempi di serie che convergono uniformemente, ma non totalmente, su di un insieme:

Esempio 5.31 Si consideri la serie $\sum u_k$ con $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $u_k(x) := x^k/k$. Tale serie converge assolutamente[12] se $|x| < 1$, converge "condizionatamente" (criterio di Leibnitz) per $x = -1$ e non converge se $x = 1$ oppure $|x| > 1$. Vediamo che tipo di convergenza si ha nell'"intervallo di convergenza puntuale" e cioè in $[-1, 1)$. Poiché, per $a \geq 0$,

$$\sup_{|x|\leq a} \Big| \frac{x^k}{k} \Big| = \frac{a^k}{k} \ ,$$

si ha che $\sum u_k$ converge totalmente in $\{|x| \leq a\}$ se $a < 1$ mentre non converge totalmente in insiemi della forma $[-1, a)$ o $[-a, 1)$ con $a < 1$. Invece, poiché per $-1 \leq x \leq 0$ e per $m \geq n$, si ha che[13]

$$\Big| \sum_{k=n}^{m} \frac{x^k}{k} \Big| = \Big| \sum_{k=n}^{m} (-1)^k \frac{|x|^k}{k} \Big| \leq \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n} \ ,$$

si ha che $\sum u_k$ converge uniformemente in $[-1, 0]$ e, ricordando l'Osservazione 5.30, quindi su $[-1, a]$ per ogni $0 \leq a < 1$. Naturalmente, per il punto (ii) dell'Osservazione 5.24, non converge uniformemente in $[a, 1)$ (essendo $\sum u_k(1) = \sum 1/k = \infty$).

4 Serie di potenze e funzioni reali-analitiche

Si consideri la "serie di potenze" $\sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n$ dove x è una variabile reale e x_0 e a_n sono numeri reali dati. Il problema è studiare la convergenza della successione $\sum_{n=0}^{N} a_n(x - x_0)^n$ per $N \to \infty$ per valori di x in un intorno di x_0.

Teorema 5.32 *Sia*[14] $R := \big(\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \big)^{-1}$ *. La serie $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge assolutamente se $|x - x_0| < R$ e non converge se $|x - x_0| > R$.*

[12] Per convergenza assoluta si intende la convergenza puntuale della serie $\sum |u^{(k)}(x)|$.

[13] Se $\{a_k\}$ è una successione monotona di numeri non negativi, non crescenti che tendono a 0, allora $|\sum_{k=n}^{m} (-1)^k a_k| \leq a_n$.

[14] Adottiamo qui la convenzione che $R = 0$ se il limite superiore è $+\infty$ ed $R = +\infty$ se il limite superiore è 0.

Dimostrazione Si ha:

$$\limsup(|a_n||x-x_0|^n)^{\frac{1}{n}} = |x-x_0| \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = |x-x_0|\frac{1}{R}$$

e il teorema segue dal criterio della radice per serie numeriche[15]. ∎

Definizione 5.33 *Il valore $R =: \rho(f) \in [0,\infty]$ definito nel Teorema 5.32 prende il nome di* **raggio di convergenza** *della serie di potenze $f = \sum a_n(x-x_0)^n$.*

Esempio 5.34 È immediato verificare che[16]

$$(\mathbf{1})\quad \rho\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}\Big) = \infty\ , \quad (\mathbf{2})\quad \rho\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n\Big) = 0\ , \quad (\mathbf{3})\quad \rho\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha x^n\Big) = 1$$

e, nel caso **(3)**, per $\alpha = 0$ la serie non converge per $|x| = 1$, per $\alpha < -1$ la serie converge per ogni $|x| = 1$, e per $-1 \le \alpha < 0$ la serie diverge per $x = 1$ e converge per $x = -1$ (criterio di Leibnitz). Quindi, la convergenza per $|x-x_0|$ uguale al raggio di convergenza va discussa di volta in volta.

Osservazione 5.35 Per ogni $r < \rho(f)$ la serie $\sum a_n(x-x_0)^n$ *converge totalmente* per $|x - x_0| \le r$.

Ricordando che la convergenza totale implica quella uniforme, applichiamo la Proposizione 5.27 e consideriamo le serie ottenute derivando termine a termine la serie f:

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n((x-x_0)^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(x-x_0)^n\ , \\ f_k &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n((x-x_0)^n)^{(k)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)\ (x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}\frac{(n+k)!}{n!}(x-x_0)^n\ , \qquad \big(k \ge 2\big)\ . \end{aligned} \tag{5.54}$$

Poiché $\limsup_{n\to\infty}(n+h)^{\frac{1}{n}} = 1$ per ogni h, si vede immediatamente che $\rho(f_k) = \rho(f)$ per ogni $k \ge 1$. Analogamente se consideriamo le serie ottenute integrando termine a termine la serie f:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n\ dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}(x-x_0)^n\ , \\ F_k &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_{n-k}}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}(x-x_0)^n\ , \quad k \ge 2\ . \end{aligned} \tag{5.55}$$

---

[15] Si ricorda il criterio della radice per serie numeriche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: *se* $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ *allora la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge assolutamente; se* $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$ *allora* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *non converge.*

[16] Qui $x_0 = 0$.

si vede subito che $\rho(F_k) = \rho(f)$ per ogni $k \geq 1$. Quindi dalle Proposizioni 5.27 e 5.26 e dall'Osservazione 5.35 segue immediatamente il seguente risultato.

Teorema 5.36 *Sia $f = \sum a_n(x-x_0)^n$ e siano f_k e F_k le serie di potenze definite in (5.54) e (5.55). Se R è il raggio di convergenza della serie f, si ha $\rho(f_k) = R = \rho(F_k)$ (per ogni $k \geq 1$) ed inoltre f è una funzione $C^\infty(\{x : |x-x_0| < R\})$ e valgono le relazioni*

$$f^{(k)} = f_k \quad ,(k \geq 1),$$
$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = F_1(x) \ ,..., \int_{x_0}^{x} F_{k-1}(t)dt = F_k(x) \quad ,(k \geq 2).$$

Come applicazione consideriamo il seguente

Esempio 5.37 Sappiamo che la serie geometrica di ragione x con $|x| < 1$ ha somma $(1-x)^{-1}$ cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \ . \tag{5.56}$$

Derivando k volte la funzione $(1-x)^{-1}$ si ottiene

$$\frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{1-x} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \ . \tag{5.57}$$

Dunque, da (5.54), da (5.57) e dal Teorema 5.36 otteniamo la relazione

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} \ x^n \tag{5.58}$$

ossia

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \ x^n \ , \tag{5.59}$$

che dunque rappresenta l'espansione in serie della funzione $(1-x)^{-(k+1)}$.

Osservazione 5.38 (i) Sia $f(x) := \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Dal Teorema 5.36 sappiamo che $f \in C^\infty(\{x : |x-x_0| < R\})$ e calcolando la k–esima derivata in $x = x_0$ otteniamo

$$f^{(k)}(x_0) = a_k \ k! \ , \qquad \text{cioè} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (n \geq 0) \ . \tag{5.60}$$

(ii) Se $f = \sum a_n(x-x_0)^n$ e $g = \sum b_n(x-x_0)^n$ sono due serie di potenze convergenti per $|x-x_0| < r$ e se $f(x) = g(x)$ per ogni $|x-x_0| < r$, chiaramente $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$ per ogni $n \geq 0$. Quindi da (5.60) segue che $a_n = b_n$ per ogni $n \geq 0$. Riassumendo: *due serie di potenze hanno la stessa somma nell'intorno di un punto se e solo se hanno tutti i coefficienti coincidenti.*

La convergenza di una serie di potenze si caratterizza facilmente in termini del tasso di crescita dei suoi coefficienti:

Teorema 5.39 *Se la serie di potenze $\sum a_n(x-x_0)^n$ ha raggio di convergenza R positivo allora, per ogni $r < R$ esiste $M > 0$ tale che*

$$|a_n| \leq M \ r^{-n} \ , \qquad \forall \ n \geq 0 \ . \tag{5.61}$$

Viceversa se vale (5.61), allora la serie di potenze $\sum a_n(x-x_0)^n$ ha raggio di convergenza $R \geq r$.

Dimostrazione Assumiamo che $\sum a_n(x-x_0)^n$ abbia raggio di convergenza $R>0$. Dalla definizione di R (e dalla definizione di estremo superiore) segue che per ogni $r<R$ esiste $N>0$ tale che se $n \geq N$ allora $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq r^{-1}$ ossia $|a_n| \leq r^{-n}$. Quindi (5.61) vale se scegliamo

$$M_0 := \max_{0 \leq n \leq N} |a_n| r^n \ , \qquad \text{e} \qquad M := \max\{M_0 \ , \ 1\} \ . \tag{5.62}$$

Assumiamo ora che valga (5.61) ossia (prendendo la radice n–esima) $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}} r^{-1}$. Prendendo il limite superiore per n che tende ad ∞ di tale relazione otteniamo immediatamente che $R^{-1} \leq r^{-1}$ ossia che il raggio di convergenza R di $\sum a_n(x-x_0)^n$ verifica $R \geq r > 0$. ∎

Il "comportamento" di una serie di potenze $\sum a_n(x-x_0)^n$ attorno a x_0 è legato al primo coefficiente non nullo.

Proposizione 5.40 *Sia $m \geq 0$, sia $u = \sum_{n \geq m} a_n(x-x_0)^n$ con $a_m \neq 0$ una serie di potenze con raggio di convergenza positivo. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r_0 > 0$ tale che, per ogni $|x-x_0| \leq r_0$,*

$$(1-\varepsilon)|a_m||x-x_0|^m \leq \Big| \sum_{n \geq m} a_n(x-x_0)^n \Big| \leq (1+\varepsilon)|a_m||x-x_0|^m \ . \tag{5.63}$$

Dimostrazione Poniamo $y := x - x_0$. Per il Teorema 5.39 esistono M, r tali che (5.61) vale. Allora, per ogni $|y| < r$, si ha

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{n \geq m} a_n y^n - a_m y^m \Big| &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n||y|^n \leq M \sum_{n=m+1}^{\infty} \Big(\frac{|y|}{r}\Big)^n \\ &= |a_m||y|^m \Big(\frac{M}{|a_m| r^m} \frac{|y|}{r-|y|} \Big) \ . \end{aligned} \tag{5.64}$$

Se ora imponiamo che $|y|$ sia così piccolo che la quantità in parentesi nell'ultima riga di (5.64) sia minore o uguale ad ε otteniamo l'asserto. È immediato verificare che ciò si ottiene richiedendo che $|y| \leq r_0$ con

$$r_0 := \frac{\varepsilon r^{m+1} |a_m|}{M + \varepsilon r^m |a_m|} \ . \qquad ∎ \tag{5.65}$$

Abbiamo visto che una serie di potenze $u = \sum a_n x^n$ è derivabile infinite volte nell'intervallo aperto $\{x : |x| < R\}$ dove $R = \rho(u)$ denota il raggio di convergenza di u. Una domanda naturale è quindi: "Esistono funzioni C^∞ che non siano rappresentabili tramite serie di potenze?" La risposta è affermativa e quindi le serie di potenze sono una classe funzionale più piccola delle funzioni indefinitamente differenziabili. Prima di motivare tale risposta, diamo due definizioni.

Definizione 5.41 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, k un intero positivo o $+\infty$ ed f una funzione definita su E. Diremo che $f \in C^k(E)$, se esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $f \in C^k(A)$.*

Tale definizione generalizza la nozione di funzione C^k e permette di parlare di funzioni derivabili su insiemi chiusi[17].

Definizione 5.42 *Sia $f \in C^\infty(\{x_0\})$, si chiama serie di Taylor di f la seguente serie di potenze*

$$\sum a_n(x-x_0)^n \ , \qquad \text{dove} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \ . \tag{5.66}$$

[17] Per esempio, $f \in C^\infty(\{0\})$ significa che esiste $r>0$ tale che $f \in C^\infty(-r,r)$. Si noti che tale definizione è data per $k>0$ ma non per $k=0$; infatti esistono funzioni continue in un punto ma che non sono continue su alcun intorno di tale punto (si veda **1.9**).

Per il teorema sulla formula di Taylor, i troncamenti all'ordine N della serie di Taylor di[18] $f \in C^\infty(\{x_0\})$ approssimano la funzione f a meno di una quantità di ordine $O(|x-x_0|^{N+1})$.

Esempio 5.43 Si consideri ora la seguente funzione di una variabile reale

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ \\ \exp(-\frac{1}{x}) & \text{se } x > 0 \end{cases} \tag{5.67}$$

Dimostriamo che $g \in C^\infty$. Cominciamo col dimostrare che per $x > 0$, la derivata k–esima di g ha la forma

$$g^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x}) \tag{5.68}$$

dove $P_k(y)$ è un polinomio in y di grado $2k$. Infatti per $k = 1$, si ha che

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \ , \qquad (x > 0) \tag{5.69}$$

e quindi l'asserto è vero con $P_1(y) := y^2$. Assumiamo l'asserto vero per $0, ..., k-1$ e dimostriamolo per k.

$$\begin{aligned} g^{(k)}(x) \quad &= \quad \Big(g^{(k-1)}(x) \Big)' \\ &= \quad \Big[P'_{k-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) + P_{k-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] e^{-\frac{1}{x}} \\ &:= \quad P_k\Big(\frac{1}{x}\Big) e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

il che implica che l'asserto è vero anche per k. Poiché per ogni $k > 0$ si ha che

$$\lim_{y \to \infty} y^k \exp(-y) = 0 \ ,$$

da (5.68) segue che[19], per ogni intero $k, p \ge 0$

$$\lim_{x \downarrow 0} g^{(k)}(x) x^{-p} = 0 \ . \tag{5.70}$$

In particolare (poiché $g^{(k)}(x) := 0$ per ogni $x < 0$) segue che $g^{(k)}(0+) = g^{(k)}(0-) = 0$, per ogni $k \ge 0$. Da tale relazione segue anche che $g^{(k)}(0) = 0$ per ogni k. Infatti per $k = 0$ è vero per definizione. Assumiamo che $k \ge 1$ e che $g^{(k-1)}(0) = 0$. Allora

$$g^{(k)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g^{(k-1)}(h)}{h} = 0 \ .$$

Dunque poiché g è chiaramente $C^\infty(0, \infty)$ e $C^\infty(-\infty, 0)$ segue che $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ma allora (essendo $g^{(k)}(0) = 0$) la serie di Taylor di g è la serie banale ($a_n := 0$) che ha raggio di convergenza infinito. D'altra parte non può esistere nessun intorno di 0 in cui la somma della serie di Taylor (e cioè 0) eguagli g poiché $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

Questa discussione motiva la seguente

---

[18] Ossia i polinomi di ordine N $\sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n$ con $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.

[19] Si ricorda che $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 con $x > x_0$; analogamente $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 con $x < x_0$.

Definizione 5.44 (Funzioni reali analitiche) *Una funzione $f \in C^\infty(\{x_0\})$ a valori reali si dice (reale) analitica in x_0 se la sua serie di Taylor ha raggio di convergenza positivo e se $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ (con a_n definiti in (5.66)) in un intorno di x_0. Una funzione $f \in C^\infty(E)$ si dice (reale) analitica su E se f è (reale) analitica in ogni punto x_0 di E; la classe di tali funzione si denota con $C^\omega(E)$.*

Osservazione 5.45 (i) Una funzione reale analitica è, dunque, una funzione che localmente si rappresenta come una serie di potenze coincidente con la sua serie di Taylor. Quindi la funzione g dell'Esempio 5.43 è $C^\infty(\mathbb{R})$ ma non $C^\omega(\mathbb{R})$ [più precisamente $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap C^\omega(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ ma $f \notin C^\omega(\{0\})$].

(ii) Dal Capitolo 2 segue:

la somma e il prodotto di due funzioni $C^\omega(E)$ appartengono a $C^\omega(E)$; se $f \in C^\omega(E)$ e $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in E$ allora $1/f \in C^\omega(E)$; se $f \in C^\omega(\{x_0\})$ e $g \in C^\omega(\{y_0\})$ con $y_0 := f(x_0)$ allora $g \circ f \in C^\omega(\{x_0\})$.

Dimostriamo, ad esempio, l'affermazione relativa al reciproco. Fissiamo $x_0 \in E$; dalla definizione di C^ω segue che $f = \sum_{n \geq 0} a_n(x-x_0)^n$ in un intorno di x_0 e $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$. Si dimostra che $1/f$ è una serie di potenze in un intorno di x_0 e dall'Osservazione 5.38 punto (i) si ha che tale serie coincide con la serie di Taylor di $1/f$ e questo significa che $1/f$ è analitica in intorno di x_0. Ragionando in maniera analoga si dimostrano anche le altre affermazioni. ■

(iii) Dal Teorema 5.36, segue che una serie di potenze $f = \sum a_n(x-x_0)^n$ con $R := \rho(f) > 0$ (e $a_n \in \mathbb{R}$) è di classe $C^\omega((x_0 - R, x_0 + R))$; il "viceversa" di tale affermazione, in generale, non è però vero: la funzione $f(x) := 1/(1+x^2)$, per il punto (ii), è $C^\omega(\mathbb{R})$ ma la serie di Taylor di f in 0 è data da

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^{2k} ,$$

che, come si verifica immediatamente, ha raggio di convergenza 1.

In vista di queste osservazioni è naturale aspettarsi che vi sia una caratterizzazione delle funzioni analitiche simile a quella che si ha per le serie di potenze. Infatti vale il seguente

Teorema 5.46 (Caratterizzazione delle funzioni analitiche) *La funzione f è analitica in x_0 se e solo se $f \in C^\infty(\{x_0\})$ ed esistono due costanti positive M, r tali che*

$$\sup_{|x-x_0|<r} |f^{(n)}(x)| \leq M r^{-n}\ n! , \qquad \forall\ n \geq 0 . \tag{5.71}$$

Dimostrazione Cominciamo con il dimostrare il "se". Supponiamo, quindi, che valga (5.71) e sia $0 < R < r$, allora

$$\sum_{n\geq 0} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| \leq M \sum_{n \geq 0} r^{-n} R^n < \infty . \tag{5.72}$$

Sia, ora, x tale che $|x - x_0| < r$. Per la formula di Taylor (con resto in forma di Lagrange) si ha, per un qualche $x^{(N)}$ tra x e x_0,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| &= \lim_{N\to\infty} \left| \frac{f^{(N+1)}(x^{(N)})}{(N+1)!} \right| |x-x_0|^{N+1} \\ &\leq \lim_{N\to\infty} M\ (|x-x_0| r^{-1})^{N+1} = 0 . \end{aligned}$$

Quindi $f = \sum a_n(x-x_0)^n$ è analitica.
Viceversa, assumiamo che f sia analitica e che la sua serie di Taylor converga per $|x-x_0| < R$; fissiamo un r tale che $0 < r < R/2$. Allora, se a_n denotano i coefficienti della serie di Taylor di f, ricordando il Teorema 5.36 ed osservando che

$$\binom{m}{k} \le \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} = 2^m \tag{5.73}$$

per ogni $0 \le k \le m$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\sup_{|x-x_0|<r} |f^{(n)}(x)| &= \sup_{|x-x_0|<r} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n}(n+k)\cdots(1+k)(x-x_0)^k \Big| \\
&\le \frac{1}{r^n} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+n}| \frac{(n+k)!}{k!} r^{k+n} = \frac{1}{r^n} n! \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+n}| \binom{n+k}{k} r^{k+n} \\
&\le \frac{1}{r^n} n! \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+n}| (2r)^{k+n} \le \frac{1}{r^n} n! \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| (2r)^k \\
&= r^{-n}\ n!\ M \ , \qquad \text{con} \qquad M := \sum_{k \ge 0} |a_k| (2r)^k \ . \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Una classe interessante di funzioni C^∞ ma non C^ω sono funzioni che sono identicamente nulle al di fuori di un intervallo limitato.

Definizione 5.47 *Il supporto di una funzione f, denotato* $\operatorname{supp}(f)$*, è la chiusura dell'insieme $\{x : f(x) \ne 0\}$. Una funzione f si dice "a supporto compatto" se il suo supporto è un insieme limitato (e quindi compatto). La classe delle funzioni $C^k(\mathbb{R})$ a supporto compatto si denota con $C_0^k(\mathbb{R})$.*

È immediato costruire funzioni $C_0 := C_0^0$; ad esempio $f(x) := 1 - |x|$ per $|x| < 1$ e $f(x) := 0$ per $|x| \ge 1$. Più interessanti sono le funzioni C_0^∞.

Esempio 5.48 Sia g la funzione dell'Esempio 5.43. La funzione $g_0(x) := g(x)g(1-x)$ è una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$. Infatti g_0 è C^∞ essendo il prodotto di due funzioni C^∞ ed inoltre $g_0(x) = 0$ se $x < 0$ oppure se $x > 1$. D'altra parte $g_0(x) > 0$ se $x \in (0,1)$. Quindi $\operatorname{supp}(g_0) = [0,1]$ e $g_0 \in C_0^\infty$.

Esempio 5.49 Un altro modo di costruire funzioni C_0^∞ (sempre legato alla funzione esponenziale) è il seguente. Se g è la funzione definita nell'Esempio 5.43, definiamo, per ogni $\varepsilon > 0$, la funzione

$$\varphi_\varepsilon(x) := g(\varepsilon^2 - x^2) = \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{\varepsilon^2 - x^2}\Big) \ , & \text{se } |x| < \varepsilon \ , \\[2ex] 0 \ , & \text{se } |x| \ge \varepsilon \ . \end{cases} \tag{5.74}$$

Tale funzione, essendo composizione di funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$, è $C^\infty(\mathbb{R})$. Inotre è chiaro che $\varphi_\varepsilon \ge 0$, che $\varphi_\varepsilon(x) > 0$ se $|x| < \varepsilon$ e che $\varphi_\varepsilon(x) := 0$ se $|x| \ge \varepsilon$. Quindi φ_ε è una funzione a supporto compatto e $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) = \{x : |x| \le \varepsilon\}$.

Esempio 5.50 Siano $R > r > 0$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Costruiamo una funzione $\chi \in C_0^\infty$ che abbia le seguenti proprietà:

(i) $0 \le \chi \le 1$; (ii) $\chi(x) := 1$ se $|x - x_0| < r$; (iii) $\mathrm{supp}\,(\chi) = \{x : |x - x_0| \le R\}$.
Sia $g_1(x) := c \int_{-\infty}^{x} g_0(t)dt$ dove $c := \Big(\int_0^1 g_0(t)dt\Big)^{-1}$ con g_0 definita nell'Esempio 5.48. La funzione g_1 è chiaramente C^∞, è monotona non decrescente (la sua derivata è $cg_0(x)$ che è una funzione non negativa), vale 0 se $x < 0$ e vale 1 se $x > 1$.
È ora elementare controllare che la funzione cercata può essere definita come

$$\chi(x) := g_1\Big(\frac{x_0 - x + R}{R - r}\Big)\; g_1\Big(\frac{x - x_0 + R}{R - r}\Big)\;. \tag{5.75}$$

5 *Esercizi e complementi*

Esercizio 5.1 Calcolare $\partial_x^\alpha f(x_0)$ e $\partial_x^p f(x_0)(\xi^{(1)}\xi^{(2)}\xi^{(3)})$, con $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^4$, $p = 3$, $\alpha = (2, 1)$, $x_0 = (1, -1)$, $\xi^{(1)} = (1, 0)$, $\xi^{(2)} = (2, 2)$, $\xi^{(3)} = (3, 1)$.

Esercizio 5.2 Si scriva esplicitamente il polinomio di Taylor di ordine 2,3 e 4 per una funzione arbitraria di due e tre variabili nell'intorno dell'origine (assumendo, naturalmente che tali funzioni siano sufficientemente derivabili).

Esercizio 5.3 Si calcoli il polinomio di Taylor $P_k(\xi; x_0)$ nei seguenti casi:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad k = 3\;,\; n = 2\;,\; x_0 = 0\;, \quad f(x) = e^{x_1 x_2} + x_1^4\;,\\
&(2) \quad k = 3\;, (n \text{ arbitrario})\;,\; x_0 = 0\;, \quad f(x) = \cos|x|\;,\\
&(3) \quad k = 2\;,\; x_0 = 0\;, \quad f(x) = x_2^4 - \mathrm{senh}\,(x_1 + \cdots + x_n)\;,\\
&(4) \quad k = 4\;,\; n = 2\;,\; (x_0, y_0) = (\pi, 1)\;, \quad f(x) = \tan(xy) - \log y\;.
\end{aligned}$$

Esercizio 5.4 Si dia una stima dei resti $|R_k|$ in **5.3**.

Esercizio 5.5 Si calcolino le serie di Taylor nei casi (1), (2) e (3) in **5.3**.

Esercizio 5.6 Sia $f := e^{-|x|^2}(1 + x_1 x_3)$ con $x \in \mathbb{R}^3$. Calcolare $f''(0)$ e scrivere la formula di Taylor (in 0) al secondo ordine per tale f.

Esercizio 5.7 Scrivere la matrice hessiana della funzione $f(x, y) = e^y \,\mathrm{sen}\, x$ e calcolare $f''(0)\xi \cdot \eta$, dove $\xi = (3, 2)$ e $\eta = (-1, 3)$.

Esercizio 5.8 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione $f(x, y) = (2x + y)e^{x^2 - y^2}$ nel punto $(0, 0)$.

Esercizio 5.9 Si dimostri che nelle ipotesi del punto (iii) della Proposizione 5.11 , sulla retta passante per x_0 e di direzione w vi sono punti y arbitrariamente vicini a x_0 tali che $f(y) < f(x_0)$.

Esercizio 5.10 Dimostrare che se A è aperto e connesso in $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ e $f'(x) := \nabla f(x) = 0$ $\forall\, x \in A$ allora f è costante su A.

Esercizio 5.11 * Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e supponiamo che $f'(x_0) = 0$ se e solo se $x = x_0$, e che $\sup_{\mathbb{R}^n} f > f(x_0) > \inf_{\mathbb{R}^n} f$.
(i) Nel caso $n = 1$ dimostrare che $x = x_0$ non può essere né un minimo né un massimo locale per f.
(ii) È vera l'affermazione fatta al punto (i) nel caso di $n \ge 2$?

Esercizio 5.12 Trovare il massimo e minimo (se esistono) della funzione

$$F(x) = \int_0^1 \log(1 + x^2 + y^2)\ dy\ .$$

Esercizio 5.13 Siano A ed E_0 come nella Definizione 5.13. Siano $A_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) > 0\}$ e $A_- := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) < 0\}$. Si mostri l'inclusione $\partial A_\pm \subseteq E_0$ e, con un esempio, che tale inclusione può essere un'inclusione in senso stretto.

Esercizio 5.14 Determinare i valori massimi e minimi assunti dal volume di un parallelepipedo (in $\mathbb{R}^3$) di superficie totale assegnata.

Esercizio 5.15 Trovare quale triangolo di perimetro assegnato ha area massima utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esercizio 5.16 Si discutano i massimi e minimi relativi ed assoluti (qualora esistano) della funzione $f(x, y) = xy^2(x + y - 1)$ nel dominio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x + y \geq 1\}$.

Esercizio 5.17 Si trovino il massimo ed il minimo di $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i$ sulla sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

Esercizio 5.18 Sia $M > 0$. Studiare i punti critici di $f = \prod_i x_i$ su $E := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i x_i = M\}$.

Esercizio 5.19 Dimostrare che valgono le seguenti due affermazioni: (i) *Se $u_n \in C([a, b])$ e $\sum u_n$ converge uniformemente in (a, b), allora $\sum u_n$ converge uniformemente in $[a, b]$.*
(ii) *Se $u_n \in C([a, b])$, $\sum u_n$ converge in (a, b) ma $\sum u_n(a)$ non converge, allora $\sum u_n$ non converge uniformemente in (a, b).*

Esercizio 5.20 Studiare la convergenza delle seguenti serie di funzioni di x, (ossia si trovino i più grandi insiemi dove le serie convergono puntualmente, uniformemente e totalmente) al variare, qualora appaia, del parametro reale α:

$$(1)\ \sum_{n=0}^\infty e^{-\alpha n} x^n\ , \qquad (2)\ \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{\alpha n}}{n^x}\ , \qquad (3)\ \sum_{n=2}^\infty \frac{(x \operatorname{sen} n)^n}{1 + n^2 x}\ ,$$

$$(4)\ \sum_{n=1}^\infty \frac{(xn)^n}{x + n!}\ , \qquad (5)\ \sum_{n=1}^\infty u_n(x) \ \text{ con } \ u_n(x) := \Big(\sum_{j=1}^n j^x\Big)^{-1}\ ,$$

$$(6)\ \sum_{n=2}^\infty \frac{n^x}{(\log n)^\alpha}\ , \qquad (7)\ \sum_{n=1}^\infty \log\Big[1 + \arctan\Big(\frac{x}{n}\Big)^\alpha\Big]\ ,$$

$$(8)\ \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^x}\ , \qquad (9)\ \sum_{n=0}^\infty e^{nx} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 nx}\ , \qquad (10)\ \sum_{n=1}^\infty (-1)^n e^{-(\log n)^x}\ .$$

Esercizio 5.21 Si considerino le serie dell'esercizio precedente e si dia, per ogni x nell'insieme di convergenza, una stima superiore semplice di $|\sum u_n(x)|$ in termini di x.

Esempio: la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos x^n}{1+x^n}$ ha come insieme di convergenza $E := \{x : |x| > 1\}$. La convergenza è puntuale ed assoluta in E mentre è totale in ogni insieme della forma $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$ con $a < -1$, $b > 1$. Per $x \in E$ si ha

$$\begin{aligned} |\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos x^n}{1 + x^n}| \ &\leq\ \sum \frac{1}{|1 + x^n|} \leq \sum \frac{1}{|x|^n - 1} \\ &\leq\ \sum \frac{1}{|x|^n} \frac{1}{1 - \frac{1}{|x|}} = \frac{|x|}{(|x| - 1)^2}\ . \end{aligned}$$

Esercizio 5.22 (i) Siano $\sum u_n$ e $\sum v_n$ due serie di funzioni convergenti uniformemente in E. Si dimostri che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la serie $\sum(au_n + bv_n)$ converge uniformemente in E a $a\sum u_n + b\sum v_n$.
(ii) Siano f_n e g_n due successioni uniformemente convergenti in $[a, b]$ a, rispettivamente, f e g. Si dimostri che $f_n g_n$ converge uniformemente a fg.

Esercizio 5.23 Sia $u_0 = x$, e, per $n \geq 1$, $u_n = (x-1)x^n$, $x \in [0,1]$. Dimostrare *direttamente* che la serie $\sum u_n$ non converge né totalmente, né uniformemente.

Esercizio 5.24 Sia $u_0 := u_1 := 0$ e, per $n \geq 2$, si definisca la funzione $u_n(x)$ come segue: sia

$$I_n := [\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}] , \qquad I_n' := [\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}, \frac{1}{n}] , \qquad I_n'' := [\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}] .$$

Sia ora $u_n = 0$ se $x \notin I_n$; in I_n', u_n coincide con la retta passante per $(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}, 0)$ e per $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ mentre nell'intervallo I_n'' u_n coincide con la retta passante per $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}, 0)$ e per $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.
Si dimostri che $u_n \in C(\mathbb{R})$ e che la serie $\sum u_n$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$ ma non vi converge totalmente.

Esercizio 5.25 Sia f_n la funzione continua che vale 0 se $x \notin (0, \frac{1}{n})$, per $x = \frac{1}{2n}$ vale 1 e coincide con una retta negli intervalli $(0, \frac{1}{2n})$ e $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$.
Dimostrare le seguenti affermazioni:
(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per ogni x; (ii) f_n non converge uniformemente su $[0,1]$; (iii) $\lim \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim f_n = 0$.

Esercizio 5.26 Trovare una successione di funzioni continue $f_n \in C([0,1])$ convergente puntualmente ad una funzione continua $f \in C([0,1])$ ma tale che $\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 f$.

Esercizio 5.27 Usando le proprietà di derivazione delle serie uniformemente convergenti, si calcoli il valore delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

Esercizio 5.28 Trovare delle formule ricorsive per calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n .$$

Esercizio 5.29 Per ogni intero $N \geq 2$, calcolare

$$\sum_{k=1}^{N-1} (N-k) 2^{k-1} .$$

Esercizio 5.30 Si dimostrino le seguenti identità

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k &= \frac{1}{x} , \quad \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)(1-x)^{k-n} \\ &= \frac{n!}{x^{n+1}} , \quad \forall\ 0 < x \leq 1 ,\ \forall\ n \geq 1 . \end{aligned} \tag{5.76}$$

Esercizio 5.31 Si costruisca una successione di funzioni continue $\delta_n \in C(\mathbb{R})$ che verifichino le seguenti proprietà: (i) $\delta_n \geq 0$; (ii) $\delta_n(x) = 0$ se $x \notin [a_n, b_n]$ dove a_n e b_n sono successioni monotone che convergono a 0 rispettivamente da sinistra e da destra; (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n := \int_{a_n}^{b_n} \delta_n = 1$.

Esercizio 5.32 ("Delta approssimata") Una successione di funzioni $\{\delta_n(x)\}$ che verifichi le proprietà (i), (ii), (iii) di **5.31** prende il nome di *delta approssimata*. Dimostrare che se $\{\delta_n\}$ è una delta approssimata allora, per ogni funzione continua $f \in C([a_0, b_0])$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = f(0) \ . \tag{5.77}$$

Esercizio 5.33 Si dia un esempio di una serie di funzioni C^∞ tale che $\sum u_n'$ converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ ma tale che $\sum u_n(x)$ non converge per nessun $x \in \mathbb{R}$.

C 5.34 (Convergenza monotona e convergenza uniforme)

Proposizione 5.51 *Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ un insieme compatto, siano f_n (per $n \geq 0$) e f funzioni continue su K e tali che*[20] *$f_n \uparrow f$ [oppure $f_n \downarrow f$]. Allora $f_n \to f$ uniformemente su K.*

Dimostrazione Per assurdo: la negazione di "f_n converge a f uniformemente" è:

$$\exists\ \varepsilon > 0 : \quad \forall\ n \geq 0\ \exists\ x_n \quad \text{tale che} \quad |f(x_n) - f_n(x_n)| \geq \varepsilon \ . \tag{5.78}$$

Poiché K è compatto esiste $x_{n_k} \to \bar{x} \in K$. Dalla convergenza puntuale di f_n segue che

$$\exists\ N : \quad |f(\bar{x}) - f_n(\bar{x})| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall\ n \geq N \ . \tag{5.79}$$

Per l'uniforme continuità di f e f_N segue che esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{e} \quad |f_N(x) - f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall\ x, y \in K \text{ con } |x - y| \leq \delta \ . \tag{5.80}$$

Dalla convergenza monotona di f_n a f, da (5.79) e (5.80) segue che, per ogni $x, y \in K$ con $|x-y| \leq \delta$ e per ogni $n \geq N$,

$$f_n(x) - f_n(y) \leq f(x) - f_N(y) \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \ .$$

Analogamente

$$f_n(x) - f_n(y) \geq f_N(x) - f(y) \geq -|f_N(x) - f_N(y)| - |f_N(y) - f(y)| \geq -\frac{\varepsilon}{4} \ ,$$

e quindi

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \ , \quad \forall\ x, y \in K \text{ con } |x - y| \leq \delta \ , \ \forall\ n \geq N \ . \tag{5.81}$$

Sia ora k_0 tale che $\bar{n} := n_{k_0} \geq N$ e $|\bar{x} - x_{\bar{n}}| \leq \delta$. Allora, da (5.80), (5.79) ed (5.81) segue che

$$|f(x_{\bar{n}}) - f_{\bar{n}}(x_{\bar{n}})| \leq |f(x_{\bar{n}}) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - f_{\bar{n}}(\bar{x})| + |f_{\bar{n}}(\bar{x}) - f_{\bar{n}}(x_{\bar{n}})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

relazione che contraddice (5.78). Per il caso $f_n \downarrow f$ basta applicare quanto dimostrato a $-f_n$ e $-f$. ∎

[20] Si ricorda che una successione $\{a_n\}$ si dice monotona crescente [decrescente] se $\forall n$, $a_{n+1} \geq a_n$ [$a_{n+1} \leq a_n$]; $\{a_n\}$ si dice strettamente monotona crescente [decrescente] se $\forall n$, $a_{n+1} > a_n$ [$a_{n+1} < a_n$]; $a_n \uparrow a$ significa che la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente e che $\lim a_n = a$; $a_n \downarrow a$ significa che la successione $\{a_n\}$ è monotona decrescente e che $\lim a_n = a$; $f_n \uparrow f$ significa $f_n(x) \uparrow f(x)$ per ogni x ed analogamente per $f_n \downarrow f$; una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ si dice monotona crescente [decrescente] se $\forall\ x < y$ in E, $f(x) \leq f(y)$ [$f(x) \geq f(y)$]; una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ si dice monotona strettamente crescente [decrescente] se $\forall\ x < y$ in E, $f(x) < f(y)$ [$f(x) > f(y)$].

C 5.35 (Convergenza uniforme di funzioni monotone)

Proposizione 5.52 *Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ un insieme compatto, siano f_n (per $n \geq 0$) e f funzioni continue su K e tali che $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in K$. Se le f_n sono funzioni monotone crescenti per ogni n [o monotone decrescenti per ogni n] allora $f_n \to f$ uniformemente su K.*

Dimostrazione Poiché $f \in C(K)$, f è uniformemente continua su K e dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ se $x, y \in K$ e $|x - y| \leq \delta$. Essendo K compatto è possibile trovare insiemi a due a due disgiunti K_1,...,K_M tali che $K_1 \cup \cdots \cup K_M = K$ e $\operatorname{diam} K_i := \sup_{x,y \in K_i} |x - y| \leq \delta$; chiamiamo $a_i := \inf K_i$, $b_i := \sup K_i$ (poichè $K_i \subseteq K$ e K è chiuso, $a_i, b_i \in K$ per ogni i). Poiché $f_n \to f$ puntualmente, esiste N tale che per ogni $1 \leq i \leq M$ e per ogni $n \geq N$ si ha

$$|f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon \ , \qquad |f_n(b_i) - f(b_i)| \leq \varepsilon \ .$$

Si osservi che dalla monotonia delle f_n segue la monotonia di f. Sia $x \in K$ e sia j tale che $x \in K_j$ e per ogni $n \geq N$ si ha

$$f(x) - f_n(x) \leq f(b_j) - f_n(a_j) \leq |f(b_j) - f_n(b_j)| + |f_n(b_j) - f_n(a_j)| \leq 2\varepsilon \ ,$$

ed analogamente

$$f(x) - f_n(x) \geq f(a_j) - f_n(b_j) \geq -|f(a_j) - f_n(a_j)| - |f_n(a_j) - f_n(b_j)| \geq -2\varepsilon \ ,$$

ossia $|f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon$ per ogni $n \geq N$ e per ogni $x \in K$ il che prova l'asserto. Per il caso in cui le f_n sono monotone decrescenti basta applicare quanto dimostrato a $-f_n$ e $-f$. ∎

C 5.36 (Equicontinuità e Teorema di Ascoli–Arzelà)

Definizione 5.53 *Una successione $\{f_n\}$ di funzioni $f_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* **equicontinua** *(su E) se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$, $\quad \forall\ n, \quad \forall\ x, y \in E$ con $|x - y| < \delta$.*

Alcune proprietà elementari di successioni equicontinue sono raccolte nella seguente

Proposizione 5.54 *Sia $\{f_n\}$ una successione equicontinua su $E \subseteq \mathbb{R}$.*
(i) Se $f_n(x)$ converge $\forall\ x \in D$, con D denso in E, allora $f_n(x)$ converge $\forall\ x \in E$;
(ii) se E è compatto e $f_n(x) \to f(x)\ \forall\ x \in E$ allora f_n converge uniformemente a f in E;
(iii) se E è compatto e $\sup\limits_n |f_n(x)| < \infty$ per ogni $x \in E$, allora $\sup\limits_n \sup\limits_E |f_n(x)| < \infty$.

Dimostrazione (i): Sia $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$. Dalla definizione di equicontinuità segue che

$$\exists\ \delta > 0 :\ |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\ n \quad \forall\ x, y \in E \text{ con } |x - y| < \delta \ . \tag{5.82}$$

Poiché D è denso in E esiste $\bar{x} \in D$ tale che $|\bar{x} - x_0| < \delta$. Sia $N \geq 1$ tale che $|f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| < \varepsilon/3$ per ogni $n, m \geq N$ (criterio di Cauchy per la successione convergente $\{f_n(\bar{x})\}$). Allora, per ogni $n, m \geq N$,

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq |f_n(x_0) - f_n(\bar{x})| + |f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| + |f_m(\bar{x}) - f_m(x_0)| < \varepsilon \ ,$$

il che significa che $\{f_n(x_0)\}$ è una successione di Cauchy e quindi convergente.

(ii): Dato $\varepsilon > 0$ sia δ come in (5.82) e si osservi che prendendo il limite per $n \to \infty$ si ha anche che $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3$. Poiché E è compatto si possono trovare k intervalli aperti B_i di centro $x^{(i)} \in E$ di lunghezza 2δ tali che $E \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_k$. Poiché f_n converge puntualmente su E, esiste N tale che $|f_n(x^{(i)}) - f(x^{(i)})| < \varepsilon/3$ per ogni $n \geq N$ e per ogni $1 \leq i \leq k$. Dato un qualunque punto $x \in E$ esiste un $1 \leq j \leq k$ tale che $x \in B_j$ e quindi $|x - x^{(j)}| < \delta$. Dunque, per ogni $n \geq N$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x^{(j)})| + |f_n(x^{(j)}) - f(x^{(j)})| + |f(x^{(j)}) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

(iii): Dato ε siano δ, B_1,...,B_k come qui sopra. Sia $M := \sup_{1\le i\le k} \sup_n |f_n(x^{(i)})|$. Sia x un qualunque punto in E e sia (come sopra) j tale che $|x - x^{(j)}| < \delta$. Allora per ogni n

$$|f_n(x)| \le |f_n(x) - f_n(x^{(j)})| + |f_n(x^{(j)})| \le \frac{\varepsilon}{3} + M \ ,$$

da cui segue anche (iii). $\blacksquare$

Teorema 5.55 (Ascoli, Arzelà) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme compatto e sia $\{f_n\}$ una successione equicontinua di funzioni su E tali che $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ per ogni $x \in E$. Allora esiste una successione $\{n_k\}$ di interi tali che f_{n_k} converge uniformemente su E.*

Lemma 5.56 (Trucco diagonale di Cantor) *Siano $a_n^{(j)}$ numeri reali (con $n, j \in \mathbb{N}$) tali che, per ogni j, $\sup_n |a_n^{(j)}| < \infty$. Allora esiste una successione di interi n_k tale che le successioni $\{a_{n_k}^{(j)}\}_{k\ge 0}$ convergono per ogni j.*

Dimostrazione Poiché $\{a_n^{(1)}\}$ è limitata esiste una successione $\{n_k^{(1)}\}$ tale che $a_{n_k^{(1)}}^{(1)}$ converge; analogamente essendo $\{a_{n_k^{(1)}}^{(2)}\}$ limitata esiste una sottosuccessione $\{n_k^{(2)}\}$ di $\{n_k^{(1)}\}$ tale che $a_{n_k^{(2)}}^{(2)}$ converge; proseguendo indefinitivamente in tal modo si ottengono successioni di interi $\{n_k^{(i)}\}$ tali che: (a) $\{n_k^{(i+1)}\}_{k\ge 0}$ è una sottosuccessione di $\{n_k^{(i)}\}_{k\ge 0}$; (b) $a_{n_k^{(i)}}^{(j)}$ converge (per $k \to \infty$) per ogni $1 \le j \le i$. Definendo $n_k := n_k^{(k)}$ si ha l'asserto (infatti, per ogni j, $\{n_j, n_{j+1}, ...\}$ è una sottosuccessione di $\{n_k^{(j)}\}$. $\blacksquare$

Dimostrazione (del Teorema di Ascoli–Arzelà) Sia $D := \{r_j : j \in \mathbb{N}\}$ una numerazione dei razionali in E (cosicché D è denso in E). Dal punto (iii) della Proposizione 5.54 segue che esiste M tale che $|f_n(x)| \le M$ per ogni n e per ogni $x \in E$. Applicando il Lemma 5.56 con $a_n^{(j)} := f_n(r_j)$ si ha che esiste una successione $\{n_k\}$ tale che $f_{n_k}(r_j)$ converge (per $k \to \infty$) per ogni $r_j \in D$. Dal punto (i) della Proposizione segue che $f_{n_k}(x)$ converge per ogni $x \in E$ e per il punto (ii) della Proposizione la convergenza è uniforme in E. $\blacksquare$

Esercizio 5.37 Sia E la chiusura di un aperto limitato A e sia, per $n \ge 0$, $f_n \in C(E) \cap C^1(A)$. Si dimostri che se $\sup_{\substack{x\in(a,b)\\ n\ge 0}} |f_n'(x)| < \infty$ allora $\{f_n\}$ è una successione equicontinua su E.

Esercizio 5.38 Sia $f_n(x) := \cos(x \operatorname{sen} n)$.
(i) Dimostrare che $\{f_n\}$ è equicontinua su $[-a, a]$ per ogni $a > 0$.
(ii) Trovare infinite successioni $\{n_k^{(i)}\}_{k\ge 0}$ tali che $\lim_{k\to\infty} f_{n_k^{(i)}} = f^{(i)}$ uniformemente in $[-a, a]$ con $f^{(i)} \ne f^{(j)}$ se $i \ne j$.

C 5.39 (Operatori alle differenze finite) Sia E un aperto di $\mathbb{R}$ e sia $u \in C^1(E)$.
(i) Dimostrare che per ogni x, a, b tali che $[a + x, b + x] \subseteq E$ si ha

$$\frac{d}{dx}\int_a^b u(x+t)dt = \int_a^b u'(x+t)dt \ . \tag{5.83}$$

(ii) Fissiamo tre numeri α, β, r tali che $0 < r < \beta - \alpha$ e tali che $[\alpha - r, \beta + r] \subseteq E$. Definiamo ora un "operatore" D_h che, dato un numero $h \ne 0$ con $|h| \le r$, associ alla funzione u la funzione $D_h u$ che assume in $x \in [\alpha, \beta]$ il valore

$$D_h u(x) := \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \ . \tag{5.84}$$

L'operatore D_h si chiama **operatore alle differenze finite**. L'analogia con l'operatore di derivata, $D := \frac{d}{dx}$, è evidente: dalla definizione di derivata e dalle ipotesi su u segue che

$$\lim_{h\to 0} D_h u(x) = u'(x) := Du(x) \ , \qquad \forall\ x \in [\alpha, \beta] \ . \tag{5.85}$$

(iii) L'osservazione fatta al punto (ii) si generalizza ad ordine n come segue. Assumiamo $u \in C^n(E)$ e definiamo definiamo iterativamente **l'operatore alle differenze finite di ordine** p, per $1 \le p \le n$ e per $|h| \le \frac{r}{n}$, come

$$D_h^p u(x) := D_h(D_h^{p-1}u)(x) \ ; \tag{5.86}$$

cioè

$$\begin{aligned} D_h^2 u(x) &= \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)}{h^2} \ , \\ D_h^3 u(x) &= \frac{u(x+3h) - 3u(x+2h) + 3u(x+h) - u(x)}{h^3} \ , \end{aligned} \tag{5.87}$$

e così via. Dimostrare che

$$\lim_{h\to 0} D_h^p u(x) = u^{(p)}(x) \ , \quad \forall\ 1 \le p \le n \ , \quad \forall\ x \in [\alpha, \beta] \ . \tag{5.88}$$

(iv) Si dimostri che

$$D_h^p u(x) = \frac{1}{h^p} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} (-1)^j u\big(x + (p-j)h\big) \ . \tag{5.89}$$

T 5.40 * **(Una funzione continua non derivabile in alcun punto)**
Diamo un esempio (dovuto a van der Waerden) di una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ (periodica di periodo 1) ma che non ammette derivata in alcun punto. Sia $\rho(x) := \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x - n|$ la funzione che ad un numero reale x associa la sua distanza minima dagli interi.
La funzione di van der Waerden è definita come

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(10^n x)}{10^n} \ . \tag{5.90}$$

Chiaramente, poichè $0 \le \rho \le \frac{1}{2}$, la serie in (5.90) converge totalmente e quindi il suo limite f è una funzione continua. Facciamo ora vedere che f non è derivabile in alcun punto. Poiché f è periodica di periodo 1, cioè $f(x+1) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, (lo si dimostri), basterà far vedere che f non è derivabile per un qualunque $x \in [0, 1)$. Fissiamo dunque un tale x e sia $x = 0, a_1a_2a_3...$ il suo sviluppo decimale, cioè a_i sono numeri interi tra 0 e 9 e $x = \sum_{n\ge 1} \frac{a_n}{10^n}$. Per ogni intero n definiamo le seguenti quantità

$$\begin{aligned} x_n &:= \quad 0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}... \ , \qquad && \varepsilon_n := \begin{cases} -1 \ , & \text{se } a_n = 4 \text{ oppure } a_n = 9 \\ 1 \ , & \text{altrimenti} \end{cases} \ , \\ h_n &:= \quad \varepsilon_n 10^{-n} \ , && \bar\varepsilon_n := \begin{cases} 1 & \text{se } a_{n+1} \le 4 \\ \\ -1 & \text{se } a_{n+1} \ge 5 \end{cases} \ . \end{aligned} \tag{5.91}$$

Si ha allora (lo si dimostri!)

$$\rho\big(10^n(x + h_m)\big) - \rho(10^n x) = \rho(x_n + \varepsilon_m 10^{n-m}) - \rho(x_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \ge m \\ \\ \bar\varepsilon_n \varepsilon_m 10^{n-m} & \text{se } n < m \end{cases} \ . \tag{5.92}$$

[Per la prima uguaglianza, si noti che $10^n x = p + x_n$ per un qualche intero p e si ricordi che ρ è periodica di periodo 1. Per la seconda uguaglianza si noti che se $a_{n+1} \le 4$ allora x_n e $x_n + \varepsilon_m 10^{n-m}$

appartengono all'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$, mentre se $a_{n+1} \geq 5$ allora x_n e $x_n + \varepsilon_m 10^{n-m}$ appartengono all'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$.] Quindi

$$\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} = \frac{1}{h_m} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\bar{\varepsilon}_n \varepsilon_m 10^{n-m}}{10^n} = \sum_{n=0}^{m-1} \bar{\varepsilon}_n \tag{5.93}$$

e poiché $\sum_{n=0}^{m-1} \bar{\varepsilon}_n$ non converge per $m \to \infty$ si ha l'asserto. ∎

Esercizio 5.41 Si dimostri che $\operatorname{sen} x - x = -\frac{x^3}{6} + x^5 g(x)$ con g analitica in $x = 0$.

Esercizio 5.42 Sia $f(x) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k^2} \operatorname{sen}(2^k x)$. Si dimostri che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma che $f \notin C^\omega(\{0\})$.

Esercizio 5.43 Si dimostri che la funzione f di **5.42** non è analitica in alcun punto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.44 * Si stimi inferiormente $\alpha_n := \sup_{|x|<r} \frac{|g^{(n)}(x)|}{n!}$ dove g è la funzione dell'Esempio 5.43 e si faccia vedere che $\limsup \alpha_n r^n = \infty$ per ogni $r > 0$.

Esercizio 5.45 Se f è analitica in un intorno di 0, lo sono anche f' e $\int_0^x f(y)dy$.

Esercizio 5.46 Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \ , & \text{se } x \neq 0 \ , \\ 0 & \text{se } x = 0 \ , \end{cases} \tag{5.94}$$

è una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$. Si trovi una successione x_k con $x_k > 0$ e $\lim x_k = 0$ tale che $f(x_k) = 0$ e si concluda, grazie al § 4, che f non è analitica nell'intorno di 0.

T 5.47 (Stima di Cauchy) Sia u una funzione analitica in $\{x : |x - x_0| < r\}$.
Si dimostri che esiste una costante $C > 0$ tale, per ogni $\delta > 0$,

$$\sup_{|x-x_0| \leq r-\delta} |u^{(k)}(x)| \leq C\delta^{-(k+1)} \ , \qquad \forall\, k \geq 0 \ . \tag{5.95}$$

Esercizio 5.48 Si consideri una serie di potenze $u = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$ con $a_1 \neq 0$. Assumendo che la funzione inversa di u, u^{-1} sia espandibile in serie di potenze attorno a 0, e cioè che $u^{-1} := v = \sum b_n x^n$, si determinino i coefficienti b_n.

Esercizio 5.49 Sia $u = \frac{x}{1-x}$ e si calcolino i coefficienti della serie di potenze di $u^n := \sum_{k \geq n} a_k^{(n)} x^k$.

Esercizio 5.50 Sia $u = \frac{x}{1-x}$. La funzione inversa è data da $x = v(y) = \frac{y}{1+y} = \sum_{n \geq 1} b_n y^n$ con $b_n = (-1)^{n-1}$.
(i) Usando **5.48** e **5.49**, si dimostri che

$$b_1 = 1 \ , \qquad b_k = -\sum_{n=1}^{k-1} b_n \binom{k-1}{n-1} \ , \tag{5.96}$$

ossia che

$$(-1)^{k-1} = -\sum_{n=1}^{k-1} (-1)^{n-1} \binom{k-1}{n-1} \ . \tag{5.97}$$

(ii) Si definiscano i numeri β_k come in (5.96) *omettendo il segno meno*, ossia si ponga

$$\beta_1 = 1 \ , \qquad \beta_k = \sum_{n=1}^{k-1} \beta_n \binom{k-1}{n-1} \ . \tag{5.98}$$

Si dimostri che $\beta_k \geq (k-1)!$ e che quindi la serie di potenze $\sum \beta_k y^k$ ha raggio di convergenza nullo.

Esercizio 5.51 Dare un sempio di una serie di potenze u tale che $\rho(u) = 1$ e $\rho(\frac{1}{u}) = \infty$.

Capitolo 6

Integrazione su varietà

1 Varietà immerse in $\mathbb{R}^n$

Chiameremo **dominio** (o dominio k–dimensionale) un insieme compatto $D = \overline{U}$ di $\mathbb{R}^k$ che sia la chiusura di un insieme $U \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto e connesso e tale che $\partial D = \partial U$ sia un insieme di misura nulla[1]. Ad esempio, la sfera unitaria chiusa

$$\overline{B}_1^k := \{u \in \mathbb{R}^k : |u| \leq 1\} \tag{6.1}$$

è un dominio in $\mathbb{R}^k$ (per $k = 1$ è semplicemente l'intervallo chiuso $[-1, 1]$). Sostituendo la norma euclidea $|\cdot|$ con la norma del massimo $|\cdot|_\infty$, si ottiene il dominio dato dal cubo di lato 2 centrato nell'origine; se $k = 2$ (o $k \geq 2$) tali insiemi hanno una ovvia differenza dal punto di vista geometrico: la frontiera del quadrato presenta delle "singolarità" (i vertici del quadrato) che, invece, la frontiera di $\overline{B}_1^2$ (e cioè la circonferenza unitaria S^1) non presenta. Nei seguenti paragrafi daremo un significato preciso a queste osservazioni intuitive e studieremo gli elementi del calcolo integrale (di funzioni regolari o regolari a tratti) su tali insiemi.

Definiamo ora una "inclusione differenziabile[2]" di un dominio k–dimensionale nello "spazio ambiente" $\mathbb{R}^n$, con $n \geq k$:

Definizione 6.1 *Sia D un dominio k–dimensionale. Una funzione $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ con $n \geq k$ si chiama* **inclusione differenziabile** *(o semplicemente "inclusione") di D in $\mathbb{R}^n$ se φ è iniettiva su D e la matrice jacobiana $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ha rango massimo su ogni punto $u \in D$.*

Una coppia (φ, D) con φ inclusione differenziabile del dominio $D \subseteq \mathbb{R}^k$ verrà anche chiamata "inclusione differenziabile" o anche "inclusione k–dimensionale".

L'immagine[3] $\varphi(D)$ di una inclusione è un oggetto geometrico k–dimensionale (essendo descritto dai k parametri $u = (u_1, ..., u_k) \in D$) immerso in $\mathbb{R}^n$ e che ha le stesse "proprietà geometriche" del dominio D. In particolare, ad ogni punto $x \in \varphi(D)$ corrisponde un unico $u \in D$ (essendo φ iniettiva): cioè la φ definisce *un sistema di coordinate* su $\varphi(D)$. Inoltre tale sistema di coordinate sarà "regolare" nel senso che la corrispondenza $u \in D \to x \in \varphi(D)$ è descritta da una funzione C^1 e con jacobiano di rango massimo.

[1] Ovvero D è misurabile secondo Peano–Jordan.

[2] La terminologia non è universale e dipende anche dalla lingua che si sta usando: altri termini che possono indicare oggetti simili (se non lo stesso oggetto) sono "immersione" oppure (in inglese) "immersion", "imbedding", "embedding" etc. Si faccia dunque molta attenzione alle definizione date di volta in volta nei vari testi.

[3] Anche: "traccia" o "supporto".

Definizione 6.2 *Se φ è una inclusione del dominio $D := \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^n$ (U aperto, connesso e limitato), l'insieme $\mathcal{S} := \varphi(U)$ si chiama* **elemento (regolare) di varietà k–dimensionale** *(o "elemento di k–varietà").*

Osservazione 6.3 (i) Si noti che il "bordo" di $\mathcal{S}$, $\varphi(\partial U)$, *non appartiene a $\mathcal{S}$*.

(ii) Dalla Proposizione 1.13 segue che l'immagine $\varphi(D)$ di una inclusione è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$. Inoltre[4], *la funzione inversa $\varphi^{-1} : \varphi(D) \to D$ è continua su $\varphi(D)$*. In particolare φ^{-1} è continua sull'elemento di varietà $\mathcal{S} := \varphi(U)$.

(iii) Per ogni punto $x_0 \in \mathcal{S} = \varphi(U)$ esiste un (unico) $u_0 \in U$ tale che $\varphi(u_0) = x_0$. Poiché U è aperto esiste una sfera aperta B di $\mathbb{R}^k$ interamente contenuta in U e poiché $g = \varphi^{-1}$ è continua su $\mathcal{S}$, l'insieme $A := \varphi(B) = g^{-1}(B)$ è un insieme aperto in $\mathcal{S}$ (nella topologia relativa[5]) quindi $x_0 \in A = E \cap \mathcal{S}$ per qualche insieme E aperto di $\mathbb{R}^n$.

(iv) Dati due spazi metrici X ed Y, due sottoinsiemi $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ si dicono **omeomorfi** se esiste una funzione continua $g : A \to B$ con inversa continua su B; la funzione biunivoca e *bicontinua* g si chiama un **omeomorfismo** di A su B. Quindi il punto (iii) può essere riformulato dicendo che: *per ogni punto $x_0 \in \mathcal{S}$ esiste un aperto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $E \cap \mathcal{S}$ è omeomorfo ad una sfera B in $\mathbb{R}^k$.*

(v) Dire che la matrice $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ha rango massimo (e cioè k) equivale a dire che i k vettori $\xi^{(i)} := \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \in \mathbb{R}^n$ sono *linearmente indipendenti* in $\mathbb{R}^n$.

(vi) La parola "regolare", che normalmete sottoindenderemo, si riferisce al fatto che l'elemento di varietà è realizzato tramite una funzione di classe C^1.

(vii) **(Cambiamenti di coordinate)** Siano $\varphi : D = \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ e $\psi : E = \overline{V} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ due inclusioni differenzibili tali che $\varphi(U) = \psi(V) := \mathcal{S}$. Su $\mathcal{S}$ sono definite e continue [punto (ii)] le funzioni inverse φ^{-1} e ψ^{-1}. Sono dunque definite e continue le seguenti funzioni

$$v := \psi^{-1} \circ \varphi : u \in U \to v(u) \in V \ , \qquad u := \varphi^{-1} \circ \psi : v \in V \to u(v) \in U \ . \tag{6.2}$$

Naturalmente $v(u)$ e $u(v)$ sono iniettive e sono l'una l'inversa dell'altra. In effetti, come ci accingiamo a dimostrare, tali funzioni sono dei **diffeomorfismi** (o, più precisamente dei "diffeomorfismi di classe C^1") ovvero sono delle funzioni C^1 invertibili con inversa[6] C^1. Fissiamo $v_0 \in V$ e sia $u_0 := u(v_0)$ (cosicché $v_0 = v(u_0)$). Poiché $\frac{\partial \psi}{\partial v}(v_0)$ ha rango k esistono $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ tali che, ponendo $\hat\psi := (\psi_{i_1}, ..., \psi_{i_k})$, si ha $\det \frac{\partial \hat\psi}{\partial v}(v_0) \neq 0$. Definiamo $F(v,u) := \hat\psi(v) - \hat\varphi(u)$, con $\hat\varphi := (\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_k})$. F è di classe $C^1(\{(v_0,u_0)\}$, $\det \frac{\partial F}{\partial v}(v_0,u_0) = \det \frac{\partial \hat\psi}{\partial v}(v_0) \neq 0$ e $F(v_0,u_0) = 0$. Dunque dal Teorema delle funzioni implicite segue che esiste un'unica funzione continua $\tilde v$ tale che $\tilde v(u_0) = v_0$ e $F(\tilde v(u), u) = 0$ in un intorno di u_0 ed in più tale funzione è di classe $C^1(\{u_0\})$. Poiché anche $v(u)$ soddisfa $v(u_0) - v_0$ e $F(v(u), u) = 0$ (in un intorno di u_0) per l'unicità della funzione implicita segue che $\tilde v(u)$ coincide con $v(u)$ in un intorno di u_0 e questo, in particolare, significa che $v \in C^1(\{u_0\})$. Dal Corollario 4.10 segue che anche lo jacobiano di $v(u)$, $\frac{\partial v}{\partial u}(u_0)$ è invertibile ed ha per inverso lo jacobiano $\frac{\partial u}{\partial v}(v_0)$.

(viii) *Sia $u_0 \in \mathbb{R}^k$ e $\varphi \in C^1(\{u_0\}, \mathbb{R}^n)$ con $n \geq k$. Se rango $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0) = k$ allora esiste una sfera chiusa $D \subseteq \mathbb{R}^k$ di centro u_0 tale che (φ, D) è un'inclusione differenziabile in $\mathbb{R}^n$.*

Infatti dalle ipotesi segue che esiste un intorno u_0 su cui φ è C^1 e su cui $\det \frac{\partial \hat\varphi}{\partial u}(u_0) \neq 0$ con $\hat\varphi := (\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_k})$ (per opportuni indici $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$). Dal Teorema della funzione inversa segue che $u \to \hat\varphi$ è invertibile su di una opportuna sfera chiusa centrata in u_0. Su tale sfera $\hat\varphi$ è iniettiva e quindi lo è anche φ. ∎

[4] D un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Se f è iniettiva, allora la funzione inversa, f^{-1}, appartiene a $C(K, D)$ dove K è l'insieme compatto $f(D)$.

[5] Si ricordi Proposizione 1.13 punto (ii).

[6] Si ricordi il Corollario 4.10.

Diamo ora alcuni esempi di inclusioni (e quindi di elementi di varietà).

(E1) Un insieme $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, connesso e limitato è un elemento di n–varietà in $\mathbb{R}^n$: come inclusione si può prendere l'identità $x = \varphi(u) = u$. Analogamente, se U è un sottoinsieme aperto, connesso e limitato di $\mathbb{R}^k$ e $n > k$, l'insieme $\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n : (x_1, ..., x_k) \in U,\ x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$ è un elemento di k–varietà in $\mathbb{R}^n$ e come inclusione si può prendere la mappa $u \in U \to x = \varphi(u) := (u_1, ..., u_k, 0, ..., 0)$.

(E2) La funzione $t \in [0,1] \to z(t) = x + t(y - x) \in \mathbb{R}^n$ è una inclusione dell'intervallo $[0,1]$ in $\mathbb{R}^n$ che ha come immagine il segmento $P(x,y)$: $z([0,1]) = P(x,y)$.

(E3) (Caso $k = 1$: elementi di curve regolari in $\mathbb{R}^n$) Generalizzando l'esempio precedente, definiamo *elemento di curva regolare in* $\mathbb{R}^n$ un elemento di 1–varietà ovvero un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ dato da $\varphi(I)$ con $I = (a,b)$ intervallo aperto e φ una inclusione del dominio unidimensionale $[a,b]$ in $\mathbb{R}^n$. In questo caso, la matrice jacobiana di φ è semplicemente il vettore[7] $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), ..., \varphi'_n(t))$. Dire che tale matrice jacobiana ha rango massimo (e cioè 1) equivale a dire che il vettore $\varphi'(t)$ non si annulla mai:

$$|\varphi'(t)| := \sqrt{\sum_{i=1}^n |\varphi'_i(t)|^2} \neq 0 \ , \quad \forall\, t \in [a,b] \ . \tag{6.3}$$

L'iniettività di φ su $\bar{I}$ implica che l'elemento di curva $\varphi(I)$ non si autointerseca mai e che $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Un esempio è dato da "un elemento di circonferenza" cioè dall'elemento di curva regolare $\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $t \in [a,b]$ e $0 < b - a < 2\pi$: φ è iniettiva su $[a,b]$ e $|\varphi'| = |(-\operatorname{sen} t, \cos t)| = 1$. Quindi l'elemento di circonferenza $\varphi((a,b))$ è un elemento di curva regolare sulla circonferenza unitaria

$$S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1\} \ . \tag{6.4}$$

(E4) (Il caso $k = 2$, $n = 3$: elementi di superficie in $\mathbb{R}^3$) Un elemento di 2–varietà in $\mathbb{R}^3$ (o anche in $\mathbb{R}^n$) prende il nome di *elemento di superficie*. Se $D = \overline{U}$ è un dominio in $\mathbb{R}^2$ e $\varphi : (u_1, u_2) \in D \to (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{R}^3$ è una inclusione di D, dire che la matrice jacobiana $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ha rango massimo equivale a dire che i due vettori $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$ sono indipendenti e cioè[8]

$$\Big| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \Big| \neq 0 \ , \quad \forall\ u \in \overline{U} \ . \tag{6.5}$$

Un esempio è dato da una "porzione ellissoidale" realizzata dall'inclusione

$$\varphi(u_1, u_2) = (r_1 \cos u_1 \operatorname{sen} u_2, r_2 \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2, r_3 \cos u_2)$$

con $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $0 < b_1 - a_1 < 2\pi$ e $0 < a_2 < b_2 < \pi$. Allora $\mathcal{S} = \varphi(U)$, $(U := \mathring{D})$, è un elemento di varietà bidimensionale in $\mathbb{R}^3$ che descrive una *calotta ellissoidale* ritagliata sull'ellissoide

$$\mathcal{E} := \Big\{ x \in \mathbb{R}^3 : \Big(\frac{x_1}{r_1}\Big)^2 + \Big(\frac{x_2}{r_2}\Big)^2 + \Big(\frac{x_3}{r_3}\Big)^2 = 1 \Big\} \ . \tag{6.6}$$

Per $r_1 = r_2 = r_3$ si ha naturalmente un elemento della sfera tridimensionale di raggio $r := r_1$.

[7] Di solito, nel caso unidimensionale, denotiamo con I l'aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}$ (e cioè l'intervallo) che sopra abbiamo chiamato U e indichiamo con t il punto generico di I (che sopra abbiamo denotato u).

[8] Per informazioni sul prodotto vettoriale "$\times$" in $\mathbb{R}^3$ si veda **6.10**.

(E5) **(Grafici in $\mathbb{R}^n$)** Sia $D = \overline{U}$ un dominio in $\mathbb{R}^k$, sia $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ e sia $n := k + 1$. Il grafico

$$G_f := \{x \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{k+1} : x_n = f(x_1, ..., x_k) \ , \forall \ (x_1, ..., x_k) \in U\} \tag{6.7}$$

è un elemento di $k = n - 1$ varietà in $\mathbb{R}^n$ realizzato dalla inclusione $\varphi(u) := (u, f(u))$ con $u \in U$. Infatti, la φ è chiaramente iniettiva su D e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f_{u_1} & f_{u_2} & \dots & f_{u_k} \end{pmatrix}\right\} k+1 \tag{6.8}$$

e quindi $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ha rango uguale a $k = n - 1$ (per ogni $u \in D$).

(E6) (i) Sia $\phi \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Per la Proposizione 1.13 l'insieme $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) < 0\}$ è un insieme aperto; quindi se A è connesso e limitato allora (esempio **(E1)**) è un elemento di n–varietà in $\mathbb{R}^n$.

(ii) Sia $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e sia $E := \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}$ e supponiamo che per un $\bar{x} \in E$ si abbia $\nabla\phi(\bar{x}) \neq 0$ ovvero, per un qualche j, $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\bar{x}) \neq 0$. Allora, per il Teorema delle funzioni implicite (Teorema 4.3) esiste un rettangolo in $\mathbb{R}^n$,

$$K_{r,\rho} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - \bar{x}_i| \leq r \text{ per } i \neq j \text{ e } |x_j - \bar{x}_j| \leq \rho\}$$

ed una funzione[9] $g(x_1, ..., \hat{x}_j, ..., x_n)$ di classe $C^1(\hat{K}_r, [\bar{x}_j - \rho, \bar{x}_j + \rho])$, dove $\hat{K}_r$ è il cubo in $\mathbb{R}^{n-1}$ di centro $(\bar{x}_1, ..., \hat{\bar{x}}_j, ..., \bar{x}_n)$ e lato $2r$, tale che $E \cap K_{r,\rho}$ coincide con il grafico di g ovvero con $\{x \in \mathbb{R}^n : x_j = g(x_1, ..., \hat{x}_j, ..., x_n), \ \forall \ (x_1, ..., \hat{x}_j, ..., x_n) \in \hat{K}_r\}$. Ma questo, per **(E5)**, significa che l'insieme $\mathcal{S} := \{\phi(x) = 0\} \cap \overset{\circ}{K}_{r,\rho}$ è un elemento di $(n-1)$–varietà. Il dominio dell'inclusione è $\hat{K}_r \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ e l'inclusione sarà data da $u \in \hat{K}_r \to \varphi(u) := (u_1, ..., u_{j-1}, g(u), u_j, ..., u_{n-1}) \in K_{r,\rho}$ (avendo posto $x_i = u_i$ per $i \leq j - 1$ e $u_i = x_{i+1}$ per $i \geq j$).

(E7) L'esempio precedente (punto (ii)) si generalizza come segue. Supponiamo che siano date $(n - k)$ funzioni $\phi_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e consideriamo l'insieme $E := \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_1(x) = \cdots = \phi_{n-k}(x) = 0\}$. Assumiamo che per un qualche punto $\bar{x} \in E$, gli $(n - k)$ vettori $\nabla\phi_1(\bar{x})$,...,$\nabla\phi_{n-k}(\bar{x})$ siano linearmente indipendenti (in $\mathbb{R}^n$). Allora esiste un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $A \cap E$ è un elemento di k–varietà in[10] $\mathbb{R}^n$.

Concludiamo questo paragrafo introducendo le nozioni di varietà e varietà *regolare a tratti*:

Definizione 6.4 *(i) Un insieme connesso $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ prende il nome di "varietà k–dimensionale" se per ogni $x_0 \in \mathcal{S}$ esiste un aperto A di $\mathbb{R}^n$ che contiene x_0 e tale che $A \cap \mathcal{S}$ è un elemento di k–varietà.*

(ii) Un insieme connesso $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ prende il nome di "varietà k–dimensionale regolare a tratti" se $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^N \varphi^{(i)}(E^{(i)})$ dove $(\varphi^{(i)}, E^{(i)})$ godono, per ogni $1 \leq i \leq N$, delle seguenti proprietà: (a) gli $E^{(i)}$ sono insiemi di $\mathbb{R}^k$ con frontiera di misura nulla; (b) $\varphi^{(i)} \in$

[9] Il simbolo "$\hat{\ }$" in questo contesto significa che la quantità che vi sta sotto va omessa: $(x_1, ..., \hat{x}_j, ..., x_n)$ coincide con $(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n)$ se $1 < j < n$, con $(x_2, ..., x_n)$ se $j = 1$ e con $(x_1, ..., x_{n-1})$ se $j = n$.

[10] L'ipotesi che i vettori $\nabla\phi_1$,..., $\nabla\phi_{n-k}$ siano indipendenti è equivalente a dire che la matrice $(n - k) \times n$, $\frac{\partial(\phi_1, ..., \phi_{n-k})}{\partial x}$ ha rango massimo e cioè uguale a $n - k$. Si assuma, per fissare le idee, che il minore $\frac{\partial(\phi_1, ..., \phi_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, ..., x_n)}$ abbia determinante diverso da 0 in $\bar{x}$. Si definisca $F : (u, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to F(u, y) = (\phi_1(u, y), ..., \phi_{n-k}(u, y)) \in \mathbb{R}^{n-k}$ e si noti che $\det \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{u}, \bar{y}) \neq 0$, dove $(\bar{u}, \bar{y}) = \bar{x}$. Si applichi ora il Teorema delle funzioni implicite.

$C^1(\overset{\circ}{E^{(i)}}, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{E^{(i)}}, \mathbb{R}^n)$ *e per ogni* k*–dominio* $D^{(i)} \subseteq \overset{\circ}{E^{(i)}}$ *la coppia* $(\varphi^{(i)}, D^{(i)})$ *è un'inclusione differenziabile in* $\mathbb{R}^n$*; (c)* $\varphi^{(i)}(\overset{\circ}{E^{(i)}}) \cap \varphi^{(j)}(\overset{\circ}{E^{(j)}}) = \emptyset$ *per ogni* $i \neq j$*.*

(iii) Una coppia (φ, E) *con* φ *ed* E *che soddisfino le proprietà (a) e (b) del punto precedente*[11] *prende il nome di* **pseudo–inclusione** *o più precisamente di "pseudo–inclusione differenziabile,* k*–dimensionale in* $\mathbb{R}^n$*".*

Osservazione 6.5 (i) Di particolare importanza sono le **varietà compatte**[12]: ad esempio le "superfici sferiche"

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \ , \tag{6.9}$$

sono delle varietà compatte di dimensione $n-1$.

(ii) Un esempio tipico di varietà regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$ è dato dalla frontiera del cubo $[0,1]^n$ che è una "$(n-1)$–varietà chiusa con singolarità" nei vertici del cubo $[0,1]^n$.

(iii) Una curva regolare a tratti è l'immagine $\varphi(I)$ con I intervallo limitato di $\mathbb{R}$ e con φ continua ed iniettiva su $\overline{I}$ ad eccezione di un numero finito di punti e C^1 a tratti; se $\varphi(a) = \varphi(b)$ la curva (regolare a tratti) si dirà **chiusa**.

(iv) Secondo la Definizione 6.4 *una varietà compatta può essere vista come una varietà regolare a tratti*: ad esempio, la circonferenza $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = \cdots = x_n = 0\}$ è una 1–varietà regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$ poiché $\Gamma = \varphi(E)$ con $E := [0, 2\pi]$ e $\varphi := (\cos t, \operatorname{sen} t, 0, ..., 0)$.

2 Misure e integrali

Sia (φ, E) una pseudo–inclusione differenziabile k–dimensionale in $\mathbb{R}^n$. Vogliamo definire la "misura k–dimensionale" dell'insieme $\mathcal{S} := \varphi(E)$; la nozione di misura che introdurremo può esser visto come "la proiezione ortogonale della misura euclidea n dimensionale sull'oggetto geometrico k–dimensionale rappresentato da $\mathcal{S}$".

Dalla definizione di inclusione segue che almeno uno dei minori $\dfrac{\partial(\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, ..., u_k)}(u)$ (dove $(i_1, ..., i_k)$ per $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ è una qualche scelta di indici) ha determinante diverso da zero; in particolare *la somma su tutte le possibili scelte dei minori di rango k dei quadrati dei determinanti di tali minori*, ovvero il numero

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \Big| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, ..., u_k)} \Big|^2 \ , \tag{6.10}$$

è *diversa da zero su* $U := \overset{\circ}{E}$. Definiamo la **misura k–dimensionale di $\mathcal{S}$** il numero

$$\sigma_k(\mathcal{S}) := \int_U \Big(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \Big| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, ..., u_k)} \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \ du \ , \tag{6.11}$$

e se $f \in C(\overline{\mathcal{S}}, \mathbb{R})$ definiamo **l'integrale di f su $\mathcal{S}$** come

$$\int_{\mathcal{S}} f d\sigma_k := \int_U f \circ \varphi(u) \ \Big(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \Big| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, ..., u_k)} \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \ du \ . \tag{6.12}$$

Per verificare che tali definizioni sono ben poste osserviamo quanto segue. Innanzitutto, poichè ∂E è un insieme di misura nulla, si ha che gli integrali su U possono essere sostituiti da

[11] Con $E^{(i)} = E$ e $\varphi^{(i)} = \varphi$.

[12] A volte le varietà compatte vengono chiamate "varietà chiuse".

integrali su E senza che il loro valore cambi. Dimostriamo ora che gli integrali in (6.11) e (6.12) *non dipendono dalla particolare inclusione che "realizza" $\mathcal{S}$*: sia (ψ, E') un'altra pseudo–inclusione tale che, se $V := \overset{\circ}{E'}$, $\psi(V) = \varphi(U)$. Per il punto (vii) dell'Osservazione 6.3 la funzione $v(u) := \psi^{-1} \circ \varphi(u)$ è una funzione di classe $C^1(U, V)$ ed è tale che $\psi(v(u)) = \varphi(u)$, per ogni $u \in U$. Dunque, per ogni scelta di indici $i_1 < \cdots < i_k$ si ha $\Big(\psi_{i_1}(v(u)), ..., \psi_{i_k}(v(u))\Big)$ $= \Big(\varphi_{i_1}(u), ..., \varphi_{i_k}(u)\Big)$ e prendendo lo jacobiano di tale relazione si ottiene

$$\frac{\partial(\psi_{i_1}, ..., \psi_{i_k})}{\partial(v_1, ..., v_k)}\Big(v(u)\Big)\ \frac{\partial v}{\partial u}(u) = \frac{\partial(\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, ..., u_k)}\ ,$$

e quindi

$$\det \frac{\partial(\psi_{i_1}, ..., \psi_{i_k})}{\partial(v_1, ..., v_k)} \cdot \det \frac{\partial v}{\partial u}(u) = \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, ..., u_k)}\ . \tag{6.13}$$

Dunque, tramite il cambio di variabile $v = v(u)$, dal Teorema 4.13, dal fatto che $\psi(v(u)) = \varphi(u)$ e da (6.13) segue che

$$\begin{aligned}
&\int_V f \circ \psi(v) \Big(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \Big| \det \frac{\partial(\psi_{i_1}, ..., \psi_{i_k})}{\partial(v_1, ..., v_k)} \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}\ dv \\
= \ &\int_U f \circ \varphi(u) \Big(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \Big| \det \frac{\partial(\psi_{i_1}, ..., \psi_{i_k})}{\partial(v_1, ..., v_k)} \Big(v(u)\Big) \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big| \det \frac{\partial v}{\partial u} \Big|\ du \\
= \ &\int_U f \circ \varphi(u) \Big(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \Big| \det \frac{\partial(\psi_{i_1}, ..., \psi_{i_k})}{\partial(v_1, ..., v_k)} \Big(v(u)\Big) \cdot \det \frac{\partial v}{\partial u} \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}\ du \\
= \ &\int_U f \circ \varphi(u) \Big(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \Big| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, ..., u_k)} \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}\ du\ . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Queste definizioni si estendono immediatamente a varietà regolari a tratti:
se $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^N \varphi^{(i)}(E^{(i)}) \subseteq \mathbb{R}^n$ è una varietà k dimensionale regolare a tratti (con $\varphi^{(i)}$ e $E^{(i)}$ come nella Definizione 6.4) e se $f \in C(\overline{S}, \mathbb{R})$ poniamo[13]

$$\sigma_k(\mathcal{S}) := \sum_{i=1}^N \sigma_k(\mathcal{S}^{(i)})\ , \qquad \int_{\mathcal{S}} f d\sigma_k := \sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{S}^{(i)}} f d\sigma_k\ , \qquad \Big(\mathcal{S}^{(i)} := \varphi(\overset{\circ}{E^{(i)}})\Big)\ . \tag{6.14}$$

Esempio 6.6 Applichiamo le definizioni date al calcolo dell'area superficiale di una sfera di raggio r in $\mathbb{R}^3$. La sfera $S_r^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ coincide con $\varphi(E)$ se

$$E = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \quad \text{e} \quad \varphi(u_1, u_2) := r(\cos u_1 \operatorname{sen} u_2,\ \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2, \cos u_2)\ .$$

[13] Si noti che la rappresentazione di una varietà regolare a tratti come "unione di parti regolari" $\varphi^{(i)}(E^{(i)})$ non è ovviamente unica e d'altra parte è altrettanto ovvio che le definizioni in (6.14) *non dipendono dalla particolare rappresentazione di $\mathcal{S}$*.

Dunque

$$
\begin{aligned}
\sigma_2(S_r^2) &:= \int_E \Big(\sum_{1\le i<j\le 2} \Big| \det \frac{\partial(\varphi_i,\varphi_j)}{\partial u} \Big|^2 \Big)^{\frac12} du \\
&:= \int_E \Big(\Big| \det \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial u} \Big|^2 + \Big| \det \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_3)}{\partial u} \Big|^2 + \Big| \det \frac{\partial(\varphi_2,\varphi_3)}{\partial u} \Big|^2 \Big)^{\frac12} du \\
&= r^2 \int_E \Big((\operatorname{sen} u_2 \cos u_2)^2 + (\operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen}^2 u_2)^2 + (\cos u_1 \operatorname{sen}^2 u_2)^2 \Big)^{\frac12} du \\
&= r^2 \int_E \operatorname{sen} u_2 du = 4\pi r^2 \ .
\end{aligned}
$$

Discutiamo ora alcuni casi speciali cominciando dal caso $k = 1$: se I è un intervallo di estremi $a < b$ e $\Gamma := \varphi(I)$ è un elemento di curva regolare (o una curva regolare a tratti ed eventualmente chiusa) la quantità in (6.10) *coincide con la norma euclidea del vettore* $\varphi'(t)$ (come al solito $t = u$) e dunque *la lunghezza della curva* Γ *è data da*

$$
\sigma_1(\Gamma) := L(\Gamma) := \int_a^b |\varphi'(t)| dt \ , \tag{6.15}
$$

mentre l'integrale di una funzione $f \in C(\overline{\Gamma}, \mathbb{R})$ su Γ, che prende il nome di **integrale curvilineo**, è dato da

$$
\int_\Gamma f d\sigma_1 := \int_a^b f \circ \varphi(t) |\varphi'(t)| dt \ ; \tag{6.16}
$$

a volte (nel caso $k = 1$) al simbolo $d\sigma_1$ si preferiscono i simboli ds o $d\ell$.

Il caso $k = 2$ e $n = 3$ concerne l'integrazione su superfici in $\mathbb{R}^3$. La quantità in (6.10) *coincide con il quadrato della norma euclidea del vettore* $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}$ e dunque l'area della superficie $\mathcal{S}$ è data da

$$
\sigma_2(\mathcal{S}) := \text{Area}\,(\mathcal{S}) := \int_U \Big| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \Big| du \ ; \tag{6.17}
$$

mentre l'integrale di una funzione $f \in C(\overline{\mathcal{S}}, \mathbb{R})$ su $\mathcal{S}$, che prende il nome di **integrale superficiale**, è dato da

$$
\int_{\mathcal{S}} f d\sigma_2 := \int_U f \circ \varphi \, \Big| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \Big| du \ . \tag{6.18}
$$

Osservazione 6.7 (i) Considerando un'"approssimazione di Riemann" dell'integrale come in (6.15), relativa alla partizione $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_N = b$, si ha che[14] *la lunghezza della poligonale di estremi (in ordine)* $\varphi(a)$, $\varphi(t_1)$,...,$\varphi(b)$ *tende a* $L(\Gamma)$, *quando l'ampiezza della partizione* $\delta := \sup(t_{i+1} - t_i)$ *tende a zero*, giustificando, in tal modo, il nome "lunghezza" dato a $L(\Gamma)$.

(ii) La quantità $\Big| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \Big|$ rappresenta geometricamente l'area del parallelogramma generato dai vettori $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}$ e quest'interpretazione farebbe pensare alla possibilità di giustificare (tramite opportune approssimazioni di Riemann) la definizione di area in modo analogo a quanto fatto nel punto (i) per la lunghezza. Invece ciò non è possibile: in generale, un elemento di superficie regolare può essere "approssimato" con (ad esempio) triangolini con i vertici sulla

[14] Si noti che $L(P(\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1}))) = |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| = |\varphi'(\tilde t_i)|(t_{i+1} - t_i)$. Quindi, essendo $|\varphi'|$ continua su $[a,b]$, dalla teoria dell'integrazione di Riemann segue che, se $\delta = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$, allora $\lim_{\delta\to 0} L(P(\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1}))) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$.

superficie in modo tale che la somma delle aree dei triangolini tende ad infinito quando la lunghezza del massimo lato di tali triangolini viene mandata a zero[15].

(iii) La quantità $\Big(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\Big|\det\frac{\partial(\varphi_{i_1},...,\varphi_{i_k})}{\partial(u_1,...,u_k)}\Big|^2\Big)^{\frac12}$ che appare nella definizione di misura k–dimensionale non è altro che la misura euclidea k–dimensionale del parallelepipedo generato dai vettori tangenti (che formano una base dello spazio tangente) $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},...,\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}$. Per maggiori informazioni si veda **6.1**.

3 Teorema della divergenza

In questo paragrafo studieremo un'importante generalizzazione del Teorema fondamentale del calcolo che va sotto il nome di "Teorema della divergenza".

La sfera unitaria chiusa $\overline{B^n}:=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\le 1\}$ *non* è una varietà n dimensionale ma è l'unione d'un aperto (cioè la sfera $B^n:=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$) e d'una varietà compatta di dimensione $n-1$ (cioè S^{n-1}) che coincide con la sua frontiera insiemistica. L'ovvia importanza di tali insiemi aperti giustifica la seguente definizione

Definizione 6.8 *Per $n\ge 2$, un insieme $A\subseteq\mathbb{R}^n$ aperto, limitato e connesso si dice* **regolare** *se esiste una funzione $\phi\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ tale che $A=\{x\in\mathbb{R}^n:\phi(x)<0\}$, $\partial A=\{x:\phi(x)=0\}$ e $\nabla\phi(x)\ne 0$ per ogni $x\in\partial A$.*

Dunque la sfera aperta B^n è un insieme regolare: $B^n=\{x\in\mathbb{R}^n:\phi(x)<0\}$ con $\phi(x)=|x|^2-1$.

Dall'esempio (E6) di § 1 e dalla Definizione 6.4 segue che *la frontiera di un insieme regolare è una $(n-1)$–varietà compatta in $\mathbb{R}^n$*. Infatti la frontiera di A divide $\mathbb{R}^n$ in due insiemi connessi di cui uno, $\{x:\phi(x)<0\}=A$, è limitato e l'altro, $\{x:\phi(x)>0\}=(\overline{A})^c$ è illimitato: in questa situazione l'insieme aperto $\overline{A}^c$ prende il nome di **esterno di** A.

In ogni punto x della frontiera di un insieme regolare $A=\{x':\phi(x')<0\}$ definiamo la **normale esterna**[16]

$$\nu:=\nu(x):=\frac{\nabla\phi(x)}{\big|\nabla\phi(x)\big|}\ . \tag{6.19}$$

Infine se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e se $F\in C^1(A,\mathbb{R}^n)$ definiamo la **divergenza di** F la funzione continua da A in $\mathbb{R}$ data da

$$\operatorname{div}F:=\sum_{i=1}^n\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\ ; \tag{6.20}$$

la divergenza di F viene anche denotata con $\nabla\cdot F$.

[15] Si veda **6.18**.

[16] Si noti che tale vettore (che è ben definito poiché $\nabla\phi\ne 0$ su ∂A) ha norma unitaria. La parola "esterna" è dovuta al fatto che "ν punta verso l'esterno" ovvero "esiste $\varepsilon>0$ tale che $\{x+\nu t\ \forall\ 0<t<\varepsilon\}\subseteq\overline{A}^c$". Infatti: dalla formula di Taylor, se $x\in\partial A$ (ovvero se x tale che $\phi(x)=0$) e se $t>0$ è piccolo, $\phi(x+\nu t)=\nabla\phi(x)\cdot\nu t+o(t)=|\nabla\phi(x)|t+o(t)=t\Big(|\nabla\phi(x)|+\frac{o(t)}{t}\Big)$ che è strettamente positivo se t è sufficientemente piccolo. La parola "normale" si riferisce al fatto che ν è normale (o "ortogonale") ad un qualunque vettore "tangente a ∂A in x" [un vettore $\xi\in\mathbb{R}^n$ si dice **tangente** all'elemento di varietà $\mathcal{S}$ in $x\in\mathcal{S}$ se $\xi=z'(0)$ per una qualche applicazione $z\in C^1((-\delta,\delta),\mathbb{R}^n)$ tale che $z(t)\in\mathcal{S}$ per ogni $|t|<\delta$ e $z(0)=x$; per maggiori informazioni si veda **6.29**]. Infatti se $\xi=z'(0)$ è un vettore tangente a ∂A in x si ha, per definizione, che $z(t)\in\partial A$ per $|t|\le\delta$ (per un qualche $\delta>0$), ovvero $\phi(z(t))=0$ per $|t|\le\delta$; derivando tale relazione in $t=0$ si ottiene $0=\nabla\phi(z(0))\cdot z'(0)=\nabla\phi(x)\cdot\xi$ e quindi $\xi\cdot\nu=0$.

Teorema 6.9 (Teorema della divergenza) *Sia* $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) < 0\}$ *un insieme regolare in* $\mathbb{R}^n$ *(Definizione 6.8) e sia* $F \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$*. Allora*

$$\int_A \nabla \cdot F \; dx = \int_{\partial A} F \cdot \nu \; d\sigma_{n-1} \ . \tag{6.21}$$

Osservazione 6.10 (i) La quantità $F \cdot \nu$ in (6.21) prende il nome di **flusso esterno** del campo vettoriale[17] F e dunque il Teorema della divergenza può essere formulato dicendo che "*l'integrale della divergenza di un campo regolare su di un insieme regolare A coincide con l'integrale del flusso esterno sulla frontiera di A*".

(ii) Se $F \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ e se interpretassimo la quantità $F(b) - F(a)$ come il "flusso totale esterno di F dall'insieme $[a, b]$" vedremmo che (nel caso $n = 1$) l'enunciato del Teorema della divergenza dato al punto (i) coincide sostanzialmente con il Teorema fondamentale del calcolo (definendo , se si vuole, gli insiemi regolari in $\mathbb{R}$ come gli intervalli aperti e limitati). In effetti vedremo che la dimostrazione del Teorema della divergenza è *conseguenza* del Teorema fondamentale del calcolo in una variabile.

(iii) Il Teorema della divergenza è equivalente alla seguente affermazione:
Sia $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) < 0\}$ *un insieme regolare in* $\mathbb{R}^n$*. Allora*

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \; dx = \int_{\partial A} f \nu_i \; d\sigma_{n-1} \ , \qquad \Big(\forall \ f \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}) \ , \ \forall \ 1 \le i \le n\Big) \ . \tag{6.22}$$

Infatti se vale tale affermazione il Teorema della divergenza verrà ottenuto applicando la (6.22) alle componenti F_i e sommando su i, mentre dal Teorema della divergenza segue immediatamente la (6.22) ponendo $F_j = 0$ se $j \ne i$ e $F_i := f$.

Nel corso della dimostrazione faremo uso del seguente notevole risultato

Lemma 6.11 (Partizione dell'unità) *Sia D un compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\{V_i\}_{i \in J}$ un ricoprimento aperto*[18] *di D. Allora esistono N funzioni $f_1,\dots,f_N$ di classe*[19] $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*, che godono delle seguenti proprietà:*

$$\begin{aligned}
&1) \qquad \forall \ 1 \le j \le N \ , \quad \exists \ i \in J : \ \ \mathrm{supp}\,(f_j) \subseteq V_i \ ; \\
&2) \qquad 0 \le f_j(x) \le 1 \ , \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \ , \ 1 \le j \le N \ ; \\
&3) \qquad \sum_{j=1}^N f_j(x) = 1 \ , \quad \forall \ x \in D \ ; \qquad \sum_{j=1}^N f_j(x) \le 1 \ , \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \ .
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Una famiglia $\{f_j\}_{j=1,\dots,N}$ che goda delle 3 proprietà sopra elencate si chiama una **partizione dell'unità su D subordinata al ricoprimento $\{V_i\}$.**

Dimostrazione Per ogni $x \in D$ scegliamo un indice $i := i(x)$ in J tale che $x \in V_{i(x)}$. Essendo gli insiemi V_i aperti, è possibile scegliere, per ogni $x \in D$, un numero positivo $r := r(x)$ tale che, se $K_r(x)$ denota il cubo aperto di centro x e lato $2r$ (cioè l'insieme $\{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < r \ , \ \forall \ 1 \le i \le n\}$),

$$\overline{K_{r(x)}}(x) \subseteq K_{R(x)}(x) \subseteq \overline{K_{R(x)}}(x) \subseteq V_{i(x)} \ , \quad \text{dove} \quad R(x) := 2r(x) \ . \tag{6.24}$$

[17] Un "campo vettoriale su $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non è altro che una funzione F da A in $\mathbb{R}^n$ (ovvero una funzione che ad un vettore $x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ associa un altro vettore, $F(x)$ di $\mathbb{R}^n$).

[18] Cioè V_i sono insiemi aperti e $\cup_{i \in J} V_i \supseteq D$.

[19] Si ricorda che $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ denota l'insieme delle funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto e che il supporto di f, $\mathrm{supp}\,(f)$, è la chiusura dell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \ne 0\}$.

Gli insiemi $K_{r(x)}(x)$, al variare di $x \in D$ formano un ricoprimento aperto di D. Essendo tale insieme compatto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito, esistono cioè N punti in D, $x^{(1)}, ..., x^{(N)}$, tali che

$$D \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_N \ , \qquad K_j := K_{r(x^{(j)})}(x^{(j)}) \ . \tag{6.25}$$

Inoltre, se denotiamo $K'_j := K_{R(x^{(j)})}(x^{(j)})$, e $i_j := i(x^{(j)})$, da (6.24) segue che

$$\overline{K_j} \subseteq K'_j \subseteq \overline{K'_j} \subseteq V_{i_j} \ . \tag{6.26}$$

Usando le funzioni χ dell'Esempio 5.50, possiamo costruire N funzioni $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$0 \le \psi_j \le 1 \ , \qquad \psi_j := 1 \text{ su } K_j \ , \qquad \operatorname{supp}(\psi_j) = \overline{K'_j} \ . \tag{6.27}$$

Poniamo ora

$$\begin{aligned} &f_1 := \psi_1 \ , \\ &f_2 := (1-\psi_1)\psi_2 \ , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_N := (1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_{N-1})\psi_N \ . \end{aligned} \tag{6.28}$$

Da tale definizione segue immediatamente che $f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e che $\operatorname{supp}(f_j) \subseteq \overline{K}'_j \subseteq V_{i_j}$ e quindi valgono le prime due proprietà, 1) e 2), enunciate nella proposizione. Inoltre da un elementare fatto algebrico segue che[20]

$$\sum_{j=1}^N f_j = 1 - \prod_{j=1}^N (1-\psi_j) \tag{6.29}$$

quindi se $x \in D$, x appartiene a qualche K_j e da (6.29) segue anche la proprietà 3). ∎

Dimostrazione (del Teorema 6.9) In vista dell'Osservazione 6.10 punto (iii), dimostreremo la (6.22) per una $f \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R})$. Fissato $\bar{x} \in E := \partial A$, siano j, g, $K_{r,\rho}$ e $\hat{K}_r$ come al punto (ii) di (E6), § 1. Introduciamo anche le seguenti notazioni: $\tilde{x} := (x_1, ..., \hat{x}_j, ..., x_n)$ cosicché $g : \tilde{x} \in \hat{K}_r \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$; $G(\tilde{x}) := (x_1, ..., g(\tilde{x}), ..., x_n)$ (qui ed in seguito useremo questa notazione sottintendendo che la funzione g sta al posto di x_j), dunque l'insieme $\partial A \cap K_{r,\rho} = \{G(\tilde{x}) : \tilde{x} \in \hat{K}_r\}$. Infine, eventualmente diminuendo il valore di r possiamo assumere che $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) \neq 0$ per ogni $x \in K_{r,\rho}$. Divideremo la dimostrazione in vari passi.

1) *Calcoliamo la normale esterna $\nu(x)$ per $x \in K_{r,\rho} \cap \partial A$ in termini della funzione $g(\tilde{x})$.* Prendendo la derivata parziale rispetto a x_i per $i \neq j$ nella relazione $\phi(x_1, ..., g, ..., x_n) = 0$ (valida in $\hat{K}_r$) si ottiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(G(\tilde{x})) + \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(G(\tilde{x}))\ \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\ \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \left(\tilde{x} \in \hat{K}_r \ , \ i \neq j\right) \ .$$

[20] Per induzione su N: per $N = 1$ la (6.29) è vera. Assumiamo la (6.29) vera per $N-1$ e dimostriamola per N: $\sum_{j=1}^N f_j = \sum_{j=1}^{N-1} f_j + f_N = 1 - \prod_{j=1}^{N-1}(1-\psi_j) + \Big(\prod_{j=1}^{N-1}(1-\psi_j)\Big)\psi_N = 1 - \Big(\prod_{j=1}^{N-1}(1-\psi_j)\Big)(1-\psi_N) = 1 - \prod_{j=1}^{N}(1-\psi_j)$.

Dunque, su $\partial A \cap K_{r,\rho}$, si ha[21]

$$\nu := \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}(G(\tilde{x})) = \text{segno}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\Big)\ \frac{\Big(-\frac{\partial g}{\partial x_1}, ..., 1, ..., -\frac{\partial g}{\partial x_n}\Big)}{\sqrt{1+|g'|^2}}\ , \tag{6.30}$$

dove, naturalmente, l'1 sta al j^{o} posto e $g' := \partial_{\tilde{x}} g$.

2) *Calcoliamo la quantità in* (6.10) *su* $\partial A \cap K_{r,\rho}$ (cosa necessaria per trovare un'espressione "esplicita" di σ_{n-1} su $\partial A \cap K_{r,\rho}$). Qui, come già detto, l'inclusione φ coincide con G e la variabile $(n-1)$–dimensionale u con $\tilde{x} \in \hat{K}_r$. In generale, nel caso $k = n-1$, si ha

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \Big|\det\frac{\partial(\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial u}\Big|^2 = \sum_{i=1}^n \Big|\det\frac{\partial(\varphi_1, ..., \hat{\varphi}_i, ..., \varphi_n)}{\partial u}\Big|^2 . \tag{6.31}$$

Inoltre, nel caso presente (e con le solite convenzioni), la matrice $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ è una matrice $n\times(n-1)$ avente la seguente forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi_1, ..., \varphi_n)}{\partial u} \quad &:= \quad \frac{\partial G}{\partial\tilde{x}} := \frac{\partial(x_1, ..., g, ..., x_n)}{\partial(x_1, ..., \hat{x}_j, ..., x_n)} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_{j-1}} & \frac{\partial g}{\partial x_{j+1}} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} ,\end{aligned} \tag{6.32}$$

(la riga che contiene le derivate di g è la j–esima). Quindi la matrice $\frac{\partial(\varphi_1, ..., \hat{\varphi}_j, ..., \varphi_n)}{\partial\tilde{x}}$ è la matrice identità ed ha determinante uguale ad uno, mentre se $i \neq j$, scambiando la i–ma riga con la j–esima riga si trova

$$\Big|\det\frac{\partial(\varphi_1, ..., \hat{\varphi}_i, ..., \varphi_n)}{\partial\tilde{x}}\Big| = \Big|\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big| , \qquad (i \neq j) .$$

Dunque

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \Big|\det\frac{\partial(\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial u}\Big|^2 \quad &= \quad \sum_{i=1}^n \Big|\det\frac{\partial(\varphi_1, ..., \hat{\varphi}_i, ..., \varphi_n)}{\partial u}\Big|^2 \\ &= \quad 1 + \sum_{i\neq j}\Big|\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|^2 := 1 + |g'|^2 .\end{aligned} \tag{6.33}$$

3) *Supponiamo che* $f \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R})$ *abbia supporto contenuto in* $K_{r,\rho}$, rettangolo "centrato" in $\bar{x} \in \partial A$ [come in 1)] *e dimostriamo che vale* (6.22). Vi sono due casi: o $\frac{\partial\phi}{\partial x_j} > 0$ (su $K_{r,\rho}$)

[21] Se α è un numero reale diverso da zero, $\text{segno}\,(\alpha) = \alpha/|\alpha|$; naturalmente nella formula (6.30) ν e ϕ sono calcolate in $G(\tilde{x}) = (x_1, ..., g(\tilde{x}), ..., x_m)$ e g è calcolata in $\tilde{x} \in \hat{K}_r$: quando non vi sia ambiguità ometteremo di indicare gli argomenti delle varie funzioni.

oppure $\frac{\partial\phi}{\partial x_j} < 0$; i due casi si trattano in maniera simile e per fissare le idee assumeremo $\frac{\partial\phi}{\partial x_j} > 0$. In tal caso $\nu_j > 0$ [vedi (6.30)] il che significa[22] che i punti interni di A si trovano "sotto" il grafico di g o, più precisamente, $A \cap K_{r,\rho} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x}_j - \rho < x_j < g(\tilde{x}),\ \tilde{x} \in \hat{K}_r\}$. Dunque poiché stiamo assumendo che $\operatorname{supp} f \subseteq K_{r,\rho}$, integrando prima rispetto a x_j, troviamo

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}\ dx = \int_{\hat{K}_r} \Big(\int_{\bar{x}_j-\rho}^{g(\tilde{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ dx_j \Big)\ d\tilde{x}\ . \tag{6.34}$$

Se $i = j$, dal Teorema fondamentale del calcolo (in una variabile) e dal fatto che

$$f(x_1, ..., \bar{x}_j - \rho, ..., x_n) = 0$$

per[23] $\tilde{x} \in \hat{K}_r$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\bar{x}_j-\rho}^{g(\tilde{x})} \frac{\partial f}{\partial x_j}\ dx_j &= f(x_1, ..., g(\tilde{x}), ..., x_n) - f(x_1, ..., \bar{x}_j - \rho, ..., x_n) \\ &= f(x_1, ..., g(\tilde{x}), ..., x_n)\ . \end{aligned} \tag{6.35}$$

Poiché (per (6.30) e per le nostre ipotesi) $\nu_j = (1 + |g'|)^{-\frac{1}{2}}$, da (6.33), dalla definizione (6.12), da (6.34) e (6.35) segue che

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}\ dx &= \int_{\hat{K}_r} f(x_1, ..., g(\tilde{x}), ..., x_n)\ d\tilde{x} \\ &= \int_{\hat{K}_r} f(x_1, ..., g(\tilde{x}), ..., x_n) \frac{1}{\sqrt{1+|g'|^2}}\ \sqrt{1+|g'|^2} d\tilde{x} \\ &= \int_{\partial A \cap K_{r,\rho}} f\ \nu_j\ d\sigma_{n-1} = \int_{\partial A} f\ \nu_j\ d\sigma_{n-1}\ . \end{aligned} \tag{6.36}$$

Sia ora $i \neq j$. In tal caso

$$\partial_{x_i} \int_{\bar{x}_j-\rho}^{g(\tilde{x})} f(x) dx_j = f(x_1, ..., g(\tilde{x}), ..., x_n) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x}) + \int_{\bar{x}_j-\rho}^{g(\tilde{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\ dx_j\ . \tag{6.37}$$

D'altra parte, ancora per il Teorema fondamentale del calcolo e per il fatto che $\operatorname{supp} f \subseteq K_{r,\rho}$, se denotiamo con $x_{\pm r}$ un punto $x \in K_{r,\rho}$ con la i–ma componente x_i fissata ed uguale a $\bar{x}_i \pm r$ e con $\tilde{x}_{\pm r}$ un punto $\tilde{x} := (x_1, ..., \hat{x}_j, ..., x_n) \in \hat{K}_r$ con x_i fissato ed uguale a $\bar{x}_i \pm r$, si trova[24]

$$\int_{\bar{x}_i-r}^{\bar{x}_i+r} \partial_{x_i} \Big(\int_{\bar{x}_j-\rho}^{g(\tilde{x})} f(x)\ dx_j \Big) dx_i = \int_{\bar{x}_j-\rho}^{g(\tilde{x}_r)} f(x_r) dx_j - \int_{\bar{x}_j-\rho}^{g(\tilde{x}_{-r})} f(x_{-r}) dx_j = 0\ , \tag{6.38}$$

che, insieme a (6.37), implica

$$\int_{\bar{x}_i-r}^{\bar{x}_i+r} \Big(\int_{\bar{x}_j-\rho}^{g(\tilde{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\ dx_j \Big) dx_i = -\int_{\bar{x}_i-r}^{\bar{x}_i+r} f(x_1, ..., g(\tilde{x}), ..., x_n) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x}) dx_i\ . \tag{6.39}$$

---

[22] Si ricordi la discussione nella nota 16.

[23] Si noti che punti della forma $(x_1, ..., \bar{x}_j - \rho, ..., x_n)$ con $\tilde{x} \in \hat{K}_r$ appartengono alla frontiera di $K_{r,\rho}$ e dunque, poiché $\operatorname{supp} f \subseteq K_{r,\rho}$, $f(x_1, ..., \bar{x}_j - \rho, ..., x_n) = 0$.

[24] Si noti che la variabile x_i appare nell'argomento di g e di f; inoltre i punti $x_{\pm r}$ appartengono alla frontiera di $K_{r,\rho}$ e dunque la funzione f vi si annulla.

Integrando su A prima rispetto a x_j, poi rispetto a x_i e poi rispetto alle altre componenti, da (6.39) segue, per $i \neq j$, che[25]

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx &= \int_{A\cap K_{r,\rho}} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\hat K_r} f(x_1,...,g(\tilde x),...,x_n)\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde x) d\tilde x \\
&= \int_{\hat K_r} f(x_1,...,g,...,x_n)\, \frac{\Big(-\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big)}{\sqrt{1+|g'|^2}}\, \sqrt{1+|g'|^2}\, d\tilde x \\
&= \int_{\hat K_r} f(x_1,...,g,...,x_n)\, \nu_i\, \sqrt{1+|g'|^2}\, d\tilde x \\
&= \int_{\partial A\cap K_{r,\rho}} f\, \nu_i\, d\sigma_{n-1} = \int_{\partial A} f\, \nu_i\, d\sigma_{n-1}\ .
\end{aligned}$$

Dunque (6.22) vale quando il supporto di f è contenuto in un rettangolo (con le proprietà sopra elencate) centrato su un punto della frontiera di A.

4) *Sia ora K un cubo aperto la cui chiusura è contenuta in A e dimostriamo* (6.22) *per funzioni $f \in C^1(\overline{A},\mathbb{R})$ che abbiano supporto contenuto in K*. In questo caso f è nulla sul bordo di A e quindi il secondo membro di (6.22) è nullo. Quanto al membro di sinistra, se $\bar x$ è il centro del cubo K e $2r$ il suo lato, e se, per i fissato, denotiamo con $\hat K$ il cubo $\{(x_1,...,\hat x_i,...,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1} : |x_h - \bar x_h| < r, \text{ per } h\neq i\}$ si ha

$$\begin{aligned}
&\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx \\
&\quad = \int_K \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = \int_{\hat K}\Big(\int_{\bar x_i - r}^{\bar x_i + r} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\Big) dx_1\cdots \widehat{dx_i}\cdots dx_n \\
&\quad = \int_{\hat K}\Big(f(x_1,...,\bar x_i + r,...,x_n) - f(x_1,...,\bar x_i - r,...x_n)\Big) dx_1\cdots \widehat{dx_i}\cdots dx_n \\
&\quad = 0\ .
\end{aligned}$$

5) *Completiamo ora la dimostrazione di* (6.22) *per funzioni arbitrarie $f \in C^1(\overline{A},\mathbb{R})$*. Se $x \in A$ sia $K(x)$ un cubo chiuso (non degenere) centrato in x e contenuto in A (tali cubi esistono perché A è aperto); se $x \in \partial A$ sia $K(x)$ un rettangolo che goda delle proprietà elencate all'inizio della dimostrazione [prima del punto 1)]. L'unione di $\mathring{K}(x)$ forma un ricoprimento del compatto $\overline{A}$ e per il Lemma 6.11 esiste una partizione dell'unità $\{f_j : 1 \le j \le N\}$ subordinata al ricoprimento $\{\mathring{K}(x) : x \in \overline{A}\}$. Per ogni j, il prodotto $f_j f$ è una funzione di classe $C^1(\overline{A})$ e con supporto contenuto o in un rettangolo $K(x)$ con $x \in \partial A$ o in un cubo $K(x)$ contenuto in A. Dunque per i punti 3) e 4) si ha, per ogni $1 \le j \le N$, che

$$\int_A \frac{\partial (f_j\ f)}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial A} (f_j\ f)\ \nu_i\ d\sigma_{n-1}\ ,$$

[25] Come già osservato, su $A\cap K_{r,\rho}$ la variabile x_j varia tra $\bar x_j - \rho$ e $g(\tilde x)$, mentre le variabili x_i, per $i \neq j$, variano tra $\bar x_i - r$ e $\bar x_i + r$; si ricordino anche le osservazioni che precedono (6.36).

e dunque (ricordando che $\sum_{j=1}^N f_j(x) = 1$ per ogni $x \in \overline{A}$) troviamo

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx &= \int_A \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(f \sum_{j=1}^N f_j\Big) dx = \sum_{j=1}^N \int_A \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(f\ f_j\Big) dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\partial A} f_j\ f\ \nu_i\ d\sigma_{n-1} = \int_{\partial A} \Big(\sum_{j=1}^N f_j\Big)\ f\ \nu_i\ d\sigma_{n-1} \\ &= \int_{\partial A} f\ \nu_i\ d\sigma_{n-1}\ . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Come applicazione del Teorema della divergenza discutiamo brevemente **l'integrazione in coordinate polari in** $\mathbb{R}^n$. Useremo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} &D^n_{r,R} := \{x \in \mathbb{R}^n :\ r \le |x| \le R\}\ , \qquad B^n_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}\ , \\ &S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}\ , \end{aligned} \tag{6.40}$$

dove $0 \le r < R$ e, come al solito, $|\cdot|$ denota la norma euclidea. *Supponiamo ora che* f *sia una funzione integrabile su* $D^n_{r,R}$*, allora la funzione* $(\rho, y) \in [r, R] \times S^{n-1} \to f(\rho y)$ *è integrabile su* $[r, R] \times S^{n-1}$ *e si ha*

$$\int_{D^n_{r,R}} f(x)\ dx = \int_r^R \rho^{n-1} \Big(\int_{S^{n-1}} f(\rho y)\ d\sigma_{n-1} \Big)\ d\rho\ . \tag{6.41}$$

Dimostrazione (di (6.41) nel caso in cui $f \in C^1(D^n_{r,R})$) Per ogni $\rho > 0$, facendo il cambio di variabile $x = \rho y$, si ha che

$$\int_{B^n_\rho} f(x)\ dx = \rho^n \int_{B^n_1} f(\rho y)\ dy\ , \tag{6.42}$$

e derivando rispetto a ρ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \Big(\int_{B^n_\rho} f(x)\ dx \Big) &= n\rho^{n-1} \int_{B^n_1} f(\rho y)\ dy\ +\ \rho^n \int_{B^n_1} (\nabla f)(\rho y) \cdot y\ dy \\ &= \rho^{n-1} \int_{B^n_1} \Big(n\ f(\rho y)\ dy\ + \rho\ y \cdot (\nabla f)(\rho y) \Big) dy\ , \end{aligned} \tag{6.43}$$

e la quantità nell'ultimo integrale non è altro che la divergenza della funzione vettoriale $y \to y f(\rho y)$. Dunque da (6.43) e dal Teorema della divergenza segue che[26]

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \Big(\int_{B^n_\rho} f(x)\ dx \Big) = \rho^{n-1} \int_{B^n_1} \nabla \cdot \Big(y\ f(\rho y) \Big)\ dy = \rho^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(\rho y)\ d\sigma_{n-1}\ , \tag{6.44}$$

ed integrando tale relazione tra r e R si ottiene[27] (6.41). $\blacksquare$

Prendendo $f := 1$, (6.41) fornisce la relazione tra la misura n–dimensionale della sfera unitaria con la misura $(n-1)$–dimensionale della superficie sferica S^{n-1}:

$$n\ m(B^n_1) = \sigma_{n-1}(S^{n-1})\ . \tag{6.45}$$

In **6.34** viene calcolato, per ogni n, il valore di $m(B^n_1)$.

[26] Si noti che la normale esterna a S^{n-1} nel punto y coincide con y.

[27] Naturalmente: $\int_{B^n_R} f(x)dx - \int_{B^n_r} f(x)dx = \int_{D^n_{R,r}} f(x)dx$.

4 1–forme differenziali

In questo paragrafo discuteremo alcune conseguenze del Teorema della divergenza e cioè "i teoremi classici di Green e Stokes"; per far ciò, generalizzando il concetto di differenziale di una funzione (scalare) di n variabili, introdurremo le 1–forme differenziali su $\mathbb{R}^n$. Sia $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ con A aperto in $\mathbb{R}^n$. Sappiamo che, per ogni $x \in A$, il differenziale df è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ che agisce nel seguente modo

$$df(\xi) := df_x(\xi) = \nabla f(x) \cdot \xi \ , \tag{6.46}$$

per ogni vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$; più concisamente[28] $df(\xi) = \nabla f \cdot \xi$. In particolare se $f(x) = x_i$ è la funzione lineare che ad x associa la sua i–esima coordinata, si ha

$$dx_i(\xi) = (\nabla x_i) \cdot \xi = e^{(i)} \cdot \xi = \xi_i \tag{6.47}$$

ovvero il differenziale della funzione x_i non è altro che la proiezione sulla i–esima coordinata di ξ.

Definizione 6.12 *I differenziali dx_i sono esempi di 1–forme differenziali (o in breve "1–forme") e verranno chiamati* **1–forme elementari**. *Le 1–forme differenziali in A sono combinazioni lineari (aventi funzioni per coefficienti) delle n 1–forme elementari. Più precisamente ω^1 è una* **1–forma differenziale su** *A se*

$$\omega^1 = \sum_{i=1}^{n} g_i dx_i \tag{6.48}$$

con $g_i \in C(A, \mathbb{R})$; se $g_i \in C^k(A, \mathbb{R})$ diremo che ω^1 è di classe C^k.

Fissato $x \in A$, l'azione di una 1–forma su vettori in $\xi \in \mathbb{R}^n$ è definita (per linearità) nella maniera ovvia:

$$\omega^1_x(\xi) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) dx_i(\xi) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\xi_i \ . \tag{6.49}$$

Come sopra, normalmente sottointenderemo la dipendenza (*non lineare*) della 1–forma dal punto $x \in A$ e scriveremo semplicemente $\omega^1(\xi)$ al posto di $\omega^1_x(\xi)$. Chiaramente, poichè i differenziali sono funzioni lineari su $\mathbb{R}^n$, anche le 1–forme lo sono:

$$\omega^1(a_1\xi^{(1)} + a_2\xi^{(2)}) = a_1\omega^1(\xi^{(1)}) + a_2\omega^1(\xi^{(2)}) \ . \tag{6.50}$$

Quindi una 1–forma è, *per ogni $x \in A$ fissato*, la più generale applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ ed inoltre *la dipendenza da x è regolare*. In particolare, se f è una funzione regolare su A il suo differenziale df è una 1–forma su A:

$$df = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} dx_i \ . \tag{6.51}$$

Dare una 1–forma in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (in cui penseremo sempre fissata la base standard $e^{(i)}$) equivale dunque ad assegnare n funzioni regolari, o, equivalentemente un "campo vettoriale"

[28] Non riportando esplicitamente nella notazione la dipendenza *non lineare* da $x \in A$ (cosa che faremo spesso in seguito).

$F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Data $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ chiameremo ω^1_F la 1–forma i cui coefficienti g_i sono le componenti di F:

$$\omega^1_F := \sum_{i=1}^n F_i dx_i \ . \tag{6.52}$$

Si noti che da (6.51) e (6.52) segue che

$$\omega^1_{\nabla f} = df \ . \tag{6.53}$$

Osservazione 6.13 (i) Non si confonda il significato degli "indici" x e F in (6.49) e (6.52): usando il simbolismo in (6.49) dovremmo scrivere $\omega^1_{F,x}(\xi) = \sum_{i=1}^n F_i(x)dx_i(\xi)$, ma normalmente ometteremo la x in tali scritture.
(ii) Una 1–forma ω^1 "di classe $C^p(A)$", è per definizione una 1–forma in cui i coefficienti g_i sono funzioni $C^p(A)$ (anche nel caso A non sia aperto).

Nel caso $n = 1$ siamo abituati a vedere il simbolo "dx" all'interno di un integrale ed ora, infatti, definiremo *l'integrale di una 1–forma*. Per far questo dobbiamo prima formalizzare il concetto di *orientamento su curve*. Sia $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ un elemento di curva e sia φ un'inclusione tale che $\varphi((a, b)) = \Gamma$, definiamo l'**orientamento su** Γ indotto da φ come

$$\mathrm{Or}\,(\varphi) := \{\psi : \ \psi \text{ è un'inclusione su } \Gamma \ : \frac{d}{dt}(\psi^{-1} \circ \varphi) > 0\} \ . \tag{6.54}$$

Da questa definizione segue che: (i) la relazione $\psi \in \mathrm{Or}\,(\varphi)$ definisce una *relazione di equivalenza*; (ii) se definiamo l'**inclusione inversa di** φ come

$$\bar{\varphi}(t) := \varphi(-t) \ , \qquad t \in [-b, -a] \tag{6.55}$$

allora $\bar{\varphi} \notin \mathrm{Or}\,(\varphi)$; (iii) se ψ è una inclusione su Γ allora o $\psi \in \mathrm{Or}\,(\varphi)$ oppure $\psi \in \mathrm{Or}\,(\bar{\varphi})$. L'orientamento $\mathrm{Or}\,(\bar{\varphi})$ si chiama **orientamento opposto** (o inverso) di $\mathrm{Or}\,(\varphi)$ e scriveremo $\mathrm{Or}\,(\bar{\varphi}) = -\mathrm{Or}\,(\varphi)$. Diremo anche che $(\Gamma, \mathrm{Or}\,(\varphi))$ è *la curva* Γ *orientata nel verso che va da* $\varphi(a)$ *a* $\varphi(b)$. Allo stesso modo, prendendo un'inclusione continua e regolare a tratti[29], si definisce *l'orientamento su curve regolari a tratti*: naturalmente in questo caso la relazione differenziale in (6.54) verrà richiesta nei punti in cui φ è derivabile.
Sia Γ un elemento di curva regolare orientato in A: $\Gamma = \varphi((a, b))$ e $\mathrm{Or} = \mathrm{Or}\,(\varphi)$ e sia $\omega^1 := \omega^1_F$ una 1–forma in A. Definiamo, allora, **l'integrale di** ω^1 **sulla curva orientata** Γ come

$$\int_{\Gamma,\,\mathrm{Or}} \omega^1 := \int_a^b F \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i \circ \varphi \ \varphi_i' dt \ , \tag{6.56}$$

Dal punto (vii) dell'Osservazione 6.3 segue che tale integrale *non dipende dalla particolare inclusione ma solo da* Γ *e dall'orientamento scelto*. Si noti che (6.56) può esere riscritta come

$$\int_{\Gamma,\,\mathrm{Or}} \omega^1 = \int_a^b \omega^1(\varphi') dt \tag{6.57}$$

dove la scrittura completa dell'integrando a destra è $\omega^1_{F,\varphi(t)}\big(\varphi'(t)\big)$. Come ci si aspetta, cambiando l'orientamento l'integrale in (6.56) cambia segno:

$$\int_{\Gamma,\,-\mathrm{Or}} \omega^1 = -\int_{\Gamma,\,\mathrm{Or}} \omega^1 \tag{6.58}$$

[29] Si ricordi il punto (iii) dell'Osservazione 6.5.

Comunque, spesso, quando non vi siano ambiguità, *ometteremo l'indicazione esplicita dell'orientamento nel simbolo di integrale di 1–forme.*

Tale definizione si generalizza in maniera ovvia al caso di curve chiuse o di curve regolari a tratti contenute in A.

Nel caso $n = 1$ *possiamo dunque interpretare l'integrale* $\int_a^b f dx$ *come l'integrale della 1–forma* $f dx$ *su* $\Gamma = (a, b)$ (si ricordi l'esempio **(E1)** con $n = 1$ della sezione 1).

Se $\omega^1 = df$ è il differenziale di una funzione $f \in C^1(A)$ e $\Gamma = \varphi((a, b))$ è un elemento di curva orientato in A di estremi $x_0 = \varphi(a)$ ed $x = \varphi(b)$, otteniamo (sottointendendo $\mathrm{Or} = \mathrm{Or}(\varphi)$)

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \omega^1 &:= \int_\Gamma df = \int_a^b \nabla f \cdot \varphi' dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f \circ \varphi \; dt = f(x) - f(x_0) \;, \end{aligned} \tag{6.59}$$

Integrando sui tratti di regolarità di una curva regolare a tratti[30], si vede subito che la (6.59) vale anche per curve regolari a tratti. In particolare, se Γ è una curva (regolare a tratti e) chiusa (cioè $x_0 = x$) si ha

$$\int_\Gamma df = 0 \;, \qquad (\Gamma \text{ curva chiusa regolare a tratti}) \;. \tag{6.60}$$

Chiaramente, *dire che una 1–forma* ω^1 *ha integrale nullo su ogni curva chiusa è equivalente a dire che l'integrale* (6.57) *dipende solo dagli estremi di* Γ. Infatti vale anche il viceversa:

Proposizione 6.14 *Sia* A *un aperto connesso di* $\mathbb{R}^n$. *Una 1–forma* ω^1 *su* A *è il differenziale di una funzione* f *se e solo se per ogni curva chiusa* Γ *regolare a tratti si ha*

$$\int_\Gamma \omega^1 = 0 \;. \tag{6.61}$$

Dimostrazione Il "solo se" lo abbiamo già dimostrato. Assumiamo ora che valga (6.61) e sia $\omega^1 := \omega^1_F$. Per l'osservazione fatta dopo (6.60), l'integrale di ω^1 dipende solo dagli estremi di una curva Γ. Fissiamo un qualunque punto $x_0 \in A$ e, per ogni $x \in A$, consideriamo una qualunque curva $\Gamma(x) \subseteq A$ regolare a tratti con primo estremo in x_0 e secondo estremo[31] in x. Per ipotesi, risulta ben definita la funzione

$$f(x) := \int_{\Gamma(x)} \omega^1 \;. \tag{6.62}$$

Facciamo ora vedere che $f_{x_i} = F_i$: sia $h \in \mathbb{R}$ tale che il segmento $P := P(x, x + he^{(i)})$ sia interamente contenuto in A. Sia $P = \{z = z(t) := x + t\; h\; e^{(i)},\; t \in [0, 1]\}$. Allora,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\big(f(x + h\; e^{(i)}) - f(x)\big) &= \frac{1}{h}\int_P \omega^1_F \\ &= \frac{1}{h}\int_0^1 F(x + t\; h\; e^{(i)}) \cdot z' dt = \int_0^1 F(x + t\; h\; e^{(i)}) \cdot e^{(i)} dt \\ &= \int_0^1 F_i(x + t\; h\; e^{(i)}) dt \end{aligned} \tag{6.63}$$

[30] I valori nei punti interni dove l'inclusione non è differenziabile si cancellano a due a due.

[31] Questo significa che se $\Gamma = \varphi((a, b))$, e $\mathrm{Or} = \mathrm{Or}(\varphi)$, $x_0 = \varphi(a)$ e $x = \varphi(b)$; si ricordi anche che un aperto connesso è connesso per poligonali (ed una poligonale è una curva regolare a tratti).

e tale quantità tende, quando $h \to 0$, a $F_i(x)$. ∎

Definizione 6.15 *Sia* $\omega^1 := \omega^1_F$ *una 1–forma su* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*;* ω^1 *si dice esatta se* $F = df$ *per qualche* $f \in C^2(A)$*; tale* f *viene chiamata "primitiva di* F*.* ω^1_F *si dice chiusa se*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \ , \qquad \forall\ i, j \ . \tag{6.64}$$

Chiaramente, per il lemma di Schwarz, *una 1–forma esatta è chiusa*. In generale non è vero il viceversa. Infatti, sia $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ e sia

$$\omega^1 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \tag{6.65}$$

(cosicchè $\omega^1 \in C^\infty(A)$). È immediato controllare che ω^1 è chiusa ma d'altra parte è anche facile vedere che se Γ è il cerchio unitario orientato in senso antiorario allora

$$\int_\Gamma \omega^1 = 2\pi \ , \tag{6.66}$$

e quindi, per la Proposizione 6.14 ω^1 non è esatta su[32] A.

Un viceversa parziale si ottiene facendo opportune ipotesi sul dominio A. Un insieme A si dice **stellato** se esiste un punto $x_0 \in A$ tale che per ogni $x \in A$ il segmento di estremi x_0 e x è interamente contenuto in A; in tal caso si dirà che A è stellato rispetto a[33] x_0. Vale allora la seguente[34]

Proposizione 6.16 *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *un insieme stellato. Una 1–forma su* A *è chiusa se e solo se è esatta.*

Dimostrazione Assumiamo per semplicità che $x_0 = 0$ (caso a cui ci si può sempre ridurre tramite il cambio di variabili $x = x_0 + y$). Sia $\omega^1 := \omega^1_F$ con F che verifichi (6.64) e si consideri la funzione

$$f(x) := \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 F_i(tx)dt \ , \tag{6.67}$$

che per le ipotesi su A è ben definita. Dai risultati noti sulla derivazione sotto segno di integrale, da (6.64) e dal Teorema fondamentale del calcolo segue che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \int_0^1 F_j(tx)dt + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 t\ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx)dt \\ &= \int_0^1 F_j(tx)dt + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 t\ \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(tx)dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(tF_j(tx)\Big)dt = F_j(x). \end{aligned}$$

Ovvero $F = \nabla f$ e cioè ω^1 è esatta. Il viceversa, come già osservato, è conseguenza immediata del lemma di Schwarz. ∎

---

[32] Si noti però che $\omega^1 = d\Big(\arctan(y/x)\Big) = d\Big(-\arctan(x/y)\Big)$ in $\{(x, y) : y \neq 0\}$ il che mostra che ω^1 è esatta su domini della forma $\mathbb{R}^2 \backslash P$ dove P è una qualunque semiretta chiusa che parte dall'origine (esercizio **6.39**).

[33] Ad esempio un insieme convesso è stellato rispetto ad un suo qualunque punto.

[34] Questo risultato e le sue generalizzazioni sono note come "Lemma di Poincaré".

Osservazione 6.17 Si noti che la formula (6.62) fornisce una ricetta per costruire una primitiva di una 1–forma esatta. Ad esempio $\omega^1 := \Big(\mathrm{sen}\,(xy)\ + xy\cos(xy)\Big)dx\ + x^2\cos(xy)dy$ è esatta su $\mathbb{R}^2$ (come deriva dal Lemma di Poicarè, essendo ω^1 chiusa su $\mathbb{R}^2$). Dato (x, y) scegliamo $\Gamma(x, y)$ come la poligonale orientata di vertici (in ordine) $(0, 0)$, $(x, 0)$ e (x, y): $\Gamma(x, y) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con $\Gamma_1 = \{(tx, 0) : 0 \le t \le 1\}$ e $\Gamma_2 = \{(x, ty) : 0 \le t \le 1\}$. Si ha allora $\int_{\Gamma_1}\omega^1 = 0$ e $\int_{\Gamma_2}\omega^1 = yx^2\int_0^1\cos(txy)dt = x\,\mathrm{sen}\,(xy)$; quindi $x\,\mathrm{sen}\,(xy)$ è una primitiva di ω^1.

Nella definizione della divergenza di una funzione $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ (con $A \subseteq \mathbb{R}^n$) il simbolo $\nabla \cdot f$ può essere interpretato come *il prodotto scalare tra l'"operatore differenziale vettoriale"* $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$ *e il campo vettoriale* f. Nel caso $n = 3$ vi è un altro prodotto notevole, il prodotto vettoriale, e *il prodotto vettoriale tra l'"operatore differenziale vettoriale"* $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$ *e il campo vettoriale* f *definisce un nuovo campo vettoriale che prende il nome di* **rotore** *di* f:

$$\nabla \times F := \mathrm{rot}\, F := \big(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\big)\ . \tag{6.68}$$

Osservazione 6.18 (i) Si noti che la divergenza è definita per n arbitrario al contrario del rotore che è definito solo per $n = 3$.

(ii) Un campo $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ tale che $\nabla \times F = 0$ si chiama **irrotazionale**. Ricordando la definizione di 1–forma chiusa si ha che $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ è *irrotazionale se e solo se* ω^1_F *è chiusa.*

Proposizione 6.19 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^3$. Allora*

(i) $\nabla \times (\nabla f) = 0$, $\forall\ f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$;

(ii) $\nabla \cdot (\nabla \times G) = 0$, $\forall\ G \in C^2(A, \mathbb{R}^3)$;

Sia ora $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto stellato e $H, F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$. Allora

(iii) $\nabla \times F = 0 \iff \exists\ f \in C^2(A, \mathbb{R})$ *tale che* $F = \nabla f$;

(iv) $\nabla \cdot H = 0 \iff \exists\ G \in C^2(A, \mathbb{R}^3)$ *tale che* $H = \nabla \times G$.

Dimostrazione La (i) e la (ii) seguono immediatamente dalle definizioni date e dal Lemma di Schwarz.

La (iii), in vista del punto (ii) dell'Osservazione 6.18, non è altro che la Proposizione 6.16 nel caso $n = 3$.

(iv): l'implicazione " $\Longleftarrow$ " è un caso speciale del punto (ii). La dimostrazione dell'implicazione " $\Longrightarrow$ " è assai simile alla dimostrazione della Proposizione 6.16. Infatti, assumiamo (senza perdita di generalità) che A sia stellato rispetto a $x_0 = 0$ e definiamo la funzione $\widetilde{H} : A \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\widetilde{H}_i := \int_0^1 t\ H_i(tx)\ dt\ .$$

Allora, una verifica diretta mostra che la funzione cercata G è data dal prodotto vettoriale tra $\widetilde{H}$ e la trasformazione identica $x \to x$ ovvero da

$$G := (\widetilde{H}_2\ x_3 - \widetilde{H}_3\ x_2, \widetilde{H}_3\ x_1 - \widetilde{H}_1\ x_3, \widetilde{H}_1\ x_2 - \widetilde{H}_2\ x_1)\ .$$

Verifichiamo, a titolo di esempio, che $(\nabla \times G)_1 = H_1$ ovvero che $\frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = H_1$: dalle definizioni date segue che

$$\frac{\partial G_3}{\partial x_2} = \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial x_2}\ x_2 - \frac{\partial \widetilde{H}_2}{\partial x_2}\ x_1 + \widetilde{H}_1\ ,\ \ \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \widetilde{H}_3}{\partial x_3}\ x_1 - \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial x_3}\ x_3 - \widetilde{H}_1\ ,$$

$$\frac{\partial \widetilde{H}_i}{\partial x_j} = \int_0^1 t^2\ \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(tx)\ dt\ .$$

Quindi, poiché $\nabla\cdot H=0$ (e quindi $\frac{\partial H_2}{\partial x_2}+\frac{\partial H_3}{\partial x_3}=-\frac{\partial H_1}{\partial x_1}$), si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial x_2}-\frac{\partial G_2}{\partial x_3} &= \int_0^1\Big\{t^2\Big(\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\,x_2+\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\,x_3-x_1\Big[\frac{\partial H_2}{\partial x_2}+\frac{\partial H_3}{\partial x_3}\Big]\Big\}+2tH_2\Big\}dt\\ &= \int_0^1 t^2\Big(\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\,x_2+\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\,x_3+x_1\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\Big)+2tH_1\Big\}dt\\ &= \int_0^1\frac{d}{dt}\Big(t^2H_1(tx)\Big)dt:=H_1\ . \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

5 I teoremi classici di Green e Stokes

Per formulare i teoremi classici di Green e Stokes abbiamo ancora bisogno di alcune definizioni. Dato un aperto regolare $A\subseteq\mathbb{R}^2$, si chiama *orientamento positivo su* ∂A, (o anche "orientamento antiorario") l'orientamento Or_+ indotto da una parametrizzazione $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ di ∂A tale che

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}=(-\nu_2,\nu_1)\ , \tag{6.69}$$

dove $\nu:=(\nu_1,\nu_2)$ è la normale esterna a A nel punto $x=\varphi(t)\in\partial A$; in tal caso la coppia $(\partial A,\,\mathrm{Or}_+)$ si denota anche con ∂A^+. Una **superficie elementare con bordo ed orientabile in** $\mathbb{R}^3$ è un elemento di 2–varietà regolare $\mathcal{S}\subseteq\mathbb{R}^3$ dato dall'immagine di una inclusione $\psi\in C^2(A,\mathbb{R}^3)$ con A aperto regolare di $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{S}:=\psi(A)$; il **bordo** di $\mathcal{S}$, denotato[35] $\partial\mathcal{S}$, è la curva regolare chiusa $\psi(\partial A)$. Ad una inclusione (ψ,A) che realizza una superficie elementare con bordo ed orientabile $\mathcal{S}=\psi(A)$ possiamo associare un versore ν^+ normale a[36] $\mathcal{S}$ definito, per ogni $x=\psi(u)\in\mathcal{S}$, $(u\in A)$, da

$$\nu^+:=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\times\frac{\partial\psi}{\partial u_2}}{\Big|\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\times\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\Big|}\ , \tag{6.70}$$

ed un orientamento su $\partial\mathcal{S}$ definito da $\mathrm{Or}\,(\psi\circ\varphi)$ dove φ è tale che $\partial A^+=(\partial A,\,\mathrm{Or}\,(\varphi))$; la coppia $(\nu^+,\partial\mathcal{S}^+)$, con $\partial\mathcal{S}^+:=(\partial\mathcal{S},\,\mathrm{Or}\,(\psi\circ\varphi))$ viene detta **orientata positivamente**. Si hanno allora i seguenti risultati

Teorema 6.20 (Teorema di Green) *Sia $A\subseteq\mathbb{R}^2$ un aperto regolare e sia $F\in C^1(\overline{A},\mathbb{R}^2)$. Allora*

$$\int_A\Big(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big)dx=\int_{\partial A^+}\omega_F^1\ . \tag{6.71}$$

Teorema 6.21 (Teorema classico di Stokes) *Sia $\mathcal{S}$ una superficie elementare con bordo ed orientabile in $\mathbb{R}^3$ e $F\in C^1(\overline{\mathcal{S}},\mathbb{R}^3)$. Allora*

$$\int_{\mathcal{S}}(\nabla\times F)\cdot\nu^+\,d\sigma_2=\int_{\partial\mathcal{S}^+}\omega_F^1\ , \tag{6.72}$$

dove ν^+ è un versore normale a $\mathcal{S}$ tale che la coppia $(\nu^+,\partial\mathcal{S}^+)$ è orientata positivamente.

[35] Si noti che, in questo contesto, il simbolo "$\partial\mathcal{S}$" *non* denota la frontiera insiemistica di $\mathcal{S}$, che, infatti, coincide con $\overline{\mathcal{S}}$ (essendo $\mathring{\mathcal{S}}=\emptyset$).

[36] "Versore" significa di norma unitaria ($|\nu^+|=1$) e "normale a $\mathcal{S}$" significa "ortogonale ad ogni vettore tangente a $\mathcal{S}$" ($\nu^+\cdot\xi=0$ per ogni ξ tangente a $\mathcal{S}$ nel punto x).

Osservazione 6.22 (i) Il Teorema di Green può essere utile per calcolare aree di figure piane tramite integrali di 1–forme. Infatti, se applichiamo la (6.71), rispettivamente, ai campi $F := (0, x_1)$, $F := (-x_2, 0)$ oppure $F := \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$, (osservando che in tutti questi casi $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 1$) si ottiene la formula

$$m(A) := \text{Area}\,(A) = \int_{\partial A^+} x_1 dx_2 = -\int_{\partial A^+} x_2 dx_1 = \frac{1}{2}\int_{\partial A^+} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)\ . \tag{6.73}$$

(ii) L'integrale di una 1–forma ω_F^1 su di una curva chiusa orientata Γ prende il nome di **circuitazione del campo** F **su** Γ. Dunque il Teorema di Stokes può essere formulato dicendo che *il flusso totale del rotore di un campo F attraverso una superficie elementare $\mathcal{S}$ con bordo orientabile, nel verso della normale ν^+, coincide con la circuitazione di F su $\partial\mathcal{S}^+$.*

(iii) Non è difficile mostrare che *il Teorema della divergenza ed i teoremi di Green e Stokes continuano a valere nel caso in cui le superfici su cui si integra siano solo regolari a tratti*[37]. Ad esempio il Teorema della divergenza è applicabile a cubi, coni, etc.

Dimostrazione (del Teorema di Green) Applicando il Teorema della divergenza su A al campo vettoriale $(F_2, -F_1)$, se $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ è tale che $\varphi([a, b]) = \partial A$ e $\text{Or}_+ = \text{Or}\,(\varphi)$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_A \nabla \cdot (F_2, -F_1)\ dx &= \int_A \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big) dx \\
&= \int_{\partial A} (F_2, -F_1) \cdot \nu\ d\sigma_1 = \int_a^b F \cdot \frac{\varphi'}{|\varphi'|}\ |\varphi'|\ dt \\
&= \int_{\partial A^+} \omega_F^1\ . \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Dimostrazione (del Teorema di Stokes) Sia $\mathcal{S} = \psi(A)$ con A aperto regolare in $\mathbb{R}^2$ e sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi([a, b]) = \partial A$ e $\text{Or}_+ = \text{Or}\,(\varphi)$. Sia

$$G(u) := \Big(F \circ \psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u_1}\ ,\ F \circ \psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u_2}\Big)\ , \qquad \text{con } \psi := \psi(u)\ ,\ u \in A\ . \tag{6.74}$$

Applicando il Teorema di Green a G, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_A \Big(\frac{\partial G_2}{\partial u_1} - \frac{\partial G_1}{\partial u_2}\Big)\ du &= \int_{\partial A^+} \omega_G^1 \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_a^b F_i(\psi \circ \varphi) \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j} \varphi_j'(t)\ dt \\
&= \int_a^b \sum_{i=1}^3 F_i(\psi \circ \varphi) \Big(\frac{\partial \psi_i}{\partial u_1}(\varphi)\varphi_1' + \frac{\partial \psi_i}{\partial u_2}(\varphi)\varphi_2'\Big) \\
&= \int_a^b \sum_{i=1}^3 F_i(\psi \circ \varphi) \frac{d}{dt}\psi_i \circ \varphi = \int_{\partial \mathcal{S}^+} \omega_F^1\ .
\end{aligned} \tag{6.75}$$

[37] Bisogna, naturalmente, adattare (nella maniera ovvia) le varie definizioni date. La dimostrazione di questa estensione del Teorema della divergenza può essere fatta approssimando in modo regolare la frontiera ∂A di un dominio A "regolare a tratti" (usando, per esempio, la convoluzione con funzioni C_0^∞ con supporto in un intorno opportuno delle "singolarità" di ∂A): se $\partial A^{(j)}$ denotano tali approssimazioni regolari, è allora facile vedere che $\lim_{j\to\infty} \int_{A^{(j)}} \nabla \cdot F = \int_A \nabla \cdot F$ e che (essendo la parte singolare di $\partial A^{(j)}$ un "insieme di misura $(n-1)$–dimensionale nulla") anche $\lim_{j\to\infty} \int_{\partial A^{(j)}} F \cdot \nu d\sigma_{n-1} = \int_{\partial A} F \cdot \nu d\sigma_{n-1}$.

D'altra parte

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times F) \cdot \nu^+ \, d\sigma_2 = \int_A \nabla \times F(\psi) \ \cdot \Big(\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2}\Big) du \ . \tag{6.76}$$

Ed infine

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_2}{\partial u_1} - \frac{\partial G_1}{\partial u_2} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_1}\Big(F_i \circ \psi \ \frac{\partial \psi_i}{\partial u_2}\Big) - \frac{\partial}{\partial u_2}\Big(F_i \circ \psi \ \frac{\partial \psi_i}{\partial u_1}\Big) \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial \psi_j}{\partial u_1}\frac{\partial \psi_i}{\partial u_2} - \frac{\partial \psi_j}{\partial u_2}\frac{\partial \psi_i}{\partial u_1}\Big) \\
&= \sum_{i>j} \Big(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial \psi_j}{\partial u_1}\frac{\partial \psi_i}{\partial u_2} - \frac{\partial \psi_j}{\partial u_2}\frac{\partial \psi_i}{\partial u_1}\Big) \\
&:= (\nabla \times F) \cdot \Big(\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2}\Big) \ .
\end{aligned} \tag{6.77}$$

Mettendo assieme (6.75)÷(6.77) si ha l'asserto. ∎

6 *Esercizi e complementi*

C 6.1 (Volumi di parallelepipedi k–dimensionali in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq k$)
Siano $v^{(1)}$,...,$v^{(k)}$ k vettori in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq k$; sia $\Pi_0 := \Pi(v^{(1)}, ..., v^{(k)})$ il parallelepipedo generato da $v^{(1)}$,...,$v^{(k)}$. Lo scopo di questo paragrafo è di *definire il volume (la misura) k–dimensionale di* Π_0 (per le notazioni si veda § 3). Tale definizione è basata sui due seguenti lemmi (la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio). Sia $V := V(v^{(1)}, ..., v^{(k)})$ lo spazio vettoriale generato da $v^{(1)}$,...,$v^{(k)}$.

Lemma 6.23 *Siano $v^{(1)}$,...,$v^{(k)}$ vettori indipendenti in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq k$; sia $B := \{w^{(1)},..., w^{(k)}\}$ una base ortonormale in V. Denotiamo con $u^{(i)} \in \mathbb{R}^k$ il vettore delle coordinate di $v^{(i)}$ rispetto a B (cioè $u^{(i)} := (u_1^{(i)}, ..., u_k^{(i)})$ e $v^{(i)} = \sum_{j=1}^{k} u_j^{(i)} w^{(j)}$), e denotiamo con U e A le matrici $U := [u^{(1)}, ..., u^{(k)}]$ e $A := [v^{(1)}, ..., v^{(k)}]$; $U \in \mathrm{Mat}(k \times k)$ e $A \in \mathrm{Mat}(n \times k)$. Allora $U^T U = A^T A$.*

Lemma 6.24 *Siano k, n, $v^{(i)}$ ed A come nel Lemma precedente e sia $\varphi : V \to \mathbb{R}^d$ un isomorfismo lineare che conservi il prodotto scalare. Allora*

$$\mathrm{mis}_k \Big(\varphi(\Pi[v^{(1)}, ..., v^{(k)}])\Big) = \mathrm{mis}_k \Big(\Pi[\varphi(v^{(1)}), ..., \varphi(v^{(k)})]\Big) = \sqrt{A^T A} \ . \tag{6.78}$$

Definizione 6.25 *Se $v^{(1)}$,...,$v^{(k)}$ sono vettori in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq k$ e se $\Pi_0 := \Pi(v^{(1)}, ..., v^{(k)})$ denota il parallelepido generato in $\mathbb{R}^n$ dai vettori $v^{(1)}$,...,$v^{(k)}$, si defisce la misura euclidea k–dimensionale di Π_0 come*

$$\mathrm{mis}_k(\Pi_0) := \mathrm{mis}_k \Big(\varphi(\Pi[v^{(1)}, ..., v^{(k)}])\Big) \ , \tag{6.79}$$

dove $\varphi : V \to \mathbb{R}^k$ è un qualunque isomorfismo lineare che conservi il prodotto scalare.

Osservazione 6.26 (i) Un isomorfismo che conservi il prodotto scalare conserva anche gli angoli e le lunghezze e quindi conserva la "geometria euclidea".

(ii) In particolare da (6.78) mostra che la misura k–dimensionale di $\varphi(\Pi_0)$ *non dipende dal particolare isomorfismo* φ (purchè, naturalmente φ conservi il prodotto scalare). Dunque la Definizione 6.25 è ben posta.

(iii) Per una nota formula di algebra lineare[38] si ha che *se A è una matrice $n \times k$ con $k \le n$ allora il determinante di $A^T A$ è uguale alla somma dei quadrati dei determinanti di tutti i minori di rango massimo (ossia k)*. Dunque l'oggetto formale "$d\sigma_k$" che appare in (6.12) (e cioè nella definizione della misura di una varietà k–dimensionale in $\mathbb{R}^n$) può essere interpretata come la misura k–dimensionale del parallelepipedo "infinitesimo" generato dai vettori $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i} du_i$ (e si ricordi che i vettori $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1},\ldots,\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_k}$ generano lo spazio tangente alla varietà).

Esercizio 6.2 Se qualcuna delle affermazioni fatte in **(E1)**÷**(E7)** di § 1 non fosse completamente chiara, la si dimostri con cura!

Esercizio 6.3 Dire se le seguenti funzioni definiscono delle inclusioni differenziabili e, in caso affermativo, si disegni la traccia dei relativi elementi di curva e se ne calcoli la lunghezza:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \varphi(t) = r(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)\ , \quad t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]\ , (r > 0, 1 > \varepsilon > 0)\ , \\ \text{(ii)} & \varphi(t) = t(\cos t, \operatorname{sen} t)\ , \quad t \in [a,b]\ ,\ (0 < a < b)\ , \end{array}$$

(iii) φ come in (i) ma con $t \in [0,1]$.
[L'elemento di curva in (i) prende il nome di "elemento di cicloide"; quello in (ii) "elemento di spirale".]

Esercizio 6.4 Trovare un'inclusione, nell'intorno di $x_0 = (1, 10, 2, 0)$, che realizzi $\{\phi = 0\}$ con

$$\phi(x) = x_1^2 + x_2^5(x_3 - 2) + \cos x_4 - 2\ .$$

Esercizio 6.5 Si diano i dettagli della dimostrazione relativa all'affermazione fatta nel punto (i) dell'Osservazione 6.7.

6.6 Si dimostri che se $\mathcal{S}$ è una n–varietà con bordo in $\mathbb{R}^n$ allora il suo bordo coincide con la sua frontiera (nella topologia usuale di $\mathbb{R}^n$).

6.7 Si dimostri che le varietà descritte in **(S3)** e **(S4)** hanno bordo vuoto.

6.8 Sia $\mathcal{S} := \varphi(U)$ un elemento di k–varietà in $\mathbb{R}^n$. Si trovi una inclusione (ψ, V) tale che $\mathcal{S} = \psi(V)$ e tale che V sia un aperto di $\mathbb{R}^k$ contenuto in $\{u_k > 0\}$.
[Risposta nel caso in cui $U \cap \{u_k \le 0\} \ne \emptyset$: Sia $m := \inf_{u \in U} u_k$ e sia $u_0 := (0, ..., 0, 1 - m)$; si può allora prendere $V := u_0 + U$ e $\psi(v) := \varphi(v - u_0)$.]

6.9 Sia $\mathcal{S} = \{\phi \ge 0\}$ un insieme regolare in $\mathbb{R}^n$ (si veda **(S7)**) e sia ν la normale esterna in $x_0 \in \partial\mathcal{S}$ cioè

$$\nu := -\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\ .$$

Si dimostri che "muovendosi" da x_0 nella direzione ν si "esce" da $\mathcal{S}$, mentre "muovendosi" nella direzione opposta si "entra" in $\mathcal{S}$, più precisamente, si dimostri che esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\{x_0 + \nu t : 0 < t < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{S}\ , \quad \{x_0 - \nu t : 0 < t < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{S}\ . \tag{6.80}$$

C 6.10 (Prodotto vettoriale) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è una *operazione bilineare ed antisimmetrica* che associa ad una coppia di vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$ un terzo vettore $v \times w \in \mathbb{R}^3$ di coordinate[39]

$$(v \times w)_i := \det[e^{(i)}, v, w]\ , \tag{6.81}$$

ovvero

$$v \times w = \sum_{i=1}^{3} e^{(i)}\ \det[e^{(i)}, v, w]\ , \qquad \left(e_j^{(i)} := \delta_{ij}\right)\ . \tag{6.82}$$

[38] Tale formula è una generalizzazione della formula per il determinante del prodotto di due matrici quadrate ed in alcuni testi è nota come "Teorema di Binet"; si veda, ad esempio, "E. Sernesi *Geometria 1*, ed. Boringhieri.

[39] In alcuni testi (soprattutto di fisica) il prodotto vettoriale tra v e w viene denotato con il simbolo "$v \wedge w$".

Si noti che, per definizione di i–esima coordinata, si ha

$$e^{(i)} \cdot (v \times w) = \det[e^{(i)}, v, w] \ . \tag{6.83}$$

Dati due vettori linearmente indipendenti v e w definiamo $\pi_{v,w}$ il piano generato da v e w

$$\pi_{v,w} := V(v,w) := \{y \in \mathbb{R}^3 : \ y = av + bw \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\} \ . \tag{6.84}$$

Ed infine, dati tre vettori indipendenti $v^{(i)} \in \mathbb{R}^3$, definiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Or}\,(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}) \quad := \quad & \Big\{(y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \\ & \det[y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}] \det[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}] > 0\Big\} \ . \end{aligned} \tag{6.85}$$

È facile vedere che[40] l'appartenenza a $\mathrm{Or}\,(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ *è una relazione d'equivalenza*; una base (ordinata) $(y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$ in $\mathrm{Or}\,(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ si dice *che definisce lo stesso orientamento di* (o anche *che è equiorientata con*) $(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$.

Si verificano facilmente le seguenti proprietà del prodotto vettoriale $v \times w$, di $\pi_{v,w}$ e dell'"orientamento" $\mathrm{Or}\,(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$:

Proprietà del prodotto vettoriale

1) $v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2)e^{(1)} - (v_1w_3 - v_3w_1)e^{(2)} + (v_1w_2 - v_2w_1)e^{(3)}$.

2) L'operazione $(v, w) \to v \times w$ è bilineare[41] ed antisimmetrica[42].

3) $e^{(\sigma_1)} = \varepsilon_\sigma e^{(\sigma_2)} \times e^{(\sigma_3)}$, dove σ è una permutazione di $\{1, 2, 3\}$ e ε_σ è il segno di tale permutazione[43].

4) $w \cdot v^{(1)} \times v^{(2)} = \det[w, v^{(1)}, v^{(2)}]$ e quindi $w \cdot v^{(1)} \times v^{(2)} = v^{(1)} \cdot v^{(2)} \times w = v^{(2)} \cdot w \times v^{(1)}$.

5) $v \times w \perp v$, $v \times w \perp w$.

6) $v \times w \neq 0$ se e solo se $\text{rango}[v, w] = 2$ se e solo se v e w sono linearmente indipendenti (cioè "non appartengono alla stessa retta" o equivalentemente "non sono paralleli").

7) $|v \times w|^2 = |v|^2|w|^2 - (v \cdot w)^2$.

8) Se U è una matrice ortogonale (3×3), $|Uv \times Uw| = |v \times w|$.

9) Se $U \in SO(3)$, allora $Uv \times Uw = U(v \times w)$.

10) $(v \times w, v, w) \in \mathrm{Or}\,(e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)})$.

11) Se v e w sono indipendenti, allora $\pi_{v,w} = \pi_{v \times w}$.

12) $|v \times w|$ coincide con l'area del parallelogramma generato da v e w (per una formulazione più precisa si veda **6.11**).

Dimostrazione della 9): usando la 4) e la (6.83), per ogni i si ha:

$$\begin{aligned} e^{(i)} \cdot U(v \times w) &= U^T e^{(i)} \cdot (v \times w) = \det[U^T e^{(i)}, v, w] = \det[U^{-1} e^{(i)}, v, w] \\ &= \det\Big(U^{-1}[e^{(i)}, Uv, Uw]\Big) = \det[e^{(i)}, Uv, Uw] = e^{(i)} \cdot (Uv \times Uw) \ . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

La definizione del prodotto vettoriale può essere facilmente ricordata se si nota che la seguente *identità formale*:

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} e^{(1)} & e^{(2)} & e^{(3)} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \tag{6.86}$$

dove il determinante formale verrà pensato sviluppato secondo la prima "riga".

[40] Esercizio **6.12**.
[41] Cioè lineare sia in v che in w.
[42] Cioè $v \times w = -w \times v$.
[43] Si ricordi la nota 14 di §3.

Esercizio 6.11 (i) Siano v e w due vettori in $\mathbb{R}^3$ indipendenti. Si dimostri che esiste $U \in SO(3)$ tale che $U(v \times w) = \lambda e^{(3)}$ con $\lambda > 0$.

(ii) Si dimostri che $Uv, Uw \in \pi_{e^{(1)},e^{(2)}}$.
Sia $Uv = (\bar{v}, 0)$, $Uw = (\bar{w}, 0)$ con $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^2$. Definiamo l'area del parallelogramma $P := \{a_1 v + a_2 w$ con $a_i \in [0,1]\}$ come la misura (bidimensionale) di $\Pi(\bar{v}, \bar{w})$.

(iii)* Si dimostri che la definizione in (ii) *non dipende* dalla particolare scelta di U (che non è unica).

(iv) Si dimostri che $|v \times w|$ coincide con l'area del parallelogramma P.

T 6.12 Si dimostri che $\mathrm{Or}\,(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ è una classe di equivalenza nell'insieme delle triple ordinate di vettori indipendenti in $\mathbb{R}^3$.

T 6.13 Dimostrare che se $(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}) \in \mathrm{Or}\,(e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)})$ allora

$$v^{(3)} \cdot v^{(1)} \times v^{(2)} > 0 \ . \tag{6.87}$$

Ora si mediti sulla "regola della mano destra".

C 6.14 (Ascissa curvilinea) Se Γ è un elemento di curva regolare, esiste una parametrizzazione "canonica" in termini della lunghezza. Se $\Gamma = \varphi((a,b))$ definiamo la seguente funzione, chiamata **ascissa curvilinea**:

$$s(t) := \int_a^t |\varphi'(u)| du \tag{6.88}$$

ovvero $s(t)$ è la lunghezza dell'elemento di curva di estremi $\varphi(a)$ e $\varphi(t)$: in particolare $s(a) = 0$ e $s(b) = L(\Gamma)$. Essendo $s'(t) = |\varphi'(t)| \neq 0$ tale funzione è strettamente crescente in $[a,b]$ e quindi invertibile. Sia $t(s)$ la funzione inversa. Poniamo allora

$$\tilde{\varphi}(s) := \varphi(t(s)) \ . \tag{6.89}$$

È chiaro che tale inclusione *non dipende da* φ[44]. Dato un elemento di curva regolare Γ e fissato un suo estremo x_0 si chiama **parametrizzazione secondo l'ascissa curvilinea** con punto iniziale x_0 la parametrizzazione $\gamma(s) := \tilde{\varphi}(s)$ dove $\varphi : [a,b] \to \Gamma$ è una qualunque inclusione su Γ tale che $\varphi(a) = x_0$ e $\tilde{\varphi}(s)$ è definita in (6.89).

C 6.15 (Rette e versori tangenti)

Sia $\Gamma := \varphi(I)$ un elemento di curva regolare in $\mathbb{R}^n$ ($I = (a,b)$ e φ è una inclusione di $[a,b]$ in $\mathbb{R}^n$). Ricordiamo che una qualunque retta in $\mathbb{R}^n$ passante per un punto x_0 è data da

$$\ell := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = x_0 + t\xi \text{ con } t \in \mathbb{R}\} \ , \tag{6.90}$$

dove ξ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$. Non è restrittivo assumere che[45] $|\xi| = 1$ cosa che d'ora in avanti faremo. Ricordiamo anche che dato un punto $x \in \mathbb{R}^n$ ed un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce la *distanza di* x *da* X (rispetto alla norma euclidea $|\cdot|$) come

$$\mathrm{dist}\,(x, X) := \inf_{y \in X} |x - y| \ . \tag{6.91}$$

Si ha allora la seguente semplice

Proposizione 6.27 *Dato un punto $x \in \mathbb{R}^n$ ed una retta passante per $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\ell := \{x_0 + t\xi\}$ (con $|\xi| = 1$), si consideri il seguente punto su ℓ*

$$p_\ell(x) := x_0 + (x - x_0) \cdot \xi \ \xi \ . \tag{6.92}$$

Allora $p_\ell(x)$ verifica

$$\mathrm{dist}\,(x, \ell) = |x - p_\ell(x)| \tag{6.93}$$

ed è l'unico punto di ℓ per cui (6.93) valga.

---

[44] Cioè se $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ è un'altra inclusione su Γ tale che $\psi(c) = \varphi(a)$ allora $\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\psi}(s)$.
[45] Basta infatti cambiare il paramero t con $s = |\xi| t$.

Il punto $p_\ell(x)$ si chiama **proiezione di x su ℓ**.

Dimostrazione Per trovare la distanza di x da ℓ bisogna minimizzare la funzione $t \to |x - x_0 - t\xi|$ o, equivalentemente, la funzione $|x - x_0 - t\xi|^2$. Tale quantità, per (D.4), è uguale a

$$|x - x_0|^2 + t^2 - 2t(x - x_0) \cdot \xi \tag{6.94}$$

che raggiunge il suo minimo per l'unico valore $t = (x - x_0) \cdot \xi$. $\blacksquare$

Definizione 6.28 *Sia $x_0 \in \Gamma$ elemento di curva regolare in $\mathbb{R}^n$. Una retta ℓ passante per x_0 si dice tangente a Γ (nel punto x_0) se per ogni successione di punti $x^{(j)} \in \Gamma$, $x^{(j)} \neq x_0$, tali che $\lim_{j\to\infty} x^{(j)} = x_0$ si ha*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\text{dist}\,(x^{(j)}, \ell)}{|x^{(j)} - x_0|} = 0\ . \tag{6.95}$$

Si noti che la quantità $\frac{\text{dist}\,(x^{(j)},\ell)}{|x^{(j)}-x_0|}$ non è altro che il seno dell'angolo tra la retta ℓ e la retta passante per i punti x_0 e $x^{(j)}$.

Proposizione 6.29 *Sia $\Gamma := \varphi((a,b))$ un elemento di curva regolare*[46] *in $\mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \Gamma$. Allora esiste un'unica retta tangente a Γ in x_0 data da*

$$\ell := \{x = \varphi(t_0) + s\tau : s \in \mathbb{R}\}\ , \quad \text{dove} \quad \tau := \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}\ . \tag{6.96}$$

Il versore τ definito in (6.96) si chiama *versore tangente* alla curva Γ nel punto x_0 mentre $\varphi'(t_0)$ è un **vettore tangente** a Γ in x_0.

Osservazione 6.30 Il versore tangente τ definito in (6.96) è definito a meno del segno[47]. Il verso scelto in (6.96) fissa un verso (cioè un "orientamento") sulla retta tangente che corrisponde al verso in cui $\varphi(t)$ "percorre" l'elemento Γ.

Dimostrazione (della Proposizione 6.29) Assumiamo, per semplicità di notazione che $t_0 = 0$ e che $x_0 = 0$ (situazione che può sempre essere raggiunta tramite traslazioni in t e x). Dimostriamo prima che ℓ è tangente a Γ in $x_0 = 0$. Sia $x^{(j)} \in \Gamma$ una successione convergente a 0 (con $x^{(j)} \neq 0$); questo equivale a dire che $x^{(j)} = \varphi(t_j)$ con $t_j \to 0$, ($t_j \neq 0$), e $\varphi(0) = 0$. Dalla Proposizione 6.27 si ha che

$$\frac{\text{dist}\,(x^{(j)}, \ell)}{|x^{(j)}|} = \frac{|\varphi(t_j) - \varphi(t_j) \cdot \tau\ \tau|}{|\varphi(t_j)|}\ . \tag{6.97}$$

D'altra parte per la formula di Taylor al prim'ordine si ha che esiste una funzione (vettoriale) $\delta(t)$ tale che

$$\varphi(t) = \varphi'(0)t + \delta(t)\ , \quad \text{con} \ \lim_{t\to 0} \frac{|\delta(t)|}{t} = 0\ . \tag{6.98}$$

Inoltre, dalla definizione di τ, segue che

$$\varphi'(0) \cdot \tau\ \tau = \varphi'(0)\ . \tag{6.99}$$

Sostituendo (6.98) in (6.97) ed usando (6.99) otteniamo

$$\frac{\text{dist}\,(x^{(j)}, \ell)}{|x^{(j)}|} = \frac{|\delta(t_j) - \delta(t_j) \cdot \tau\ \tau|}{|t_j|\ \left|\varphi'(0) + \frac{\delta(t_j)}{t_j}\right|} \tag{6.100}$$

[46] Come al solito φ è una inclusione dell'intervallo $[a,b]$ in $\mathbb{R}^n$.

[47] In effetti, la Proposizione 6.29 asserisce l'unicità della retta tangente e ad una retta corrispondono *due* versori.

e tale quantità tende a 0, quando $j \to \infty$, in virtù di (6.98)(ed essendo $|\varphi'(0)| \neq 0$).

Dimostriamo ora l'unicità della retta tangente. Supponiamo che esista un'altra retta tangente $\ell' := \{x_0 + s\tau' : s \in \mathbb{R}\}$ con $|\tau'| = 1$ e $\tau' \neq \pm\tau$ (il che equivale a dire che le rette ℓ e ℓ' sono distinte). Sia $x^{(j)} \neq 0$ una succesione di punti in Γ che tendono a 0. Essendo le due rette tangenti a Γ si ha che

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|x^{(j)} - x^{(j)} \cdot \tau\ \tau|}{|x^{(j)}|} = \lim_{j\to\infty} \frac{|x^{(j)} - x^{(j)} \cdot \tau'\ \tau'|}{|x^{(j)}|} = 0\ . \tag{6.101}$$

Sia $y^{(j)} := \frac{x^{(j)}}{|x^{(j)}|}$. Tale successione appartiene a $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ |x| = 1\}$. Tale insieme è compatto, quindi esiste una sottosuccessione $y^{(j_k)}$ convergente ad un punto $\bar{y}$ di S^{n-1}. Inserendo tale sottosuccessione in (6.101) e prendendo il limite per $k \to \infty$, otteniamo che

$$\bar{y} - \bar{y} \cdot \tau\ \tau = 0 = \bar{y} - \bar{y} \cdot \tau'\ \tau' \tag{6.102}$$

ovvero $\bar{y} = \bar{y} \cdot \tau\ \tau = \bar{y} \cdot \tau'\ \tau'$. Prendendo la norma di tali relazioni e ricordando che $|\bar{y}| = 1$, vediamo che $\bar{y} \cdot \tau = \pm 1$ e $\bar{y} \cdot \tau' = \pm 1$, il che implica $\tau = \pm\tau'$ (essendo $\bar{y} \cdot \tau\ \tau = \bar{y} \cdot \tau'\ \tau'$) producendo una contraddizione. ∎

Esercizio 6.16 Sia $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ l'unione dei due segmenti $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0, 0 \leq x_1 < 1\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, 0 \leq x_2 < 1\}$. Si dimostri che Γ è una 1–varietà regolare a tratti ma non è un elemento di 1–varietà regolare in $\mathbb{R}^2$.

6.17 Verificare che i vettori tangenti alla cicloide (**6.3**) nei punti $(x, y) = \varphi(n\pi)$ sono paralleli all'asse delle x.

Esercizio 6.18 * Sia $\mathcal{S}$ la porzione cilindrica in $\mathbb{R}^3$ data da $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1,\ x^2 + y^2 = 1,$ e $y > 0\}$. Si dimostri che per ogni $M > 0$ (comunque grande) e per ogni $\delta > 0$ (comunque piccolo) esistono N triangoli con interni a due a due disgiunti e con vertici su $\mathcal{S}$ tali che la somma delle loro aree supera M.

Esercizio 6.19 Si verifichi che se definiamo i numeri L, M, N tramite la relazione

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} := Le^{(1)} - Me^{(2)} + Ne^{(3)} \tag{6.103}$$

ed i numeri E, F, G tramite

$$E := |\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}|\ , \quad F := |\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}|\ , \quad G := \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\ , \tag{6.104}$$

allora

$$\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\Big|^2 = L^2 + M^2 + N^2 = E^2F^2 - G^2\ . \tag{6.105}$$

(Tali notazioni sono usate in vari testi).

Esercizio 6.20 Dimostrare che se $\mathcal{S} := \{(x, f(x)) : x \in U\}$, con U aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, è il grafico di una funzione $f \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R})$, allora

$$\text{Area}\,(\mathcal{S}) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2}du\ . \tag{6.106}$$

Esercizio 6.21 (Superfici di rotazione in $\mathbb{R}^3$) Sia $\Gamma := \{(u(t), v(t) :\ t \in (a, b)\}$ un elemento di curva regolare (eventualmente chiusa) in $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ e α un numero in $(0, 2\pi]$. Si dimostri che

$$\mathcal{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = u(t)\cos\theta,\ y = u(t)\,\text{sen}\,\theta,\ z = v(t) \text{ con } t \in (a, b)\ ,\ \text{e } \theta \in (0, \alpha)\}$$

è un elemento di superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli l'area in termini di un integrale su (a, b).

Esercizio 6.22 Sia $\Gamma := \varphi((a,b))$ un elemento di curva regolare in $\mathbb{R}^2$, sia $f \in C(\overline{\Gamma}, (0,\infty))$ e sia $\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Gamma \text{ e } 0 < z < f(x,y)\}$. Si dimostri che $\mathcal{S}$ è un elemento di superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ e si dimostri che

$$\operatorname{Area}(\mathcal{S}) = \int_\Gamma f \, d\sigma_1 \ .$$

Esercizio 6.23 Calcolare l'area superficiale dell'ellissoide di rotazione

$$\left(\frac{x_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{R}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{r}\right)^2 = 1 \tag{6.107}$$

dove $R \neq r$ sono due numeri positivi.

Esercizio 6.24 Si calcoli l'area della superficie del toro T^2 ottenuto ruotando una circonferenza di raggio r attorno ad un asse a distanza $R > r$ dal centro della circonferenza.
Si noti che T^2 ammette la parametrizzazione:

$$T^2 = \{x = (R + r\cos t)\cos\theta,\ y = (R + r\cos t)\operatorname{sen}\theta,\ z = r\operatorname{sen} t, \text{con } 0 \le t, \theta \le 2\pi\} \ .$$

T 6.25 (Orientamento su superfici) Fissare una particolare inclusione φ che realizza $\mathcal{S}$, elemento di superficie, equivale a fissare **un orientamento su** $\mathcal{S}$: si definisce $\operatorname{Or}(\varphi)$ la classe di equivalenza costituita da tutte le inclusioni $\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ con $\psi(V) = \mathcal{S}$ tali che $\det \frac{\partial v}{\partial u} > 0$, dove $v(u) := \psi^{-1} \circ \varphi(u)$. Dimostrare che l'orientamento $\operatorname{Or} = \operatorname{Or}(\varphi)$ è una classe di equivalenza.

Esercizio 6.26 Sia $\operatorname{Or} = \operatorname{Or}(\varphi)$ un orientamento fissato su $\mathcal{S} = \varphi(U)$. Trovare l'orientamento opposto.

Esercizio 6.27 Dimostrare che su ogni elemento di superficie $\mathcal{S} = \varphi(U)$ si hanno due soli orientamenti, ovvero ogni inclusione ψ che realizza $\mathcal{S}$ o appartiene a $\operatorname{Or}(\varphi)$ o appartiene a $\operatorname{Or}(\bar{\varphi}) = -\operatorname{Or}(\varphi)$.

T 6.28 (Orientamento su elementi di k–varietà) Le definizione date nel caso di curve e superfici in $\mathbb{R}^3$ si estendono immediatamente al caso generale. Sia $\mathcal{S} = \varphi(U)$ un elemento di k–superficie in $\mathbb{R}^n$. Si definisce l'**orientamento** indotto da φ su $\mathcal{S}$ la classe di equivalenza costituita da tutte le inclusioni $\psi : \overline{V} : \mathbb{R}^n$ con $\psi(V) = \mathcal{S}$ tali che $\det \frac{\partial u}{\partial v} > 0$ dove $v(u) := \psi^{-1} \circ \varphi(u)$.
Si generalizzino gli esercizi **6.25**, **6.26** e **6.27**.

C 6.29 (Spazio tangente ad una varietà)

Sia $\mathcal{S} = \varphi(U)$ un elemento di k–varietà in $\mathbb{R}^n$ e $x_0 := \varphi(u_0) \in \mathcal{S}$.

Definizione 6.31 *Si chiama spazio tangente a $\mathcal{S}$ in x_0, e si denota $T\mathcal{S}_{x_0}$, l'insieme dei vettori $\xi \in \mathbb{R}^n$ tali che $\xi = z'(t_0)$ per una qualche $z : (a,b) \to \mathcal{S}$ di classe C^1 tale che $z(t_0) = x_0$ con $a < t_0 < b$.*

Si noti che se $z'(t_0) \neq 0$, l'immagine di un intorno sufficientemente piccolo di t_0 è un elemento di curva regolare in $\mathcal{S}$ passante per x_0; d'altra parte prendendo $z : t \in (0,1) \to z(t) := x_0 \in \mathcal{S}$ si vede che $0 \in TS_{x_0}$. Per ogni $x_0 = \varphi(u_0) \in \mathcal{S} = \varphi(U)$ passano k–curve speciali, dette **curve coordinate**, date da

$$\gamma^{(i)}(t) := \varphi(u_0 + te^{(i)}) := \varphi(u_{01}, ..., u_{0i} + t, ..., u_{0k}) \tag{6.108}$$

dove $\{e^{(i)}\}$ è la base standard in $\mathbb{R}^k$ e t varia in $[-\delta, \delta]$ per δ sufficientemente piccolo[48]. Quindi i k vettori

$$\xi^{(i)} := (\gamma^{(i)})'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u_0) \tag{6.109}$$

appartengono a $T\mathcal{S}_{x_0}$. Infatti, vale la seguente

[48] "Sufficientemente piccolo" significa che $\gamma^{(i)}([-\delta,\delta])$ è contenuto in $\mathcal{S}$.

Proposizione 6.32 *Lo spazio $T\mathcal{S}_{x_0}$ è un sottospazio vettoriale di dimensione k di $\mathbb{R}^n$ ed una base di tale spazio vettoriale è data dai k vettori $\xi^{(i)}$, $i = 1, ..., k$ definiti in (6.109).*

Dimostrazione Tramite una traslazione ($t = t_0 + s$) possiamo assumere che gli elementi di TS_{x_0} siano realizzati da applicazioni differenziabili z definite in un intorno di 0 tali che $z(0) = x_0$. Dato $\xi \in T\mathcal{S}_{x_0}$, facciamo vedere che ξ può scriversi come combinazione lineare dei vettori $\xi^{(i)}$. Sia $\xi = z'(0)$. Definiamo $v(t) := \varphi^{-1} \circ z(t)$. Tale funzione (per il punto (vii) dell'Osservazione 6.3) appartiene a $C^1(\{0\}, \mathbb{R}^k)$ ed inoltre $\varphi(v(t)) = z(t)$ e $u_0 := v(0)$. Derivando $\varphi(v(t)) = z(t)$ si ottiene che, per ogni $j = 1, ..., n$,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i}(u_0) v_i'(0) = z_j'(0) , \tag{6.110}$$

cioè $\xi = \sum_{i=1}^k a_i \xi^{(i)}$ con $a_i := v_i'(0)$. Mostriamo che TS_{x_0} è uno spazio vettoriale. Se $\xi := z'(0) \in TS_{x_0}$ e $a \in \mathbb{R}$ allora $a\xi = w'(0)$ dove $w(t) := z(at)$ e quindi $a\xi \in TS_{x_0}$. Se $\xi, \eta \in T\mathcal{S}_{x_0}$ per quanto visto precedentemente si ha che $\xi = \sum_{i=1}^k a_i \xi^{(i)}$ e $\eta = \sum_{i=1}^k b_i \xi^{(i)}$ e quindi $\xi + \eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(u_{01} + (a_1 + b_1)t, ..., u_{0k} + (a_k + b_k)t)$ ovvero $\xi + \eta \in T\mathcal{S}_{x_0}$. Infine che i vettori $\xi^{(i)}$ siano linearmente indipendenti deriva immediatamente dalla definizione di inclusione (in particolare dal fatto che lo jacobiano $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0)$ ha rango massimo). ∎

Si noti che se $k = 1$, $T\mathcal{S}_{x_0}$ *non* è la retta ℓ tangente definita in **6.15** ma è la retta parallela a ℓ passante per l'origine.

Esercizio 6.30 (i) Si trovi una inclusione $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(U) = S^2 \cap \{x_3 > \varepsilon\} := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 = 1 \text{ e } x_3 > \varepsilon\}$ $(0 < \varepsilon < 1)$
(ii) Si determinino gli spazi tangenti a $\varphi(U)$ (φ come in (i) con $\varepsilon = \frac{1}{3}$) nei punti $x_0 = (0, 0, 1)$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Esercizio 6.31 (i) Se $\mathcal{S}$ è un elemento di $(n-1)$–superficie in $\mathbb{R}^n$ dato da $\{\phi = 0\} \cap B$ con $\phi \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R})$ e B sfera aperta in $\mathbb{R}^n$, si dimostri che

$$\nabla \phi(x) \perp T\mathcal{S}_x \tag{6.111}$$

per ogni $x \in \mathcal{S}$.
(ii) Si trovino i versori (cioè "i vettori di norma 1") normali a $\mathcal{S}$ in x.

Esercizio 6.32 (Versori normali in $\mathbb{R}^3$) Sia $\mathcal{S} = \varphi(U)$ un elemento di 2–superficie in $\mathbb{R}^3$. Dalle proprietà del prodotto vettoriale deriva che il vettore $n = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$ è ortogonale ai vettori tangenti $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$, e, poiché tali vettori formano una base per lo spazio tangente a $\mathcal{S}$ in $\varphi(u)$, segue che il vettore n è ortogonale all'intero spazio $T\mathcal{S}_{\varphi(u)}$. Il vettore unitario ("versore")

$$\nu := \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}}{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right|} \tag{6.112}$$

verrà chiamato **la normale "positiva"** a $\mathcal{S}$ in $x = \varphi(u)$ e verifica

$$|\nu| = 1 , \qquad \nu \perp T\mathcal{S}_{\varphi(u)} \qquad (\nu, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}) \in \mathrm{Or}\,(e^{(1)}, e^{(2)}, \varepsilon^{(3)}) . \tag{6.113}$$

La parola "positiva" si riferisce all'ultima proprietà in (6.113).

C 6.33 Una conseguenza immediata del lemma della partizione dell'unità è il seguente

Corollario 6.33 ("Lemma di Urysohn") *Siano $D \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ con D compatto e U aperto. Allora esiste una funzione $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ a valori in $[0, 1]$ con supporto contenuto in U tale che $f(x) = 1$ per ogni $x \in D$.*

Dimostrazione Per ogni $x \in D$, sia $B(x)$ una sfera centrata in x e la cui chiusura è contenuta in U. Allora $\{B(x) : x \in D\}$ è un ricoprimento di D e, se $\{f_j : 1 \leq j \leq N\}$ è una partizione dell'unità di D subordinata a tale ricoprimento, possiamo prendere $f := \sum_{j=1}^{N} f_j$. $\blacksquare$

C 6.34 (Calcolo del volume della sfera euclidea in $\mathbb{R}^n$) Denotiamo con Ω_n il volume della sfera euclidea in $\mathbb{R}^n$ ovvero $\Omega_n := m(B_1^n)$. Applicando la (6.41) a $f(x) := e^{-|x|^2}$ con $r = 0$ e R arbitrario e mandando R ad infinito, ricordando (4.91), si trova

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx = n\Omega_n \int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho^2}\, d\rho = \frac{n\Omega_n}{2} \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}\, dt := \frac{n\Omega_n}{2} \Gamma(\frac{n}{2}) \ ,$$

dove $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t} dt$ è la *"funzione Γ di Eulero"* (si veda **6.35**), da cui

$$\Omega_n = \frac{2\, \pi^{\frac{n}{2}}}{n\, \Gamma(n/2)} \ . \tag{6.114}$$

Esercizio 6.35 (La funzione Γ di Eulero) Sia $\Gamma(z) := \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t} dt$. Si dimostrino le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \ , \quad (\forall\ z) \ ; \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \ ; \\
&\Gamma(n+1) = n! \ , \quad (n \in \mathbb{N}) \ ; \qquad \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \ , \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \ .
\end{aligned}$$

Da queste relazioni e da (6.114) segue che il volume della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ è dato da

$$\Omega_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(n/2)!} \ , & \text{se } n \text{ è pari} \ , \\[2ex] \dfrac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n!!} \ , & \text{se } n \text{ è dispari} \ . \end{cases}$$

Esercizio 6.36 Siano

$$g : x \in A \subseteq \mathbb{R}^n \to g(x) \in \mathbb{R} \ , \quad f : y \in B \subseteq \mathbb{R}^m \to (f_1(y), ..., f_n(y)) \in A \ ,$$

funzioni C^1 sui rispettivi domini. Dimostrare che

$$d(g \circ f) = \sum_{i=1}^{n} \big(\frac{\partial g}{\partial x_i} \circ f\big)\ df_i \ . \tag{6.115}$$

Esercizio 6.37 (i) Si trovino tutti i vettori $\xi \in \mathbb{R}^2$ tali che $(dx_1 + dx_2)(\xi) = 0$.
(ii) Sia $\omega^1 = \omega_F^1$ una 1–forma in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e si fissi $x_0 \in A$. Si dimostri che $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \omega^1_{F,x_0}(\xi) = 0\}$ è uno spazio vettoriale. Qual è la dimensione di tale spazio vettoriale?
(iii) Sia $F(x,y) := (x,y)$. Si trovi una curva $\Gamma = \varphi((0,1))$ in $\mathbb{R}^2$ tale che $\omega^1_{F,\varphi}(\varphi') = 0$ per ogni $t \in (0,1)$.

Esercizio 6.38 Far vedere che $\omega = xdy + ydx$ è esatta in $\mathbb{R}^2$ e verificare direttamente che $\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_3} \omega$, dove Γ_1 è il segmento di estremi $(0,0)$ e $(1,1)$; Γ_2 è la poligonale di vertici (in ordine) $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$; Γ_3 è l'arco di circonferenza di raggio unitario, centro $(0,1)$, estremi $(0,0)$ e $(1,1)$ e lunghezza $\frac{\pi}{4}$ [e in tutti e tre e casi l'orientamento è quello corrispondente al verso che va da $(0,0)$ a $(1,1)$].

Esercizio 6.39 (i) Si dimostri che la forma ω^1 definita in (6.65) è chiusa su $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ e che vale (6.66).
(ii) Si dimostri che ω^1 è esatta su un qualunque dominio della forma $\mathbb{R}^2 \backslash P$ con P una qualunque semiretta chiusa con estremo nell'origine.

Esercizio 6.40 Si dimostri (6.58).

Esercizio 6.41 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio stellato che non contenga l'origine e sia f una funzione continua su $[0,\infty)$. Si dica se $\omega^1 := f(|x|)\sum_{i=1}^n x_i dx_i$ è esatta su A ed in caso affermativo se ne calcoli una primitiva.

Esercizio 6.42 * Sia $A := \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ e sia ω^1 una 1–forma chiusa su A. Dimostrare che se Γ è un cerchio centrato nell'origine e se $\int_\Gamma \omega^1 = 0$ allora ω^1 è esatta in A.

Esercizio 6.43 Sia T il triangolo in $\mathbb{R}^2$ con vertici in $(0,0)$, $(0,1)$ e $(2,0)$ e sia $\omega := \operatorname{senh}(x+y)dx + xdy$. Si calcoli

$$\int_{\partial T^+} \omega$$

sia direttamente che usando la formula di Green.

Esercizio 6.44 Si dimostri che una k–varietà regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$ con $k < n$ è un insieme di misura nulla.

Esercizio 6.45 Sia $\omega^1 = \dfrac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$ definita su $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$.
(i) Dire se ω^1 è esatta su A ed in caso affermativo, calcolare la primitiva $U(x,y)$ tale che $U(0,e) = U(0,-e) = 1$. (ii) Calcolare $\displaystyle\int_\Gamma \omega^1$ dove $\Gamma := \{(x,y) = e(\cos^{100} t, \operatorname{sen}^{100} t) : \ 0 \leq t \leq \pi/2\}$ orientata nel verso che va da $(e,0)$ a $(0,e)$.

6.46 Si dimostri l'affermazione fatta dopo (6.60).

6.47 Sia $\omega^1 = ydx + xdy$; sia $\Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ il segmento orientato che va da $(2,0)$ a $(1,1)$ e sia Γ_2 l'arco orientato della circonferenza unitaria di centro $(1,0)$ che va da $(2,0)$ a $(1,1)$. Si calcoli $\int_{\Gamma_i} \omega^1$. Si trovi poi una funzione f tale che $df = \omega^1$.
[Risposta: $f = xy$.]

6.48 Sia $A = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ e

$$\omega^1 = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \tag{6.116}$$

cosicchè $\omega^1 \in C^\infty(A)$. Sia Γ la circonferenza di raggio R centrata nell'origine orientata in senso antiorario e si calcoli $\int_\Gamma \omega^1$.
[Risposta: 2π.]

6.49 Si calcoli il flusso esterno di $F(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}^3$) attraverso la calotta sferica $\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1 \text{ e } x_3 > \frac{1}{2}\}$ dove l'orientamento è quello indotto da $\varphi(u) = (u, \sqrt{1-|u|^2})$, $u = (u_1, u_2)$.

6.50 Generalizzando l'esempio 5.50, si dimostri che, comunque si scelgano $r < R$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, esiste una funzione $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con supporto contenuto in $B_R(x_0)$ e che vale 1 su $B_r(x_0)$.

6.51 Siamo a_j, $j = 1, ..., N$ numeri complessi. Si dimostri (per induzione su N) che vale

$$a_1 + (1-a_1)a_2 + \cdots + (1-a_1)\cdots(1-a_{N-1})a_N = 1 - \prod_{j=1}^N (1-a_j) \ . \tag{6.117}$$

6.52 (**Integrali curvilinei e superficiali su varietà**) Analogamente a come si è fatto per definire l'integrale di una k–forma su di una k–varietà con bordo, è possibile definire gli integrali curvilinei e superficiali su, rispettivamente, 1 e 2–varietà. Se $F \in C(\mathcal{S}, \mathbb{R}^n)$ con $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ k–varietà con bordo $(k = 1, 2)$ e se poniamo $F_j := f_j F$ dove $\{f_j\}$ è una partizione dell'unità come sopra (e cioè subordinata ad un atlante di $\mathcal{S}$) definiamo

$$\int_{\mathcal{S}} F(s)ds := \sum_{j=1}^{N} \int_{\varphi(U^{i_j})} F_j(s)ds \ , \qquad (k=1)$$
$$\int_{\mathcal{S}} F(\sigma)d\sigma := \sum_{j=1}^{N} \int_{\varphi(U^{i_j})} F_j(\sigma)d\sigma \ , \qquad (k=2) \tag{6.118}$$

(si ricordi il punto (i) dell'Osservazione 6.13).

Esercizio 6.53 Sia $f := 0$ su $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$ e $f(x) := 1/n$ se $x = m/n$ con $0 \le m \le n \le 1$ (m ed n relativamente primi). (i) Dimostrare che l'insieme di discontinuità di f è $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. (ii) Dimostrare direttamente (senza usare il Teorema di Vitali–Lebesgue) che $f \in \mathcal{R}([0,1])$.

Esercizio 6.54 Sia $f \in S(E)$ e sia C il suo supporto. Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in S(E)$ con $\operatorname{supp}(g) \subseteq \mathring{C}$ tale che $\int_E |f - g| \le \varepsilon$.

Esercizio 6.55 Sia $B_r(x_0)$ la sfera (euclidea) aperta in $\mathbb{R}^n$ centrata in x_0 e di raggio r. Dimostrare che esiste $\bar{x}_0 \in \mathbb{Q}^n$ e $0 < \bar{r} \in \mathbb{Q}$ tali che il cubo aperto di centro $\bar{x}_0$ e lato $\bar{r}$ sia contenuto in $B_r(x_0)$ e contenga x_0.

T 6.56 (L'insieme ternario di Cantor) *L'insieme ternario di Cantor K è un sottoinsieme di* $[0,1]$ *con le seguenti proprietà: (a) K è chiuso, non ha punti isolati ed è totalmente sconnesso (ovvero non contiene nessun intervallo); (b) K ha la potenza del continuo (ovvero esiste un'applicazione 1–1 da K in $\mathbb{R}$); (c) la misura di Lebesgue di K è zero.*
Costruzione di K: (i) ad un qualunque intervallo chiuso (limitato e di lunghezza positiva) I associamo due intervalli chiusi I_1' e I_2' ottenuti rimuovendo da I l'intervallo aperto che ha lo stesso centro di I e lunghezza uguale ad un terzo di quella di I.
(ii) Definiamo ora intervalli I_j^k per $k \ge 0$ e $1 \le j \le 2^k$: $I_1^0 := [0,1]$ e per $k \ge 1$ gli I_j^k sono gli intervalli (ordinati) ottenuti dagli I_j^{k-1} come descritto nel punto (i). Per costruzione gli intervalli I_j^k sono, per ogni k fissato, chiusi, disgiunti e di lunghezza $1/3^k$ cosicché $\sum_{j=1}^{2^k} \operatorname{mis}(I_j^k) = (2/3)^k$.
(iii) Sia $I^k := \cup_{j=1}^{2^k} I_j^k$. Chiaramente $I^{k+1} \subseteq I^k$. Definiamo $K := \cap_{k\ge 0} I^k$.
Si dimostrino le proprietà (a), (b) e (c) sopra enunciate.

Esercizio 6.57 Dare un esempio di insieme $Q \subseteq [0,1]^2$ di misura nulla (in $\mathbb{R}^2$) tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, Q_x e Q^y *non* sono di misura nulla in $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.58 (tratto da M. Reed, B. Simon *Functional Analysis*) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita: $f = 1$ su $\{x > 0, y > 0, 0 \le x - y \le 1\}$, $f = -1$ su $\{x > 0, y > 0, 0 < y - x < 1\}$ e $f = 0$ altrimenti. Si calcolino gli integrali iterati di f e si spieghi il risultato.

C 6.59 Un numero $\omega \in \mathbb{R}$ si dice **diofanteo** se esistono $\gamma > 0$ e $\tau \ge 1$ tali che

$$|\omega q - p| \ge \frac{\gamma}{|q|^\tau} \ , \quad \forall\, p, q \in \mathbb{Z} \quad \text{con} \quad q \ne 0 \ . \tag{6.119}$$

Si noti che numeri diofantei sono irrazionali e che la (6.119) dà una stima sulla "velocità" con cui è possibile approssimare un numero diofanteo ω con dei numeri razionali (si divida la (6.119) per q).

Sia $\mathcal{D}_{\gamma,\tau}$ l'insieme dei numeri diofantei per cui vale (6.119) e sia $\mathcal{D}$ l'insieme di tutti numeri diofantei con $\tau > 1$ (ovvero $\mathcal{D} := \bigcup_{\gamma>0} \bigcup_{\tau>1} \mathcal{D}_{\gamma,\tau}$).

$\mathcal{D}_{\gamma,\tau}$ è misurabile: infatti

$$\mathcal{D}_{\gamma,\tau} = \bigcap_{p\in\mathbb{Z}} \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Z}\\ q\neq 0}} \Big\{ x\in\mathbb{R}:\ |xq-p| \geq \frac{\gamma}{|q|^\tau} \Big\} \ .$$

$\mathcal{D}$ è misurabile: $\mathcal{D}$ coincide con l'unione di $\mathcal{D}_{\gamma,\tau}$ fatta su tutti i γ e τ razionali con $\gamma > 0$ e $\tau > 1$.

$\mathcal{D}^c$ coincide con l'intersezione su tutti i $\gamma > 0$ e $\tau > 1$ razionali di $\mathcal{D}^c_{\gamma,\tau}$.

Se $\gamma \leq 1$ allora $(\mathcal{D}^c_{\gamma,\tau} \cap [-R,R]) \subseteq \cup_{p,q\neq 0} I_{p,q}$ dove $I_{p,q}$ è l'intervallo aperto di centro $p/q \in [-R-1, R+1]$ di lunghezza $2\gamma/|q|^{\tau+1}$. Dunque

$$\begin{aligned} m(\mathcal{D}^c_{\gamma,\tau} \cap [-R,R]) &\leq m\Big(\bigcup_{p,q\neq 0} I_{p,q}\Big) \leq \sum_{q\neq 0} \sum_{|p|\leq (R+1)|q|} \frac{2\gamma}{|q|^{\tau+1}} \\ &\leq 2(R+2)\gamma \sum_{q\neq 0} \frac{1}{|q|^\tau} := \gamma\ c(\tau, R) \ . \end{aligned}$$

Da questo segue che $\mathcal{D}^c$ *è un insieme di misura nulla.*

Esercizio 6.60 Per ogni $k \in \mathbb{Z}_+$, sia $a_k := \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}$. Se $\{x\}$ denota la funzione "parte frazionaria di x" [ovvero $\{x\}$ è l'unico numero in $[0,1)$ tale che $x = n + \{x\}$ con $n \in \mathbb{Z}$], sia $A_k := \{x = \{y\} : a_k \leq y \leq a_{k+1}\}$. Dimostrare che A_k è un insieme elementare e che

$$\int_0^1 \chi_{A_k} := m(A_k) = \frac{1}{k+1} \ , \quad \limsup_{k\to\infty} \chi_{A_k}(x) = 1 \ , \qquad \forall\ x \in [0,1] \ .$$

Esercizio 6.61 Sia A_k come nell'esercizio precedente e $f_k := \chi_{A_k}$. Trovare (esplicitamente) una sottosuccessione f_{k_j} tale che $f_{k_j} \to 0$ q.o. in $[0,1]$.

Esercizio 6.62 Trovare una successione di funzioni a scalini e non negative in $[0,1]$ tale che $\int_0^1 f_k = 1$ per ogni k e $\lim f_k(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$.

Capitolo 7

Introduzioni agli spazi funzionali

Nel precedente capitolo abbiamo visto come sia possibile estendere molti dei risultati validi per funzioni da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funzioni da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tramite l'introduzione del concetto di norma euclidea (che estende il concetto di modulo per numeri reali). Generalizzando ulteriormente il concetto di norma è possibile studiare sistematicamente spazi vettoriali più complicati quali, ad esempio, gli spazi di funzioni. La teoria che tratta lo studio dell'analisi matematica su tali spazi va sotto il nome di "analisi funzionale". In questo capitolo discuteremo brevissimamente alcuni elementi di questa teoria.

1 Esempi

Sia X uno spazio vettoriale[1]. Come già menzionato nel capitolo § 1, una funzione, $\|\cdot\|$, che ad ogni $x \in X$ associ un numero non negativo $\|x\|$, e tale che soddisfi le proprietà:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 \ , \quad \text{(non degenerazione)} \\ &\text{(ii)} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\| \ , \text{per ogni scalare } \lambda \ , \quad \text{(omogeneità)} \\ &\text{(iii)} \quad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \ , \forall \ x, y \in X \ , \quad \text{(disuguaglianza triangolare)}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

si chiama **norma** su X ed in tal caso X prende il nome di **spazio normato** [spesso, con leggero abuso di linguaggio, chiameremo spazio normato la *coppia* $(X, \|\cdot\|)$]; se $\|\cdot\|$ verifica solo (ii) e (iii) ma non necessariamente (i) prende il nome di **seminorma**. Come abbiamo già notato nel caso di $\mathbb{R}^n$ la disuguaglianza triangolare in (7.1) è equivalente a

$$\|x - y\| \ge \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \ , \qquad \forall \ x, y \in X \ . \tag{7.2}$$

Esempi di spazi normati[2]

(1) $\mathbb{R}^n$ oppure $\mathbb{C}^n$ con la norma euclidea, $|\cdot|$ [definita in (1.2)], o con la norma 1, $|\cdot|$, o con la norma ∞, $|\cdot|_\infty$ [definite in (1.23)]. Come già detto, la norma euclidea $|\cdot|$ a volte si denota

[1] Su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$, cioè con scalari reali o complessi.

[2] Nella maggior parte degli esempi che seguono la verifica della omogeneità e della non degenerazione delle varie norme introdotte sarà ovvia mentre la disuguaglianza triangolare sarà basata sulle disuguaglianze discusse nel Prologo. È comunque necessario che la lettrice o il lettore verifichino con cura le proprietà (i), (ii) e (iii) per ciascuna delle norme introdotte.

$|\cdot|_2$. Più in generale, per ogni $1 \le p < \infty$, si definisce la "*norma p*"

$$|x|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ ; \tag{7.3}$$

(la validità della disuguaglianza triangolare per $\|\cdot\|_p$ è dimostrata in **7.23**).

(2) $\mathrm{Mat}(n \times m)$, lo spazio vettoriale delle matrici con elementi di matrice reali (o complessi) con n righe ed m colonne, con una delle seguenti norme: se $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ e A_{ij}, per $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le m$ denotano gli elementi della matrice A,

$$\|A\| = \sup_{\{x:|x|=1\}} |Ax| \ , \qquad \|A\|_{p,q} = \sup_{\{x:|x|_p=1\}} |Ax|_q \ , \qquad \|A\|_\infty = \max_{i,j} |A_{ij}| \ , \tag{7.4}$$

dove $x \in \mathbb{R}^m$ (o $x \in \mathbb{C}^m$), $1 \le p, q \le \infty$; si noti che $\|A\| = \|A\|_{2,2}$. Si osservi che se x è un vettore non nullo, il vettore $\dfrac{x}{|x|_p}$ ha norma uno, quindi la norma $\|A\|_{p,q}$ è anche uguale a

$$\|A\|_{p,q} = \sup_{x \ne 0} \frac{|Ax|_q}{|x|_p} \ . \tag{7.5}$$

Da quest'ultima osservazione segue immediatamente che

$$|Ax|_q \le \|A\|_{p,q}\ |x|_p \ , \qquad \forall\ x \in X \tag{7.6}$$

e che $\|A\|_{p,q}$ è la costante migliore per cui tale disugualianza vale. Le norme $\|\cdot\|_{p,q}$ in (7.4) vengono, a volte, chiamate "norme operatoriali".

(3) $\mathcal{P}_n$, lo spazio vettoriale dei polinomi (reali o complessi) di grado al più n con la seguente norma: se $u \in \mathcal{P}_n$ e $u := \sum_{k=0}^n a_k x^k$,

$$\|u\| := \sum_{k=0}^n |a_k| \ . \tag{7.7}$$

(4) *Spazi di successioni*: Se x è una successione a valori reali (o complessi) $x : i \in \mathbb{N} \to x_i \in \mathbb{R}$ (o $\in \mathbb{C}$) definiamo

$$\|x\|_1 := \sum_{i=0}^\infty |x_i| \ , \qquad \|x\|_2 := \Big(\sum_{i=0}^\infty |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \ , \qquad \|x\|_\infty := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \ . \tag{7.8}$$

Allora $\ell^p :=$ {successioni x tali che $\|x\|_p < \infty$}, $(p = 1, 2, \infty)$, è uno spazio normato.

(5) Lo spazio $\mathcal{R}(x_0, r)$ delle funzioni reali analitiche della forma $u(x) := \sum_{k=0}^\infty a_k (x - x_0)^k$ tali che $\sum_{k \ge 0} |a_k| r^k < \infty$ dotato della norma[3]

$$\|u\|_r := \sum_{k=0}^\infty |a_k| r^k \ ; \tag{7.9}$$

Lo spazio $\mathcal{R}_{\,\mathrm{per}}(\xi)$ delle funzioni $u \in C^\infty_{\mathrm{per}}$ tali che $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n| e^{|n|\xi} < \infty$ dotato della norma

$$\|u\|_\xi := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n| e^{|n|\xi} \ . \tag{7.10}$$

[3]Si osservi che, poiché $|a_k| r^k \to 0$, definitivamente si ha che $|a_k| r^k \le 1$ e quindi $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} \le r^{-1}$ ovvero il raggio di convergenza di u è maggiore od uguale a r; si veda anche **7.2**.

(6) $C(I)$, lo spazio delle funzioni continue $u : t \in I \to u(t) \in \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$, intervallo chiuso, con la norma "uniforme"

$$\|u\|_{\infty,I} = \sup_{t\in I} |u(t)| \; ; \tag{7.11}$$

qualora non vi sia ambiguità, tale norma si denota semplicemente con $\|\cdot\|_\infty$.

(7) Lo spazio vettoriale, $C^1(I)$, delle funzioni continue in un intervallo chiuso I con derivata continua in[4] I con la norma

$$\|u\|_{C^1(I)} = \|u\|_{\infty,I} + \|u'\|_{\infty,I} \; . \tag{7.12}$$

(8)$^\bullet$ $C(I)$ con la "norma L^1" o la "norma L^2":

$$\|u\|_{L^1} = \int_I |u(t)| \; dt \; , \qquad \|u\|_{L^2} = \Big(\int_I |u(t)|^2 \; dt\Big)^{\frac{1}{2}} \; . \tag{7.13}$$

(9) $C(E, \mathbb{R}^m)$, lo spazio delle funzioni continue su un compatto E di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^m$, con la "norma uniforme"

$$\|u\|_{\infty,E} = \sup_{x\in E} \|u(x)\| \; , \tag{7.14}$$

qui $\|\cdot\|$ è una norma prefissata in $\mathbb{R}^m$ (tipicamente sarà $\|\cdot\| = |\cdot| :=$ norma euclidea).

Naturalmente, per il teorema di Weierstrass possiamo sostituire in (7.11),(7.12) e (7.14) l'estremo superiore con il massimo.

Osservazione 7.1 (i) Il simbolo "$^\bullet$" nell'esempio (8) sta a segnalare una differenza sostanziale fra questo esempio e gli altri (si veda la Proposizione 7.4 più sotto).

(ii) Spesso il calcolo esatto di una norma non è immediato e dal punto di vista "pratico" alcune norme sono più convenienti di altre. Ad esempio, sulle matrici, tra le "norme operatoriali", è assai più facile calcolare la norma $\|\cdot\|_{\infty,\infty}$, si veda (4.3), che non, ad esempio, la norma $\|\cdot\|_{2,2}$.

Ricordiamo alcune definizioni fondamentali date precedentemente:

Definizione 7.2 *Siano u e u_n elementi di uno spazio normato X dotato di norma $\|\cdot\|$. Si dice che la* **successione** $\{u_n\}$ **tende a** u*, e si scrive* $\lim_{n\to\infty} u_n = u$*, se tende a zero la successione di numeri non negativi* $\|u - u_n\|$*, cioè se* $\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\| = 0$*. Una successione* $\{u_n\}$ *di elementi di uno spazio normato X, si chiama* **successione di Cauchy** *(o "fondamentale") se* $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N$ *tale che* $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ *per ogni* $n, m \geq N$*.*

Ricordiamo che uno spazio normato completo si chiama spazio di Banach.
In alcuni degli esempi dati, sono state introdotte più di una norma; è dunque naturale chiedersi cosa comporti l'uso di una norma rispetto ad un'altra.

Sia X uno spazio vettoriale e consideriamo, su di esso, due norme che indicheremo con $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$. Dalla Definizione 7.2 è chiaro che se esistono due costanti c_1 e c_2 positive tali che[5]

$$c_1\|u\|_a \leq \|u\|_b \leq c_2\|u\|_a \; , \qquad \forall\, u \in X \; , \tag{7.15}$$

una successione $\{u_n\}$ converge ad u nella norma $\|\cdot\|_a$ se e solo se converge ad u nella norma $\|\cdot\|_b$.

[4] In particolare, se $u \in C^1([a, b])$, esistono i limiti (rispettivamente, da destra e da sinistra) dei rapporti incrementali in a e b di u e tali limiti sono uguali (rispettivamente) a $u'(a+)$ ed a $u'(b-)$.

[5] Ricordiamo che due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ che soddisfino (7.15) si dicono equivalenti.

Osservazione 7.3 (i) Gli spazi vettoriali degli esempi (1), (2) e (3) sono *finito dimensionali* (ovvero hanno una base finita) al contrario degli spazi vettoriali (4)÷(9). In realtà *in uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$) finito dimensionale tutte le norme sono equivalenti.* Tale affermazione deriva dal fatto che due spazi vettoriali di dimensione uguale finita sono isomorfi e dall'equivalenza delle norme in $\mathbb{R}^n$ (Proposizione 1.21). La situazione è diversa in spazi vettoriali infinito dimensionali:

(iv) ℓ^1 è un sottoinsieme *proprio* di ℓ^2 che a sua volta è un sottoinsieme *proprio* di ℓ^∞. Infatti, se $x \in \ell^1$, $x_i \to 0$ quando $i \to \infty$ e dunque $|x_i|$, a partire da un certo i_0, è più grande di $|x_i|^2$ e dunque $x \in \ell^2$; ragionando analogamente si ha che se $x \in \ell^2$ allora $x \in \ell^\infty$. D'altra parte la successione costante $(1, 1, ...) \in \ell^\infty$ ma non appartiene a ℓ^2, mentre x con $x_i = (i+1)^{-1}$ appartiene a ℓ^2 ma non a ℓ^1. Si noti che $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono delle norme su ℓ^1 ma $\|\cdot\|_1$ non è una norma su ℓ^2 (vi sono elementi $x \in \ell^2$ tali che $\|x\|_1 = \infty$); analogamente $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono delle norme su ℓ^2 ma $\|\cdot\|_2$ non è una norma su ℓ_∞. Osserviamo anche che su ℓ^1 le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ *non sono equivalenti tra loro*[6] così come non lo sono $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ su ℓ^2.

(v) Lo stesso fenomeno accade in $C(I)$: *la norma* $\|\cdot\|_{\infty,I}$, (7.11), *non è equivalente alla norma* $\|\cdot\|_{L^1}$, (7.13), *(sullo spazio* $C(I)$*).* Per verificare tale asserzione, facciamo vedere che esiste una successione $u_n \in C([-1,1])$ che non è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty,[-1,1]}$ mentre lo è rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^1}$ (e quindi le norme $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_{L^1}$ non possono essere equivalenti). Consideriamo la successione di funzioni continue sull'intervallo $[-1,1]$ così definita: $u_0 := 0$ e per $n \geq 1$ sia

$$u(x) := \begin{cases} 0\ , & \text{se } -1 \leq x \leq 0\ , \\ nx\ , & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 1\ , & \text{se } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1\ . \end{cases}$$

Osserviamo che u_n converge puntualmente a

$$\chi(x) := \begin{cases} 0\ , & \text{se } -1 \leq x \leq 0\ , \\ 1\ , & \text{se } 0 < x \leq 1\ . \end{cases} \tag{7.16}$$

Inoltre, $u_n \geq 0$, e

$$\Big\| u_n - \chi \Big\|_{L^1} = \frac{1}{2n} \to 0\ , \qquad \text{per} \quad n \to \infty\ ; \tag{7.17}$$

quindi u_n è una successione di Cauchy (rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^1}$ essendo

$$\|u_n - u_m\|_{L^1} \leq \|u_n - \chi\|_{L^1} + \|u_m - \chi\|_{L^1} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m}\ . \tag{7.18}$$

D'altra parte

$$\|u_n - u_{n^2}\|_{\infty,[-1,1]} \geq |u_n(\frac{1}{n^2}) - u_{n^2}(\frac{1}{n^2})| = 1 - \frac{1}{n}\ ,$$

quindi $\{u_n\}$ *non* è una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$.

(vi) *Una successione di funzioni converge uniformemente su $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se e solo se è una successione di Cauchy rispetto alla norma* $\|\cdot\|_{\infty,E}$.

[6] Ad esempio, se $x_i^{(k)} = (1+i)^{-1-1/k}$, allora $\|x^{(k)}\|_\infty = 1$ ma $\sup_k \|x^{(k)}\|_1 = \infty$; si veda anche **7.29**.

Passiamo a studiare la completezza dei vari esempi considerati. L'esempio fondamentale di spazio normato non completo è l'insieme, $\mathbb{Q}$, dei numeri razionali[7] (prendendo come norma il modulo): la successione crescente di numeri razionali $x_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$ è di Cauchy, ma il suo limite, il numero di Nepero e, non è un numero razionale. A proposito degli esempi (1)÷(9) si ha

Proposizione 7.4 *Tutti gli esempi in* (1)÷(9) *sono spazi di Banach con l'eccezione degli esempi in* (8) *che non lo sono.*

Dimostrazione (1): Il risultato è noto dal § 1; ne riportiamo comunque la dimostrazione (nel caso di $\mathbb{R}^n$). Per l'equivalenza delle norme in $\mathbb{R}^n$, basta dimostrare l'affermazione per $\|\cdot\|_\infty$. Se $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$ sono vettori di $\mathbb{R}^n$ che formano una successione di Cauchy, segue immediatamente che sono di Cauchy in $\mathbb{R}$ le n successioni $\{x_i^{(k)}\}$, per la completezza di $\mathbb{R}$ segue che esistono n numeri reali, x_i, tali che $x_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}$ ed è facile verificare che $\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|_\infty = 0$, che è quanto volevasi dimostrare.

(2): Si può procedere esattamente come nella dimostrazione precedente: usando la norma $\|\cdot\|_\infty$ e facendo vedere che se $A_k \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ ha elementi di matrice $a_{ij}^{(k)}$ e $\{A_k\}$ è una successione di Cauchy, allora lo sono le nm successioni $\{a_{ij}^{(k)}\}$, *etc.*

(3): L'asserto è immediato se si nota che ad ogni $u = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathcal{P}_n$ possiamo associare il vettore $v := (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e che $|v|_1 = \|u\|$.

(4): Consideriamo il caso di ℓ^1 (il caso di ℓ^2 si tratta in maniera del tutto analoga ed il caso di ℓ^∞ è più semplice). Sia $x^{(k)} \in \ell^1$ una successione di Cauchy. Questo significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste k_0 tale che se $h, k \geq k_0$ allora

$$\|x^{(h)} - x^{(k)}\|_1 := \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^{(k)} - x_i^{(h)}| \leq \varepsilon \ . \tag{7.19}$$

Quindi, per ogni $i \geq 0$, ognuna delle successioni numeriche $\{x_i^{(k)}\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e dunque esiste $x_i \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$. D'altra parte, da (7.19) segue che, per ogni $N \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{N} |x_i^{(k)} - x_i^{(h)}| \leq \varepsilon \ , \tag{7.20}$$

e prendendo il limite per h che tende ad ∞ in tale relazione si ha (per $k \geq k_0$)

$$\sum_{i=0}^{N} |x_i^{(k)} - x_i| \leq \varepsilon \ . \tag{7.21}$$

Prendendo infine l'estremo superiore per $N \geq 0$ si ottiene che

$$\|x^{(k)} - x\|_1 \leq \varepsilon \ , \qquad \forall\ k \geq k_0 \ . \tag{7.22}$$

Quindi, per ogni intero $N > 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N} |x_i| &= \sum_{i=0}^{N} |x_i^{(k_0)} + (x_i - x_i^{(k_0)})| \leq \sum_{i=0}^{N} |x_i^{(k_0)}| + \sum_{i=0}^{N} |x_i - x_i^{(k_0)}| \\ &\leq \|x^{(k_0)}\|_1 + \|x - x^{(k_0)}\|_1 \leq \|x^{(k_0)}\|_1 + \varepsilon < \infty \ .\end{aligned}$$

[7] $\mathbb{Q}$ è uno spazio vettoriale con scalari in $\mathbb{Q}$.

Dunque $x \in \ell^1$ che, insieme a (7.22) implica l'asserto.

(5): Se $u^{(j)} := \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)}(x - x_0)^k \in \mathcal{R}(x_0, r)$ è una successione di Cauchy, allora la successione $y^{(j)}$ con $y_i^{(j)} := |a_i^{(j)}| r^i$ è una successione di Cauchy in ℓ^1 e l'asserto deriva dal punto precedente.

(6): L'affermazione deriva immediatamente dal punto (vi) dell'Osservazione 7.3 e dalla Proposizione 5.23.

(7): Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy in $C^1(I)$ (rispetto alla norma (7.12)). Per il risultato precedente esistono due funzioni continue, u, v, in I tali che $\|u_n - u\|_\infty$ e $\|u_n' - v\|_\infty$ tendono a 0 quando n tende ad ∞. Dobbiamo far vedere che u è derivabile e che $u' = v$ in I. Siano t e t_0 due punti in I, allora, per il teorema fondamentale del calcolo, $u_n(t) - u_n(t_0) = \int_{t_0}^t u_n'$; prendendo il limite per n che tende ad infinito in tale relazione e passando il segno di limite dentro al segno di integrale (lo possiamo fare per la Proposizione 5.26), otteniamo $u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t v$. Quindi, ancora per il teorema fondamentale del calcolo, si ha che u è derivabile in t e che $u'(t) = v(t)$, che è quanto si voleva dimostrare[8].

(9): la dimostrazione è una ripetizione della dimostrazione di (6) e viene lasciata per esercizio.

(8)$^\bullet$: Dimostriamo infine che $C(I)$, con I compatto di $\mathbb{R}$, *non è uno spazio di Banach rispetto alla norma* $\|\cdot\|_{L^1}$ (la dimostrazione nel caso della norma $\|\cdot\|_{L^2}$ è del tutto analoga). Sia u_n la successione definita nel punto (v) dell'Osservazione 7.3 che abbiamo visto essere una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^1}$. Assumiamo per assurdo che esista $u \in C([-1,1])$ tale che $u_n \to u$ in norma $\|\cdot\|_{L^1}$. Siano $I_1 = (-1, 0)$ e $I_2 = (0, 1)$. Poiché stiamo assumendo che $u_n \to u$ in norma $\|\cdot\|_{L^1}$, da (7.16), (7.17) segue che

$$\|u - \chi\|_{L^1} \le \|u - u_n\|_{L^1} + \|u_n - \chi\|_{L^1} \to 0 \ ,$$

cioè

$$\int_{-1}^0 |u| \ dx + \int_0^1 |1 - u| \ dx = 0 \ ,$$

e quindi[9] $u = 0$ in $-1 \le x \le 0$ e $u = 1$ in $0 \le x \le 1$ contraddicendo l'assunzione che u sia continua in $x = 0$. ∎

2 Serie di potenze di matrici

Il concetto di norma permette di estendere il "calcolo funzionale" ad insiemi più complicati di $\mathbb{R}^n$: in questo paragrafo vediamo come sia possibile estendere il concetto di funzione analitica di una variabile al concetto di *funzioni analitiche di matrici*.

Se $\|\cdot\|$ denota la "norma operatoriale" (7.5) su spazi di matrici, allora

$$\|I_n\| = 1 \ ; \qquad \|AB\| \le \|A\|\|B\| \ , \forall \ A \in \mathrm{Mat}(n \times m) \ , \forall \ B \in \mathrm{Mat}(m \times p) \ , \tag{7.23}$$

(il fatto che la norma operatoriale della matrice identità sia 1 deriva immediatamente dalle definizioni; se $x \in \mathbb{R}^p$ e $|x| = 1$, da (7.6) segue che $|(AB)x| = |A(Bx)| \le \|A\||Bx| \le \|A\|\|B\||x| = \|A\|\|B\|$).

[8] Si noti che l'argomento dato funziona anche se t è uno degli estremi dell'intervallo.

[9] Essendo u e $1 - u$ continue su $[-1, 1]$.

In particolare, se $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, iterando la (7.23), si ottiene[10]

$$\|A^k\| \le \|A\|^k \ , \qquad \forall\ k \ge 0 \ . \tag{7.24}$$

Sia ora X lo spazio di Banach delle matrici $\mathrm{Mat}(n \times n)$ con la norma (7.5) e sia $f(x) = \sum_{k\ge 0} a_k x^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ con $\|A\| < R$ e si consideri la successione di matrici

$$A^{(N)} := \sum_{k=0}^{N} a_k A^k \ .$$

La successione $A^{(N)}$ è di Cauchy: se $M > N$, da (7.24), segue che

$$\begin{aligned} \|A^{(M)} - A^{(N)}\| &= \|\sum_{k=N+1}^{M} a_k A^k\| \le \sum_{k=N+1}^{M} |a_k|\ \|A\|^k \\ &\le \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|\ \|A\|^k \to 0 \ , \quad (\text{per } N \to \infty). \end{aligned}$$

Quindi la serie $\sum_{k\ge 0} a_k A^k$ converge (ovvero la successione $A^{(N)}$ converge) ad una unica matrice che verrà denotata *simbolicamente* $f(A)$.

Un esempio è dato dall'**esponenziale di una matrice**: la funzione $e^x = \sum_{k\ge 0} \frac{x^k}{k!}$ è una serie di potenze con raggio di convergenza ∞ e dunque, *per ogni matrice* A, la serie $\sum_{k\ge 0} \frac{A^k}{k!}$ converge in X ed il suo limite definisce una matrice chiamata esponenziale di A:

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \ . \tag{7.25}$$

Estendiamo alcune proprietà dell'esponenziale al caso matriciale. Se A, B sono due matrici in $\mathrm{Mat}(n \times n)$, si definisce il **commutatore di** A e B la matrice $[A, B] \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ definita da

$$[A, B] := AB - BA \ . \tag{7.26}$$

Si dice che *due matrici quadrate commutano* se il loro commutatore è nullo. Osserviamo che *per due matrici che commutino vale la formula del binomio di Newton* cioè:

$$[A, B] = 0 \quad \Longrightarrow \quad (A + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \ . \tag{7.27}$$

Ad esempio $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ ma poiché $AB = BA$ (essendo $[A, B] = 0$) si ottiene la formula nota del quadrato di un binomio $A^2 + 2AB + B^2$. Naturalmente se A e B non commutano la formula di Newton è, in generale, falsa: ad esempio

$$\begin{aligned} &A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad [A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \\ &A^2 = B^2 = 0 \ , \quad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ne (A + B)^2 = I \ . \end{aligned} \tag{7.28}$$

[10]Come per i numeri A^0 è uguale, per definizione, a I_n per ogni matrice quadrata A.

Il fatto che per due matrici che commutano valga la formula del binomio di Newton permette di adattare in maniera ovvia la dimostrazione di (A.16) e di ottenere il seguente "*teorema di addizione per esponenziali di matrici*":

$$[A, B] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{A+B} = e^A\, e^B = e^B e^A\ . \tag{7.29}$$

In particolare tale relazione implica che: *se A e B commutano allora commutano anche le matrici e^A e e^B*. Si noti anche che, poiché A e $-A$ commutano, si ha che

$$e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^0 = I\ ,$$

ovvero *la matrice* $\exp(A)$ *è sempre invertibile e la sua matrice inversa* è $\exp(-A)$.

Calcoliamo ora la *derivata* di e^{At} dove A è una matrice quadrata assegnata e t è una variabile reale[11]. Consideriamo dunque il rapporto incrementale in $t_0 \in \mathbb{R}$: poiché e^{At} e e^{As} commutano per ogni t ed s in $\mathbb{R}$, si ha, per ogni numero $h \neq 0$,

$$\frac{e^{A(t_0+h)} - e^{At_0}}{h} = e^{At_0}\ \frac{e^{Ah} - I}{h} = \frac{e^{Ah} - I}{h}\ e^{At_0}\ . \tag{7.30}$$

Inoltre[12]

$$\frac{e^{Ah} - I}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(Ah)^j}{h\ j!} := A + hB(h)\ ,$$

ove $B(h) := \sum_{j=0}^{\infty} h^j\ \frac{A^{j+2}}{(j+2)!}$. Per $|h| \le 1$ si ha $\|B(h)\| \le \sum_{j=0}^{\infty} \|A\|^{j+2}/(j+2)! < \infty$ che è un numero indipendente da h; quindi $h\|B(h)\| \to 0$ per $h \to 0$ e questo è equivalente a dire che $\lim_{h\to 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} = A$, dunque, da (7.30) segue che

$$\left(e^{At}\right)'\Big|_{t=t_0} := \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t_0+h)} - e^{At_0}}{h} = Ae^{At_0} = e^{At_0} A\ . \tag{7.31}$$

Osservazione 7.5 (Equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti) Dalla (7.31) segue che, per ogni $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha[13]

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{At} x\Big) = \Big(\frac{d}{dt} e^{At}\Big) x = Ae^{At} x\ , \tag{7.32}$$

---

[11] In generale, se X e Y sono spazi normati dotati di norme, rispettivamente, $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, si possono considerare funzioni $f : x \in E \subseteq X \to f(x) \in Y$ ovvero funzioni con variabile in X e a valori nello spazio normato Y. Le varie nozioni di topologia, continuità, limiti etc. sono già state date nei Capitoli 1 e 2 nel contesto più particolare dello spazio normato $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo comunque che: f è **continua** in $x_0 \in E$ se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che $\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$ per ogni $x \in E$ con $\|x - x_0\|_X < \delta$; $f(x)$ **tende** a y_0 per x che tende a x_0, e si denota $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$, se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che $\|f(x) - y_0\|_Y < \varepsilon$ per ogni $x \in E$ con $0 < \|x - x_0\|_X < \delta$. Se lo spazio "di partenza" X è $\mathbb{R}$ (e Y ha $\mathbb{R}$ come spazio degli scalari) anche la nozione di derivata di $f(t)$ si dà nel solito modo: ovvero $f'(t_0)$ è la **derivata** di f in t_0 se esiste il limite del rapporto incrementale (che è un elemento dello spazio normato Y) $\Big(f(t) - f(t_0)\Big)/(t - t_0)$ per t che tende a t_0. La nozione di derivata si estende al caso generale di funzioni tra spazi normati generalizzando la nozione di differenziale introdotta nel capitolo § 2: f è **differenziabile** in $x_0 \in E$, con E aperto di X, se esiste un'applicazione lineare e continua $df : X \to Y$ tale che per ogni $h \in X$ con $\|h\|$ sufficientemente piccolo, si ha

$$\lim_{h\to 0} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - df(h)\|_Y / \|h\|_X = 0\ .$$

[12] Si osservi che se $A^{(k)} \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ è una successione di matrici convergente alla matrice A (ovvero $\|A^{(k)} - A\| \to 0$) allora per ogni scalare a si ha che $aA^{(k)} \to aA$: infatti $\|aA^{(k)} - aA\| = |a|\ \|A^{(k)} - A\|$.

[13] Si osservi che se $t \in I \subseteq \mathbb{R} \to B(t) \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ tende, per $t \to t_0$, a B_0 (ovvero $\|B(t) - B_0\| \to 0$ per $t \to t_0$) allora per ogni $x \in \mathbb{R}^m$, $|B(t)x - B_0 x| \le \|B(t) - B_0\||x| \to 0$ per $t \to t_0$ ovvero $B(t)x \to B_0 x$ in $\mathbb{R}^m$.

e quindi la funzione vettoriale $t \in \mathbb{R} \to u(t) := e^{At}x \in \mathbb{R}^n$ risolve il seguente *sistema di equazioni differenziali ordinarie in $\mathbb{R}^n$ a coefficienti costanti con dato iniziale assegnato*:

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) \ , \qquad u(0) = x \ . \tag{7.33}$$

Più in generale da (7.32) segue che, per ogni t_0, $t \in \mathbb{R} \to u(t) := e^{A(t-t_0)}x \in \mathbb{R}^n$ è soluzione di

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) \ , \qquad u(t_0) = x \ . \tag{7.34}$$

Per maggiori informazione sulle equazioni differenziali si veda § 8.

Un altro esempio notevole di funzione di matrice si ottiene considerando la serie geometrica $f(x) = \sum_{k\geq 0} x^k$ che ha raggio di convergenza 1 e che, per $|x| < 1$, converge a $(1-x)^{-1}$. Se allora $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ è tale che $\|A\| < 1$, la serie $\sum_{k\geq 0} A^k$ converge alla matrice denotata simbolicamente $(1-A)^{-1}$ ("simbolicamente" perché non ha senso, se $n > 1$, addizionare un numero con una matrice). In effetti però si ha il seguente risultato: la matrice $(1-A)^{-1}$ (definita per $\|A\| < 1$) coincide con l'inversa di $(I - A)$ ovvero:

$$(1-A)^{-1} = (I-A)^{-1}$$

Infatti, poiché $\|A\| < 1$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k \to 0$ e dunque[14]

$$\begin{aligned}(1-A)^{-1}(I-A) \quad &:= \big(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^N A^k\big)(I-A) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^N \big(A^k(I-A)\big) \\ &= \lim_{N\to\infty} I - A^{N+1} = I \ .\end{aligned}$$

Osservazione 7.6 Da quanto detto segue che : *se $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ è una matrice con norma (operatoriale) $\|A\| < 1$ allora la matrice $B := I + A$ è invertibile e la sua inversa è data dalla serie*

$$B^{-1} := (I+A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A^k \ . \tag{7.35}$$

3 *Esercizi e complementi*

Esercizio 7.1 (i) Si trovino delle basi per gli spazi vettoriali (1)÷(3).
(ii) Si dimostri che gli spazi vettoriali in (4)÷(9) non sono finito dimensionali.

Esercizio 7.2 Sia $\|\cdot\|_r$ come in (7.9). (i) Dimostrare che se una serie di potenze $u = \sum_{k\geq 0} a_k(x-x_0)^k$ ha raggio di convergenza $R > r > 0$ allora $\|u\|_r < \infty$.
(ii) Trovare due serie di potenze u e v con raggio di convergenza r ma con $\|u\|_r < \infty$ e $\|v\|_r = \infty$.

[14] Si noti che se A e B sono due matrici quadrate e $AB = I$ allora $A = B^{-1}$: infatti da $AB = I$ segue che $(\det A)(\det B) = 1$ e quindi sia A che B sono invertibili e moltiplicando a destra ambo i membri della relazione $AB = I$ si ottiene $A = B^{-1}$ (e, invertendo ambo i membri di tale relazione, $A^{-1} = B$).

Esercizio 7.3 Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$) di dimensione n e sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una sua base.
(i) Dato $v \in V$ esiste ed è unico $x \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$ a seconda se V sia uno spazio vettoriale reale o complesso) tale che $v = \sum_{j=1}^n x_i v_i$; si definisca $\|v\| := |x|$ e si dimostri che $\|\cdot\|$ definisce una norma su V.
(ii) Sia $\|\cdot\|$ una norma su V e per $x \in \mathbb{R}$ (rispettivamente, $x \in \mathbb{C}^n$) si definisca $\|x\| := \|\sum_{j=1}^n x_i v_i\|$ e si dimostri che $\|\cdot\|$ è una norma su $\mathbb{R}^n$.

T 7.4 Si dimosti che tutte le norme su di un qualunque spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$) finito dimensionale sono equivalenti.

Esercizio 7.5 Si dimostri che se $\|\cdot\|$ è una norma su $\mathbb{R}$ allora esiste $c > 0$ tale che $\|x\| = c|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7.6 Si calcoli la norma $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{2,2}$ della matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 7.7 (i) Dimostrare che per ogni matrice $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, $\|A\| \geq \max |\lambda_i|$ dove il massimo è preso sugli n autovalori di A.
(ii) Dimostrare che se $A = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, con $\lambda_i \in \mathbb{C}$, allora $\|A\| = \max |\lambda_i|$.
(iii) Dimostare che se U è una matrice reale ortogonale (cioè $U^T :=$ trasposta di $U = U^{-1}$), allora $\|U\| = 1$.
(iv) Dimostrare che se A è (reale e) simmetrica allora $\|A\| = \max |\lambda_i|$ ($:=$ massimo modulo degli autovalori di A).
(v) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ dove $\varepsilon > 0$. Dimostrare che gli autovalori di A sono 0 e ε (e quindi A è diagonalizzabile) e che $\|A\| = \sqrt{1+\varepsilon^2} > 1$. Questo dimostra che anche se A è diagonalizzabile (ma non simmetrica) può accadere che $\|A\| > \max |\lambda_i|$.

Esercizio 7.8 Si verifichi che una successione di funzioni converge uniformemente su $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se e solo se è una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty,E}$.

Esercizio 7.9 Sia $u_k(x) := \arctan(kx)$. Dimostrare che $\{u_k\}$ è una successione di Cauchy nello spazio normato $(C[-a,a], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$ (con $a > 0$) e far vedere che non esiste alcuna funzione $u \in C([-a,a], \mathbb{R})$ tale che $\|u_k - u\|_{L^1} \to 0$.

Esercizio 7.10 Si dimostri che gli spazi di successioni ℓ^2 e ℓ^∞ sono spazi di Banach.

Esercizio 7.11 Si dimostri che lo spazio normato dell'esempio (9) è uno spazio di Banach.

T 7.12 (Lo spazio $\mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e si definisca il seguente sottoinsieme di $C(E, \mathbb{R}^m)$:

$$\mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m) := \left\{ f \in C(E, \mathbb{R}^m) : \ \|f\|_{\mathrm{Lip}} := \sup_{x,y \in E, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} + \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty \right\} . \tag{7.36}$$

(i) Si dimostri che l'insieme $\mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$ è strettamente contenuto in $C(E, \mathbb{R}^m)$.
(ii) Si dimostri che $(\mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ è uno spazio di Banach.

Si noti che se $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$ allora f è **uniformemente lipschitziana** su E ovvero (per definizione) esiste una costante positiva C tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \ , \qquad \forall \ x, y \in E \ , \tag{7.37}$$

inoltre la costante più piccola per cui vale (7.37) è data da $\sup_{x,y \in E, x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$.

T 7.13 (Spazi hölderiani $C^\alpha(E,\mathbb{R}^m)$ con $0<\alpha<1$) Sia $E\subseteq\mathbb{R}^n$ un insieme compatto e si definisca il seguente sottoinsieme di $C(E,\mathbb{R}^m)$:

$$C^\alpha(E,\mathbb{R}^m) := \Big\{ f\in C(E,\mathbb{R}^m): \ \|f\|_{C^\alpha} := \sup_{x,y\in E, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{x\in E}|f(x)| < \infty \Big\} ; \tag{7.38}$$

una funzione f tale che $\exists\, C>0$ e $0<\alpha<1$ per cui $|f(x)-f(y)|\le C|x-y|^\alpha$ per ogni $x,y\in A$ si dice **hölderiana** in A con esponente α.

(i) Si dimostri che l'insieme $C^\alpha(E,\mathbb{R}^m)$è strettamente contenuto in $\mathrm{Lip}(E,\mathbb{R}^m)$.
(ii) Si dimostri che $(C^\alpha(E,\mathbb{R}^m),\|\cdot\|_{C^\alpha})$ è uno spazio di Banach.

Esercizio 7.14 (Gli spazi $C^k(E,\mathbb{R}^m)$) Sia $E\subseteq\mathbb{R}^n$ compatto e k un intero positivo. La classe $C^k(E,\mathbb{R}^m)$ è stata definita in § 2. Se $f\in C^k(E,\mathbb{R}^m)$, definiamo

$$\|f\|_{C^k} := \sum_{\beta\in\mathbb{N}, |\beta|\le k} \sup_E |\partial_x^\beta f| \ . \tag{7.39}$$

(i) Si dimostri che

$$C^k(E,\mathbb{R}^n) \subsetneq C^h(E,\mathbb{R}^n) \subsetneq C^\alpha(E,\mathbb{R}^n) \ , \qquad \forall\, k>h\ge 1>\alpha>0 \ .$$

(ii) Si dimostri che $(C^k(E,\mathbb{R}^m),\|\cdot\|_{C^k})$ è uno spazio di Banach.

T 7.15 (Spazi $C^\alpha(E,\mathbb{R}^m)$ con $\alpha>0$) Sia E un compatto di $\mathbb{R}^n$; sia α un numero positivo, sia $k:=[\alpha]$ la sua parte intera ed $r:=\{\alpha\}$ la sua parte frazionaria cosicché $\alpha=k+r$ con k intero non negativo e $0\le r<1$. Se $k=0$ o $r=0$ gli spazi $C^\alpha(E,\mathbb{R}^m)$ sono stati definiti, rispettivamente, in **7.13** e **7.14**. *Se* $k\ge 1$ *e* $r>0$ *poniamo*

$$\begin{aligned} C^\alpha(E,\mathbb{R}^m) \quad &:= \quad \Big\{ f\in C^k(E,\mathbb{R}^m): \partial_x^\beta f\in C^r(E,\mathbb{R}^m), \forall\,\beta\in\mathbb{N}^n, |\beta|=k \Big\} \ , \\ & \qquad (\text{con} \quad \alpha:=k+r, \ k\in\mathbb{Z}_+, \ 0<r<1) \ . \end{aligned} \tag{7.40}$$

Per $f\in C^\alpha(E,\mathbb{R}^m)$ [con α come in (7.40)] poniamo

$$\|f\|_{C^\alpha} := \|f\|_{C^k} + \sum_{\beta\in\mathbb{N}, |\beta|=k} \|\partial_x^\beta f\|_{C^r} \ . \tag{7.41}$$

Si dimostri che (anche in tal caso) $(C^\alpha(E,\mathbb{R}^m),\|\cdot\|_{C^\alpha})$ è uno spazio di Banach.

Esercizio 7.16 Sia E un intervallo compatto di $\mathbb{R}$ e sia

$$X := \Big\{ f\in C^\infty(E,\mathbb{R}): \ \|f\| := \sum_{k=0}^\infty \frac{\|f^{(k)}\|_{\infty,E}}{2^k} < \infty \Big\} \ . \tag{7.42}$$

Dimostrare che $(X,\|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach ma che X è un sottoinsieme proprio di $C^\infty(E,\mathbb{R})$.

Esercizio 7.17 Ripetere l'esercizio **7.16** sostituendo 2^k con una *qualunque* successione $\{a_k\}$ di numeri strettamente positivi.

T 7.18 (Lo spazio $C^\infty(E,\mathbb{R}^m)$) (i) (caso $n=m=1$) Sia E un intervallo compatto di $\mathbb{R}$. Su $C^\infty(E,\mathbb{R})$ si consideri la seguente *metrica*

$$d(f,g) := \sum_{k\ge 0} 2^{-k} \frac{\|f^{(k)}-g^{(k)}\|_{\infty,E}}{1+\|f^{(k)}-g^{(k)}\|_{\infty,E}} \ . \tag{7.43}$$

Dimostrare che (C^∞,d) è *uno spazio metrico completo.*

(ii) Sia E un compatto di $\mathbb{R}^n$. Su $C^\infty(E,\mathbb{R}^m)$ si consideri la seguente *metrica*:

$$d(f,g) := \sum_{k\ge 0} \frac{1}{2^k\ k!} \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n, |\beta|=k} \frac{\|\partial_x^\beta f-\partial_x^\beta g\|_{\infty,E}}{1+\|\partial_x^\beta f-\partial_x^\beta g\|_{\infty,E}} \ . \tag{7.44}$$

Dimostrare che $(C^\infty(E,\mathbb{R}^m),d)$ è *uno spazio metrico completo.*

Esercizio 7.19 Dimostrare che su $C(E,\mathbb{R}^m)$, E compatto di $\mathbb{R}^n$, la norma $\|\cdot\|_{\infty,E}$ e la norma $\|f\| := \sup_{x,y\in E}|f(x)-f(y)| + \sup_E |f|$ sono equivalenti (si noti che la norma $\|\cdot\|$ è formalmente la norma $\|\cdot\|_{C^\alpha}$ definita in (7.13) con $\alpha=0$).

Esercizio 7.20 Sia E un intervallo compatto di $\mathbb{R}$. Dimostrare che su $C^1(E,\mathbb{R})$ la norma $\|\cdot\|_{C^1}$ e la norma $\|f\| := \sup_{x,y\in E}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \sup_E |f|$ sono equivalenti (si noti che la norma $\|\cdot\|$ è formalmente la norma $\|\cdot\|_{C^\alpha}$ definita in (7.13) con $\alpha=1$).

Esercizio 7.21 Dimostrare che $C^1(E,\mathbb{R}^m)$, E compatto di $\mathbb{R}^n$, è un sottospazio chiuso e proprio di $\mathrm{Lip}(E,\mathbb{R}^m)$ (dotato della topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$).

Esercizio 7.22 Sia E un intervallo compatto di $\mathbb{R}$, $\alpha>1$ e sia

$$X := \Big\{ f\in C(E,\mathbb{R}): \ \|f\| := \sup_{x,y\in E, x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_E |f| < \infty \Big\} \ .$$

Dimostrare che $(X,\|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach e che tale spazio, infatti, non è altro che $\mathbb{R}$.

C 7.23 (Disuguaglianze di Hölder e Minkowski)

La **disuguaglianza di Hölder** è una generalizzazione della disuguaglianza di Schwarz: *siano x_i e y_i, $i=1,...,n$ numeri reali o complessi, e siano p e q due numeri reali maggiori di 1 e coniugati cioè*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \ , \qquad p,q>1 \ , \tag{7.45}$$

allora

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \le \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}} := |x|_p \ |y|_q \ , \tag{7.46}$$

dove $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)$.

La dimostrazione di tale diseguaglianza è basata sulla convessità della funzione esponenziale, come si evince dal seguente

Lemma 7.7 *Siano p e q come in (7.45). Allora per ogni s e t in $[0,\infty)$ si ha*

$$st \le \frac{s^p}{p}+\frac{t^q}{q} \ . \tag{7.47}$$

Dimostrazione Assumiamo che $st>0$ altrimenti la disuguaglianza è ovvia. Dalla convessità della funzione $x\to\exp(x)$ segue

$$\begin{aligned} st &= \exp\Big(\log s+\log t\Big) = \exp\Big(\frac{1}{p}\,p\log s + \frac{1}{q}\,q\log t\Big) \\ &\le \frac{1}{p}\exp(p\log s)+\frac{1}{q}\exp(q\log t) = \frac{s^p}{p}+\frac{t^q}{q} \ . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

È facile ora dimostrare la disuguaglianza di Hölder: se $|x|_p$ o $|y|_q$ sono nulli significa che $x=0$ o $y=0$, nel qual caso la disuguaglianza è vera (col segno $=$). Assumiamo dunque che $|x|_p\neq 0$ e $|y|_q\neq 0$. Definiamo

$$a_i := \frac{|x_i|}{|x|_p} \ , \qquad b_i := \frac{|y_i|}{|y|_q} \ ,$$

cosicché (7.46) risulti equivalente a

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \le 1 \ , \qquad \text{con} \qquad \sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1 \ . \tag{7.48}$$

Usando n volte la (7.47), si ha

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ ,$$

che è quanto volevasi dimostrare. ∎

Una conseguenza importante della disuguaglianza di Hölder è la seguente **disuguaglianza di Minkowski** (che non è altro che la disuguaglianza triangolare per la norma $|\cdot|_p$):

$$|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p \ , \qquad \forall\ x,y \in \mathbb{C}^n \ . \tag{7.49}$$

Dimostrazione Se $p=1$ sappiamo che la disuguaglianza è vera. Assumiamo dunque che p sia un numero reale $p>1$. Assumiamo anche che sia x che y non siano nulli (cioè che $|x|_p \neq 0$ e $|y|_p \neq 0$) e definiamo i vettori $a, b \in \mathbb{R}^n_+$ come i vettori le cui componenti siano

$$a_i := |x_i| \ , \qquad b_i := |y_i| \ .$$

È evidente che

$$|x+y|_p \leq |a+b|_p \ , \qquad |x|_p = |a|_p \ , \quad |y|_p = |b|_p \ . \tag{7.50}$$

Infine sia $q := p(p-1)^{-1}$, cosicché $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora, essendo $(p-1)q = p$, si ha

$$\begin{aligned}
|a+b|_p^p &= \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)(a_i+b_i)^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1} \\
&\leq \Big(|a|_p + |b|_p\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= (|a|_p + |b|_p)\ (|a+b|_p)^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

cioè

$$\Big(|a+b|_p\Big)^{p-\frac{p}{q}} \leq |a|_p + |b|_q$$

ed essendo $p - \frac{p}{q} = 1$ si ha l'asserto. ∎

Esercizio 7.24 Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\lim_{p\to\infty} |x|_p = |x|_\infty \ . \tag{7.51}$$

Tale relazione *giustifica* il simbolo $|\cdot|_\infty$ per la norma del massimo sui moduli delle componenti.

Esercizio 7.25 Si dimostrino le seguenti proprietà del diametro[15]: (i) $\operatorname{diam} A = 0$ se e solo se A è costituito da un solo punto. (ii) Se $A \subseteq B$ allora $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B$. (iii) A è limitato se e solo il suo diametro è finito. (iv) $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$. (vi) Se $A_{k+1} \subseteq A_k$ e $\lim \operatorname{diam} A_k = 0$ allora $\cap_k A_k$ contiene al più un punto.

Esercizio 7.26 Si calcoli il diametro di $A := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0|_p < r\}$ per $1 \leq p \leq \infty$.

T 7.27 Si dimostri che gli spazi di successioni $\ell^p :=$ insieme delle successioni reali (o complesse) x tali che

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\} \ ,$$

sono spazi di Banach per ogni $1 \leq p \leq \infty$.

[15]Si ricorda che se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ il **diametro** di A è dato da $\operatorname{diam} A = \sup_{x,y\in A} |x-y|$.

Esercizio 7.28 Si dica qual è la relazione (come insiemi) di ℓ^p e ℓ^q con $1 \le p < q \le \infty$.

Esercizio 7.29 (i) Si dimostri che su ℓ^1 le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ non sono equivalenti tra loro; si dimostri che su ℓ^2 le norme $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ non sono equivalenti.

(ii) Si dimostri che per ogni $p > q$, $\|\cdot\|_p$ è una norma su ℓ^q e che le norme $\|\cdot\|_q$ e $\|\cdot\|_p$ non sono equivalenti su ℓ^q.

C 7.30 (Norme $\|\cdot\|_{L^p}$) Sia $E := [a,b]$ un intervallo. Se $f \in C(E,\mathbb{R})$, definiamo

$$\|f\|_{L^p} := \Big(\int_E |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \ . \tag{7.52}$$

Allora $\|\cdot\|_{L^p}$ è una norma su $C(E,\mathbb{R})$.

Dimostrazione $\|\cdot\|_{L^p}$ soddisfa chiaramente l'omogeneità e la non degenerazione. Per dimostrare la disuguaglianza triangolare siano $f, g \in C(E,\mathbb{R})$, si ha che

$$\begin{aligned}\Big(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} &= \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^N |f(x^{(i)})+g(x^{(i)})|^p \delta_N\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{N\to\infty} \Big(\delta_N \sum_{i=1}^N |f(x^{(i)})+g(x^{(i)})|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

dove $\delta_N = (b-a)/N$ e $x^{(i)} = a + i\delta_N$; quindi da (7.49) segue che

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^p} &= \lim_{N\to\infty} \delta_N^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^N |f(x^{(i)})+g(x^{(i)})|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \lim_{N\to\infty} \delta_N^{\frac{1}{p}} \Big\{\Big(\sum_{i=1}^N |f(x^{(i)})|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^N |g(x^{(i)})|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \Big\{\Big(\sum_{i=1}^N |f(x^{(i)})|^p \delta_N\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^N |g(x^{(i)})|^p \delta_N\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\} \\ &= \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \ . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Esercizio 7.31 Sia $1 \le p < \infty$. Si Dimostri che $C([a,b],\mathbb{R})$ con la norma L^p non è uno spazio di Banach.

Esercizio 7.32 Siano $\{a_k\}$, $\{A^{(k)}\}$, $\{B^{(k)}\}$, $\{x^{(k)}\}$ successioni in, rispettivamente, $\mathbb{R}$, $\mathrm{Mat}(n\times m)$, $\mathrm{Mat}(m\times p)$, $\mathbb{R}^p$ convergenti a, rispettivamente a, A, B, x. Dimostrare che $a_k A^{(k)} B_{(k)} \to aAB$ e che $a_k A^{(k)} B^{(k)} x^{(k)} \to aABx$.

T 7.33 Siano $(X, \|\cdot\|_X$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati e sia $\mathcal{L}(X,Y)$ l'insieme delle applicazioni *lineari e continue* $A : X \to Y$.
(i) Si dimostri che $\mathcal{L}(X,Y)$ è (in modo naturale) uno spazio vettoriale.
(ii) Si dimostri che $\|A\| := \sup\limits_{x\in X, x\neq 0} \|Ax\|_Y/\|x\|_X$ (per $A \in \mathcal{L}(X,Y)$) definisce una norma ("*norma operatoriale*") su $\mathcal{L}(X,Y)$.
(iii) Si dimostri che se X e Y sono di Banach, lo è anche $\mathcal{L}(X,Y)$.
(iv) Sia $A : X \to Y$ un'applicazione lineare (a priori non necessariamente continua) e supponiamo che $\|A\| := \sup_{x\in X, x\neq 0} \|Ax\|_Y/\|x\|_X < \infty$. Si dimostri che A è continua.

Esercizio 7.34 Sia X lo spazio di Banach $C([0,1],\mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_{\infty,[0,1]}$ e sia A l'"operatore" che a $f \in X$ associa la funzione $(Af)(x) := \displaystyle\int_0^1 f(y) e^{-(x-y)^2} dy$. Dimostrare che $A \in \mathcal{L}(X,X)$ e stimare la norma operatoriale di A (si veda **7.33** per le definizioni).

Esercizio 7.35 Sia X lo spazio di Banach ℓ^∞ (con la norma $\|x\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$) e sia

$$S : x := \{x_0, x_1, x_2, ...\} \to Sx := \{x_1, x_2, x_3, ...\} \ .$$

(i) Si dimostri che $S \in \mathcal{L}(\ell^\infty, \ell^\infty)$ e se ne calcoli la norma (operatoriale).
(ii) Dimostrare che esiste un "inverso destro" ovvero esiste $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, \ell^\infty)$ tale che $ST = I$ (ove $I : \ell^\infty \to \ell^\infty$ è l'identità) ma che non esiste alcun "inverso sinistro" (ovvero R tale che $RS = I$).
(iii) Trovare un sottospazio di ℓ^∞ su cui S sia invertibile.

Esercizio 7.36 Si calcoli la matrice esponenziale e^{At}, con: (i) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(a \in \mathbb{R})$; (ii) $A = \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $(a, b \in \mathbb{R})$; (iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $(ab > 0)$; (iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $(ab < 0)$; (v) $A = \begin{pmatrix} c & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

Esercizio 7.37 (i) Dimostrare che se la matrice $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ è diagonale allora si ha che $e^\Lambda = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$.
(ii) Dimostrare che se $v \in \mathbb{R}^n$ è un autovettore per $A \in \operatorname{Mat}(n \times n)$ con autovalore λ (cioè $v \neq 0$ e $Av = \lambda v$), allora $e^A v = e^\lambda v$, cioè v è autovettore per e^A con autovalore e^λ.
(iii) Dimostrare che se $A \in \operatorname{Mat}(n \times n)$ e $T \in \operatorname{Mat}(n \times n)$ è invertibile allora

$$T^{-1} e^A T = e^{T^{-1}AT} \ . \tag{7.53}$$

Da (7.53) *segue che se A è matrice diagonalizzabile (cioè $T^{-1}AT = \Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$), allora*

$$e^A = T e^\Lambda T^{-1} \ . \tag{7.54}$$

Esercizio 7.38 Siano A e B le matrici di (7.28) e si dimostri che le tre matrici $e^A e^B$, $e^B e^A$ e e^{A+B} sono tutte diverse tra di loro.

Esercizio 7.39 (i) Sia $t \in (a, b) \to A(t) \in \operatorname{Mat}(n \times m)$. Dimostrare che $A(t)$ è derivabile in $t_0 \in (a, b)$ (ossia $\exists \lim_{h\to 0} \Big(A(t_0 + h) - A(t_0)\Big)/h)$ se e solo se sono derivabili in t_0 gli elementi di matrice A_{ij} per ogni i, j, e che, in tal caso, si ha $(A')_{ij} = (A_{ij})'$.
(ii) Dimostrare che, se $A(t) \in \operatorname{Mat}(n \times m)$, $B(t) \in \operatorname{Mat}(m \times p)$, $v(t) \in \mathbb{R}^m$ sono derivabili, allora valgono le seguenti regole di derivazione

$$(AB)' = A'B + AB' \ , \qquad (Av)' = A'v + Av' \ . \tag{7.55}$$

(iii) Dimostrare che se $A(t) \in \operatorname{Mat}(n \times n)$ è derivabile in t_0 e se $A(t_0)$ è invertibile allora $A^{-1}(t)$ è derivabile in t_0 e si ha

$$\Big(A^{-1}\Big)'(t_0) = -A^{-1}(t_0)\ A'(t_0)\ A^{-1}(t_0) \ . \tag{7.56}$$

(iv) I punti precedenti si generalizzano al caso di funzioni regolari da $\mathbb{R}^n$ in $\operatorname{Mat}(n \times m)$: se U è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $x \in U \to A(x) \in \operatorname{Mat}(n \times m)$, $A(x)$ ha derivata parziale rispetto a x_k in $x_0 \in U$ se e solo se ammettono derivata parziale rispetto a x_k gli elementi di matrice A_{ij} per ogni i, j, e che, in tal caso, si ha $(\frac{\partial A}{\partial x_k})_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}$; se $A(x) \in \operatorname{Mat}(n \times m)$, $B(x) \in \operatorname{Mat}(m \times p)$, $v(x) \in \mathbb{R}^m$ ammettono derivata parziale rispetto a x_k in x_0, allora $\frac{\partial(AB)}{\partial x_k} = \frac{\partial A}{\partial x_k}B + A\frac{\partial B}{\partial x_k}$, $\frac{\partial(Av)}{\partial x_k} = \frac{\partial A}{\partial x_k}v + A\frac{\partial v}{\partial x_k}$; se $A(x) \in \operatorname{Mat}(n \times n)$ ha derivata parziale rispetto a x_k in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e se $A(x_0)$ è invertibile allora $A^{-1}(x)$ è derivabile in x_0 e si ha $\frac{\partial A^{-1}}{\partial x_k}(x_0) = -A^{-1}(x_0)\frac{\partial A}{\partial x_k}(x_0)A^{-1}(x_0)$.

Esercizio 7.40 Sia X_T lo spazio di Banach delle funzioni delle funzioni continue su $[-T, T]$ con norma uniforme $\|u\|_\infty := \sup_{|t|\le T} |u(t)|$ e sia $\Phi_a : X_T \to X_T$ definita come

$$(\Phi_a u)(t) := a + t^2 + \int_0^t \operatorname{sen} u(s)\ ds \ .$$

Trovare $T > 0$ tale che Φ_a sia una contrazione da X_T in se stesso.

Esercizio 7.41 Sia $0 < \varepsilon$ e sia $X_\varepsilon := \{u \in C([-1,1],\mathbb{R}) : \sup_{|t|\le 1} |u(t)| \le \varepsilon\}$ e sia $\Phi(u) := u^3 + \cos u - 1$.
(i) Trovare $\varepsilon_0 > 0$ tale che Φ sia una contrazione su X_ε.
(ii) Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{n} \left(\dfrac{t^2 + t^3}{100} \right)$.

Esercizio 7.42 Sia X uno spazio di Banach e sia $x : t \in [a,b] \to x(t) \in X$ una funzione continua. Si dimostri che $x(t)$ è uniformemente continua (ossia che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che comunque si scelgano $t, t_0 \in [a,b]$ con $|t - t_0| < \delta$ allora $\|x(t) - x(t_0)\| < \varepsilon$).

Esercizio 7.43 (Integrazione in spazi di Banach) Sia X uno spazio di Banach e sia $x : t \in [a,b] \to x(t) \in X$ una funzione continua.
(i) Si dimostri che $x^{(k)} := \sum_{j=0}^{k} \delta_k x(t_j^{(k)})$, con $t_j^{(k)} := a + j\delta_k$ e $\delta_k := (b-a)/k$, è una successione di Cauchy in X.
Si definisca $\displaystyle\int_a^b x(t)dt := \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$.
(ii) Si dimostri la linearità dell'integrale e che

$$\|\int_a^b x(t)dt\| \le \int_a^b \|x(t)\|dt \ .$$

Capitolo 8

Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie

Una equazione differenziale ordinaria è una equazione che coinvolge una funzione (eventualmente vettoriale) di una variabile e le sue derivate.

Esempio 8.1 Un caso semplice è dato dall'equazione

$$u'(t) = f(t) \tag{8.1}$$

ed il problema è: "assegnata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, trovare funzioni u (derivabili) che soddisfino (8.1)". Se f è una funzione continua su di un intervallo I, $f \in C(I)$, troviamo immediatamente, dal teorema fondamentale del calcolo, che tutte le soluzioni di (8.1) sono date da

$$u(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \ , \tag{8.2}$$

dove c è una costante arbitraria e t e t_0 sono punti in I. In particolare, se si richiede che u prenda un valore assegnato u_0 all'istante[1] $t = t_0$, l'*unica* soluzione di (8.1) è data da (8.2) con $c = u_0$.

Esempio 8.2 (Sistemi lineari a coefficienti costanti) *Tutte e sole le soluzioni $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ dell'equazione differenziale*

$$u' = Au \tag{8.3}$$

con A matrice reale $n \times n$ sono date da $u(t) = e^{At}u_0$ (con $u_0 \in \mathbb{R}^n$). Che tali funzioni risolvano (8.3) è stato già osservato nel § 2 [si vedano (7.32) e (7.33)]. Dimostriamo che non vi sono altre soluzioni (in altre parole ogni soluzione derivabile $u(t)$ di (8.3) ha la forma $e^{At}u_0$ per un opportuno $u_0 \in \mathbb{R}^n$). Sia E un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $u \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ una soluzione arbitraria di (8.3). Sia $t_0 \in E$ e definiamo $v(t) = e^{At}c$ con $c := e^{-At_0}u(t_0)$ (in modo tale che $u(t_0) = v(t_0)$). Facciamo vedere che u e v debbono coincidere su E. Supponiamo, infatti, per assurdo, che u e v siano diverse cioè che, se chiamiamo $w := u - v$, w non sia identicamente nulla in E. Sia $I \subseteq E$ il più grande intervallo contenente t_0 per cui $w(t) = 0$ per ogni $t \in I$.

[1] Spesso, nella teora delle equazioni differenziali ordinarie, la variabile indipendente viene indicata con t, essendo interpretata come una variabile temporale.

Secondo la nostra ipotesi I non coincide con E e quindi almeno uno dei suoi estremi è un punto $\tau \in E$. Poichè $w(t)$ è continua, $w(\tau) = 0$. La funzione w soddisfa $w' = Aw$ e $w(\tau) = 0$. Supponendo che τ sia l'estremo destro di I (il ragionamento nell'altro caso è perfettamente analogo), integriamo la relazione $w' = Aw$ tra τ e $t > \tau$ con $t \leq \tau + \varepsilon$ ed ε sufficientemente piccolo. Allora[2]

$$|w(t)| = \Big|A \int_\tau^t w(s)ds\Big| \leq \|A\|(\sup_{[\tau,\tau+\varepsilon]} |w|)\ \varepsilon \tag{8.4}$$

ovvero (prendendo l'estremo superiore su $t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$)

$$\sup_{[\tau,\tau+\varepsilon]} |w| \leq \|A\|\varepsilon \sup_{[\tau,\tau+\varepsilon]} |w|$$

il che, se scegliamo ε tale che $\|A\|\varepsilon < 1$, è assurdo a meno che $\sup_{[\tau,\tau+\varepsilon]} |w| = 0$; ma in tal caso si contraddice la definizione di I e dunque I ed E debbono coincidere. ∎

Da questa discussione segue anche che *il problema "ai valori iniziali"*

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t)\ , \qquad u(t_0) = u_0\ , \tag{8.5}$$

(dove $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ sono assegnati) ammette l'unica soluzione derivabile $u(t) = e^{(t-t_0)A}u_0$.

Esempio 8.3 Troviamo ora tutte le funzioni u (derivabili) che soddisfino l'equazione differenziale

$$u' = u^2\ . \tag{8.6}$$

Innanzitutto, la funzione identicamente nulla $u := 0$ soddisfa (8.6). Cerchiamo, quindi, altre soluzioni che ad un certo istante t_0 assumano un valore $u_0 \neq 0$. Poiché cerchiamo $u \in C^1$, u sarà in particolare continua; esisterà dunque un intorno di t_0 in cui la $u \neq 0$ e mantiene il segno di u_0; dividendo per u^2 (per t in tale intorno) ed integrando tra t_0 e t, otteniamo da (8.6)

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{u^2}u'd\tau = \int_{t_0}^t d\tau = t - t_0\ . \tag{8.7}$$

Ma da (8.6), vediamo che $u' > 0$ quindi la funzione $t \to u(t)$ è invertibile, e possiamo cambiare variabile di integrazione nell'integrale a sinistra di (8.7), e se u denota il valore $u(t)$ e u_0 il valore di $u(t)$ al tempo t_0, otteniamo

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{u^2}u'd\tau = \int_{u_0}^u \frac{1}{v^2}dv = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u} \tag{8.8}$$

e cioè

$$u(t) = \Big(t_0 - t + \frac{1}{u_0}\Big)^{-1}\ . \tag{8.9}$$

Si ha, di nuovo, che se il valore $u_0 \neq 0$ è stato assegnato, (8.9) è l'unica soluzione di (8.6) che soddisfi anche $u(t_0) = u_0$. Si noti inoltre che (8.9) è definita per $t \neq \bar t$ con $\bar t = t_0 + \frac{1}{u_0}$; e quindi l'unica soluzione di (8.6) con "valore iniziale" $u(t_0) = u_0$ è definita per $t < \bar t$, se $u_0 > 0$, e per $t > \bar t$, se $u_0 < 0$; come abbiamo già osservato, se $u_0 = 0$ la soluzione non è del tipo (8.9) ma è la soluzione identicamente nulla.

[2]Si ricordi **3.13** [in particolare la (3.70)] e si osservi che, dalla definizione di integrale di funzione vettoriale, segue che $A\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Af(t)dt$ (con $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ e $t \to f(t) \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$).

Esempio 8.4 Abbiamo visto negli esempi precedenti che, *assegnato un "valore iniziale"* ovvero assegnato u_0 tale che $u(t_0) := u_0$, *si ha un'unica soluzione delle equazioni differenziale* (8.1), (8.3) *e* (8.6). Consideriamo ora il seguente esempio:

$$u' = u^{\frac{2}{3}} , \qquad u(0) = 0 . \tag{8.10}$$

Si verifica immediatamente che $u(t) := 0$ e $v(t) = \frac{t^3}{27}$ sono entrambe soluzioni di (8.10): in questo esempio dunque *non basta assegnare il dato iniziale per avere una unica soluzione*. Notiamo che la funzione $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ non è lipschitziana in 0, ma solo hölderiana con esponente 2/3.

Esempio 8.5 Si consideri l'equazione differenziale che regola l'evoluzione di un "oscillatore armonico", cioè di un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi su una retta, e collegato, tramite una molla perfettamente elastica ad un certo punto prefissato O. Se $x = x(t)$ denota la coordinata del punto al tempo t (e $x = 0$ corrisponde al "polo" O), dalla "legge della dinamica di Newton" (forza = massa × accelerazione) e dalla "legge di Hooke" sulle forze elastiche si ottiene[3]

$$m\ddot{x} = -kx \tag{8.11}$$

dove $k > 0$ denota la costante di elasticità della molla. Si vede immediatamente che, per ogni a e b (costanti), la funzione $x(t) = a\cos\omega t + b \operatorname{sen}\omega t$, con $\omega = \sqrt{k/m}$, è soluzione di (8.11). Se assegniamo, la posizione x_0 *e* la velocità v_0 dell'oscillatore al tempo $t = 0$, otteniamo la soluzione $x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}\omega t$. Rimane, per ora, in sospeso la questione se tali soluzioni siano *tutte* le soluzioni di (8.11).

Esempio 8.6 Un altro esempio, assai più complicato del precedente, tratto dalla meccanica, è dato da un sistema di "due pendoli piani accoppiati" la cui evoluzione è regolata dal *sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \operatorname{sen} x_1 &= \varepsilon[\operatorname{sen}(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2)] \\ \ddot{x}_2 + \operatorname{sen} x_2 &= \varepsilon[\operatorname{sen}(x_1 + x_2) - \cos(x_2 - x_1)] . \end{aligned} \tag{8.12}$$

Il moto dei pendoli si svolge all'interno di un piano verticale prefissato e $x_1(t), x_2(t)$ misurano, in radianti, lo spostamento, al tempo t, dei pendoli dalla posizione dell'" equilibrio stabile" (ossia del punto più basso che il pendolo possa raggiungere); i parametri dimensionali (accelerazione di gravità, masse dei pendoli, *etc.*) sono stati posti uguali ad 1; $\varepsilon > 0$ è un parametro che misura la taglia di una certa forza di interazione tra i due pendoli. In questo caso *non è possibile descrivere in maniera semplice tutte le soluzioni di* (8.12) *anche per* ε *molto piccoli*: la descrizione qualitativa, per tempi lunghi, delle soluzioni di equazioni differenziali del tipo (8.12) è un interessante ed attivo campo di ricerca della analisi matematica.

Si definisce **ordine** di una equazione differenziale (o di un sistema di equazioni differenziali), l'ordine massimo con cui appare la derivata della funzione incognita (o di una delle funzioni incognite, nel caso di sistemi). Gli esempi **8.1**, **8.2**, **8.3** sono dunque esempi di una equazione differenziale del primo ordine; (8.11) è una equazione del secondo ordine, mentre (8.12) è un sistema di due equazioni del secondo ordine.

Una differenza sostanziale fra gli esempi discussi sopra è che **8.1**, **8.2**, **8.5** sono esempi *lineari*[4] al contrario di **8.3** e **8.6** che sono *non lineari*.

---

[3] Useremo indifferentemente le notazioni $\dot{u}$, u', $\frac{du}{dt}$, per indicare la derivata di $u(t)$ rispetto a t.

[4] Le funzioni incognite e le loro derivate appaiono linearmente nelle equazioni; inoltre la (8.3) è lineare ed *omogenea*, cioè non vi è compare un "termine noto".

È utile notare che tutti gli esempi sopra considerati (e tutti gli esempi che considereremo in seguito) possono essere descritti da *un sistema di equazioni differenziali ordinarie*[5] *del prim'ordine* della forma

$$u' = f(u,t) \tag{8.13}$$

dove u ed f saranno, in generale, funzioni di, rispettivamente, 1 ed $n+1$ variabili ed a valori in $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, il sistema (8.12), assume la forma (8.13) se poniamo: $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ ed $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ con $u_1 = x_1$, $u_2 = \dot{x}_1$, $u_3 = x_2$, $u_4 = \dot{x}_2$ e $f_1(u) = u_2$, $f_2(u) = -\operatorname{sen} u_1 + \varepsilon[\operatorname{sen}(u_1 + u_3) + \cos(u_1 - u_3)]$, $f_3 = u_4$, $f_4(u) = -\operatorname{sen} u_3 + \varepsilon[\operatorname{sen}(u_1 + u_3) - \cos(u_3 - u_1)]$. Come secondo importante esempio si consideri l'equazione scalare, lineare ed omogenea di ordine n per la funzione incognita $t \to x(t) \in \mathbb{R}$

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \tag{8.14}$$

dove $(\cdot)^{(k)}$ denota $\frac{d^k}{dt^k}(\cdot)$ e le $a_i(t)$ sono funzioni continue di t assegnate. Ponendo $u = (u_1, ..., u_n)$, con $u_1 := x$, $u_2 := x'$,...,$u_n := x^{(n-1)}$ si verifica subito che (8.14) può essere riscritta come il sistema in $\mathbb{R}^n$ dato da

$$u' = A(t)u \ , \qquad \text{con} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} . \tag{8.15}$$

Abbiamo visto, negli esempi **8.1**÷**8.3** che se assegnamo il valore iniziale $u(t_0)$ della funzione incognita si ottiene una unica soluzione. In generale, il problema di trovare una $u \in C^1(\{t_0\}, \mathbb{R}^n)$ che verifichi, per t in un intorno di t_0 il sistema

$$u' = f(u,t) \ , \qquad u(t_0) = u_0 \tag{8.16}$$

per una data[6] $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ ed un dato vettore u_0 in $\mathbb{R}^n$, prende il nome **problema di Cauchy** o **problema ai valori iniziali** per la funzione incognita u.

1 Un teorema "generale" di esistenza ed unicità

Abbiamo visto nell'Esempio 8.4 che se la funzione f non è abbastanza regolare si possono trovare più soluzione del problema di Cauchy $u' = f(u)$, $u(0) = u_0$. La classe funzionale "giusta" nel nostro contesto è la classe delle funzioni lipschitziane[7] di cui ricordiamo la definizione:

Definizione 8.7 *Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice lipschitziana in $y \in A$, se esistono due numeri positivi L e δ tali che*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \ , \tag{8.17}$$

per ogni $x \in A$ con $|x - y| \leq \delta$. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice uniformemente lipschitziana in A se esiste $L > 0$ tale che (8.17) valga per ogni x e y in A.

[5] L'aggettivo "ordinarie" si riferisce al fatto che la variabile indipendente è una, cosicché compaiono solo le derivate "ordinarie" delle funzioni incognite. Al contrario, un'equazione per la funzione incognita $u(x_1, x_2)$ del tipo: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \operatorname{sen} u$ è un esempio di equazione differenziale *alle derivate parziali.*

[6] Ipotesi opportune sulla f, che garantiscano la risolubilità di (8.16), verranno date in seguito.

[7] Per informazioni sulle funzioni lipschitziane dal punto di vista degli spazi di Banach si veda **7.12**.

Naturalmente una funzione lipschitziana su A è ivi continua[8] Esempi di funzioni uniformemente lipschitziane su una m–sfera chiusa, $D = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x_0| \le r\}$, sono tutte le funzioni $C^1(D, \mathbb{R}^n)$, e come costante di Lipschitz si può prendere $L = \max_{x \in D} \|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\|$. Possiamo ora enunciare il seguente *teorema di esistenza ed unicità per soluzioni di sistemi di equazioni differenziali* la cui dimostrazione sarà una immediata conseguenza del teorema di punto fisso del § 7.

Teorema 8.8 *Siano r, T_0 due numeri positivi e sia $f \in C(D \times I, \mathbb{R}^n)$, dove $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - u_0| \le r\}$ e $I = [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$. Assumiamo che esista $L > 0$ tale che*

$$|f(x,t) - f(y,t)| \le L|x - y| \ , \qquad \forall\ x, y \in D \ , \quad \forall\ t \in I \ . \tag{8.18}$$

Sia $M \ge \max_{D \times I} |f(x,t)|$ e sia $T \le T_0$ tale che

$$TL < 1 \ , \qquad\qquad TM \le r \ , \tag{8.19}$$

allora esiste una ed una sola soluzione $u \in C^1([t_0 - T, t_0 + T], D)$ che soddisfi (8.16).

Si noti che l'ipotesi (8.18) dice che $f(\cdot, t)$ è uniformemente lipschitziana in D e che la costante di Lipschitz può essere scelta *indipendente da* t in I.

Dimostrazione Innanzittutto osserviamo che il problema di Cauchy (8.16) ovvero il problema di trovare una funzione u di classe C^1 in un intorno I di t_0 che soddisfi (8.16) è *equivalente* al problema di trovare una funzione $u \in C(I)$ che verifichi la seguente *equazione integrale*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau), \tau)\ d\tau \ . \tag{8.20}$$

Infatti (8.20) si ottiene immediatamente da (8.16) integrando ambo i membri di (8.16) tra t_0 e t, mentre se vale (8.20) si ha che $u(t_0) = u_0$ e dal teorema fondamentale del calcolo (applicato componente per componente) segue che $u \in C^1$ e che $u' = f(u(t), t)$.

Sia ora $E := C(I_0, D)$ con $I_0 := [t_0 - T, t_0 + T]$. Come osservato nel corso della dimostrazione del teorema delle funzioni implicite, E è un sottoinsieme chiuso e non vuoto dello spazio di Banach $C(I_0, \mathbb{R}^n)$ dotato della norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Su E definiamo la seguente trasformazione

$$v \in E \to \phi(v) : \qquad \phi(v)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(v(\tau), \tau)\ d\tau \ . \tag{8.21}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo $\phi(v) \in C(I_0, \mathbb{R}^n)$. Inoltre da (8.18) segue che, per ogni $v, w \in E$ e per ogni $t \in I_0$,

$$\begin{aligned} \Big|\phi(v)(t) - \phi(w)(t)\Big| &= \Big|\int_{t_0}^{t} \Big[f(v(\tau), \tau) - f(w(\tau), \tau)\Big]\ d\tau\Big| \\ &\le \Big|\int_{t_0}^{t} |f(v(\tau), \tau) - f(w(\tau), \tau)|\ d\tau\Big| \\ &\le LT\|v - w\|_\infty \ . \end{aligned} \tag{8.22}$$

Prendendo l'estremo superiore su I_0 di tale relazione, si ottiene

$$\|\phi(v) - \phi(w)\|_\infty \le LT\|v - w\|_\infty \ . \tag{8.23}$$

[8] Ovviamente non è vero il viceversa: $x \in \mathbb{R} \to |x|^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$ è continua in 0 ma non è ivi lipschitziana.

Quindi, poiché per definizione di T, $LT < 1$, ϕ è una contrazione. Inoltre per come è stato definito M, per ogni $v \in E$ e per ogni $t \in I_0$ si ha $v(t) \in D$ e

$$|\phi(v)(t) - u_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(v(t), \tau)| \, d\tau \right| \leq MT \leq r \ . \tag{8.24}$$

Prendendo l'estremo superiore su $t \in I_0$ si ha che $\|\phi(v) - u_0\|_\infty \leq r$, il che significa che ϕ manda E in sé stesso. L'asserto segue ora dal teorema delle contrazioni e dall'osservazione iniziale. $\blacksquare$

Osservazione 8.9 Usando direttamente lo schema iterativo descritto nella dimostrazione del teorema di punto fisso (ma senza usare l'enunciato di tale teorema) si ottengono stime migliori sui tempi di esistenza locale. Si può infatti dimostrare[9] che il Teorema 8.8 vale *senza l'ipotesi* $TL < 1$. Dunque *il tempo (locale) di esistenza può essere definito come* $T := \min\{T_0, r/M\}$.

2 Dipendenza dai dati iniziali

Il Teorema 8.8 fornisce un'unica soluzione (locale nel tempo) di (8.16). L'unicità deriva dall'aver fissato il valore iniziale $u_0 = u(t_0)$. Quindi la soluzione dipende da u_0; per sottolineare tale dipendenza, chiameremo $\varphi(t; u_0)$ la soluzione di (8.16). Quindi[10]

$$\varphi(t_0; u_0) = u_0 \ , \qquad \partial_t \varphi = f(\varphi, t) \ . \tag{8.25}$$

Una questione assai importante, anche dal punto di vista pratico, è *come dipendono le soluzioni di* (8.16) *dai dati iniziali*. È infatti augurabile che se il dato iniziale u_0 è vicino ad un certo valore $\bar{u}$, così siano anche le relative soluzioni, $\varphi(t; u_0)$ e $\varphi(t; \bar{u})$, almeno per tempi brevi. Infatti si ha il seguente risultato.

Proposizione 8.10 *Data f come nel Teorema 8.8, siano $s > 0$ e $D_0 \subseteq D$ una sfera chiusa tali che per ogni $\bar{u} \in D_0$ esista una funzione $C^1([t_0 - s, t_0 + s], D)$ $t \to \varphi(t; \bar{u})$, che soddisfi $\partial_t \varphi = f(\varphi; t)$ e $\varphi(t_0; \bar{u}) = \bar{u}$. Allora la funzione $\bar{u} \in D \to \varphi(t; \bar{u})$ è lipschitziana con costante di Lipschitz $e^{L|t-t_0|}$:*

$$|\varphi(t; \bar{u}) - \varphi(t; u_0)| \leq e^{L|t-t_0|} |\bar{u} - u_0| \ , \qquad \forall \ t \in I \ , \ \forall \ \bar{u}, u_0 \in D_0 \ , \tag{8.26}$$

dove $I := [t_0 - s, t_0 + s]$.

In particolare $\varphi(t; \bar{u})$ è continua come funzione di $\bar{u}$. Infatti è facile vedere che φ è *uniformemente lipschitziana (e quindi continua) come funzione di* $(1 + n)$ *variabili*[11].

Per dimostrare la proposizione abbiamo bisogno del seguente risultato.

[9] Esercizio **8.14**.

[10] Si noti che, sebbene in (8.25) appaia il segno di derivata parziale $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, essendo φ una funzione di $(1+n)$ variabili, l'equazione differenziale in (8.25), è naturalmente una equazione ordinaria e non una equazione alle derivate parziali, (perché le altre derivate parziali di φ *non appaiono* nell'equazione differenziale).

[11] Da (8.26), se $M = \sup_{D \times I} |f|$, si ha

$$\begin{aligned} |\varphi(t; u) - \varphi(\bar{t}; \bar{u})| &\leq |\varphi(t; u) - \varphi(\bar{t}; u)| + |\varphi(\bar{t}; u) - \varphi(\bar{t}; \bar{u})| = \left| \int_{\bar{t}}^{t} \partial_t \varphi(\tau; u) d\tau \right| + e^{Ls} |\bar{u} - u| \\ &= \left| \int_{\bar{t}}^{t} f(\varphi(\tau; u), \tau) d\tau \right| + e^{Ls} |\bar{u} - u| \leq |t - \bar{t}| M + e^{Ls} |\bar{u} - u| \ . \end{aligned}$$

Lemma 8.11 (Gronwall) *Sia I un intervallo, $\delta, \alpha \in (0, \infty)$ e $g \in C(I)$ una funzione continua e positiva tale che, per un qualche $t_0 \in I$,*

$$g(t) \le \delta + \alpha \Big| \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \Big| \ , \qquad \forall\ t \in I \ . \tag{8.27}$$

Allora, per ogni $t \in I$, si ha

$$g(t) \le \delta e^{\alpha |t - t_0|} \ . \tag{8.28}$$

Dimostrazione Supponiamo prima che $t \ge t_0$. Sia $G(t) := \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau$; allora $G \in C^1(I)$ e $G(t_0) = 0$ ed, in più, dal teorema fondamentale del calcolo e da (8.27), consegue

$$G' = g \le \delta + \alpha G \ . \tag{8.29}$$

Moltiplicando tale relazione per $e^{-\alpha t}$, vediamo che essa è equivalente alla diseguaglianza

$$\big(G e^{-\alpha t}\big)' \le \delta e^{-\alpha t} \ . \tag{8.30}$$

Integrando (8.30) tra t_0 e t e ricordando che $G(t_0) = 0$ si ottiene

$$G(t) e^{-\alpha t} \le \delta \frac{e^{-\alpha t_0} - e^{-\alpha t}}{\alpha} \ , \tag{8.31}$$

ovvero $G \le \delta \alpha^{-1} (e^{\alpha(t - t_0)} - 1)$. Ricordando che $g \le \delta + \alpha G$, si ottiene l'asserto (quando $t \ge t_0$). Nel caso $t < t_0$, si ha che $g(t) \le \delta + \alpha \int_t^{t_0} g(\tau)\, d\tau$, e ponendo, come prima, $G(t) := \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau = -\int_t^{t_0} g(\tau) d\tau$, si ottiene che $G' = g \le \delta - \alpha G$ che è equivalente a $(G e^{\alpha t})' \le \delta e^{\alpha t}$. Integrando tale relazione tra t e t_0, si ottiene $-G\alpha \le \delta [e^{\alpha(t_0 - t)} - 1]$ da cui segue che $g \le \delta e^{\alpha(t_0 - t)} = \delta e^{\alpha |t - t_0|}$. ∎

Dimostrazione (della Proposizione 8.10) Ricordando che risolvere (8.16) è equivalente a risolvere

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau), \tau)\, d\tau \tag{8.32}$$

e per l'ipotesi di lipschitzianeità di f, si ha, per ogni $\bar{u}, u_0 \in D_0$,

$$\begin{aligned} |\varphi(t; \bar{u}) - \varphi(t; u_0)| &= |\bar{u} - u_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\varphi(\tau; \bar{u}), \tau) - f(\varphi(\tau; u_0), \tau)]\, d\tau| \\ &\le |\bar{u} - u_0| + L \Big| \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau; \bar{u}) - \varphi(\tau; u_0)|\, d\tau \Big| \ . \end{aligned} \tag{8.33}$$

La (8.26) segue immediatamente dal lemma di Gronwall. ∎

Da (8.26) segue che due soluzioni inizialmente vicine potrebbero allontanarsi l'una dall'altra, per $t > t_0$, ad un tasso *esponenziale*. Ed in effetti tale fenomeno può realmente accadere: basti pensare al caso scalare $u' = au$ con $a > 0$. Allora $\varphi(t; u_0) = e^{at} u_0$ e $|\varphi(t; u_0) - \varphi(t; 0)| = e^{at} |u_0|$. Questa semplice osservazione mostra anche che la costante lipschitziana in (8.26) è ottimale.

Osservazione 8.12 La Proposizione 8.10 può essere estesa in vari modi; ad esempio si ha[12] *Se f è continua in un intorno di (u_0, t_0) e se è $x \to f(x, t) \in C^k(\{u_0\})$ allora φ è $C^k(u_0, t_0)$.*

[12] Esercizio **8.15**.

3 Intervalli di esistenza

Consideriamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ ed un punto $(u_0, t_0) \in \mathring{A}$. Se, in un intorno di (u_0, t_0), f risulta continua (come funzione di (x, t)) e lipschitziana (in x uniformemente in t), sappiamo che esiste una ed una sola soluzione $u(t)$ di (8.16). A priori tale funzione $u(t)$ è definita solo localmente in t cioè in un intorno sufficientemente piccolo di t_0. È naturale chiedersi "quanto" possiamo estendere tale soluzione. Più precisamente poniamo la seguente

Definizione 8.13 *Data una funzione f definita su di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ed a valori in $\mathbb{R}^n$, definiamo $\mathcal{D}_f$ l'insieme (aperto) dei punti $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$ tali che esista una sfera chiusa $D \subseteq A$ centrata in $\bar{x}$ ed un intervallo chiuso I centrato[13] in $\bar{t}$, per cui $f \in C(D \times I)$ e per cui valga (8.18). Sia $(u_0, t_0) \in \mathcal{D}_f$ e sia $u(t)$, con $t \in [t_0 - s, t_0 + s]$ (per un qualche $s > 0$) una soluzione C^1 di (8.16); definiamo $I_f(t_0; u_0)$ come il più grande intervallo aperto contenente t_0 tale che: (i) esista una estensione C^1 di $u(t)$ a tutto[14] $I_f(t_0; u_0)$; (ii) per ogni $\tau \in I_f(t_0; u_0)$, $(u(\tau), \tau) \in \mathcal{D}_f$.*

Se $(u_0, t_0) \in \mathcal{D}_f$, per il Teorema 8.8 esiste una ed una sola soluzione $u \in C^1(I)$, quindi il fatto che per ogni $\tau \in I_f(t_0; u_0)$ si abbia $(u(\tau), \tau) \in \mathcal{D}_f$ implica che u soddisfa l'equazione differenziale $u' = f(u, t)$ su tutto l'intervallo $I_f(t_0; u_0)$. Quindi $I_f(t_0; u_0)$ è *il più grande intervallo per cui esista una (ed una sola) soluzione di* (8.16). La soluzione $u(t)$ di (8.16) definita per $t \in I_f(t_0; u_0)$ viene a volte chiamata la **soluzione massimale** (rispetto al dato iniziale assegnato).

La seguente proposizione dà un criterio sufficiente su f affinché $I_f(t_0; u_0)$ coincida con tutto $\mathbb{R}$.

Proposizione 8.14 *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ e supponiamo che esista una costante $c > 0$ per cui*

$$|f(x,t)| \le c(1 + |x|) \ , \qquad \forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ . \tag{8.34}$$

Allora per ogni $(u_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ esiste una ed una sola soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ del sistema (8.16).

Dimostrazione Si osservi che poiché $f \in C^1(\mathbb{R}^{(n+1)}, \mathbb{R}^n)$ si ha che $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{n+1}$. Fissiamo $(u_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e, procedendo per assurdo, supponiamo che $I_f(t_0; u_0) := (a, b) \neq \mathbb{R}$ cioè che o $a > -\infty$ o $b < \infty$. Consideriamo il caso $b < \infty$ (l'altro caso si tratta in maniera del tutto analoga). Sia $u(t)$ la soluzione massimale su $I_f(t_0; u_0)$. Facciamo innanzitutto vedere che $u(t)$ rimane limitata quando $t \to b$. Poiché $u(t)$ verifica (8.20), dalla (8.34) segue che $|u(t)|$ soddisfa, per $t_0 \le t < b$,

$$|u(t)| \le \delta + c \int_{t_0}^{t} |u(\tau)|\ d\tau \ , \tag{8.35}$$

con $\delta := |u_0| + (b - t_0)c$. Quindi, dal Lemma di Gronwall (con $\alpha = c$) segue che

$$\sup_{t_0 \le t < b} |u(t)| \le \delta e^{c|b - t_0|} := R < \infty \ . \tag{8.36}$$

Sia ora

$$T_0 := b - t_0 \ , \quad L := \sup_{\overline{B}_{2R} \times [t_0 - T_0, t_0 + T_0]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \ . \tag{8.37}$$

[13] Cioè esistono $r, s > 0$ tali che $D = \{x : |x - \bar{x}| \le r\}$, e $I = [\bar{t} - s, \bar{t} + s]$.

[14] Questo significa che esiste una funzione $\tilde{u} \in C^1(I_f(t_0; u_0))$ tale che $\tilde{u}(t) = u(t)$ per ogni t in $(t_0 - s, t_0 + s)$; per semplicità indicheremo tale estensione ancora con la lettera u.

Fissiamo $t_0 < \bar{t} < b$ e $\bar{u} := u(\bar{t})$. Si noti che se

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - \bar{u}| \le R\} \ , \tag{8.38}$$

da (8.36) segue che $D \subseteq \overline{B}_{2R}$ e quindi che

$$\sup_{D\times[\bar{t}-T_0,\bar{t}+T_0]} |f(x,t)| \le c(1+2R) := M \ . \tag{8.39}$$

Inoltre, con L definito in (8.37) vale la (8.18). Se scegliamo

$$T := \min\{ \ \frac{1}{2L} \ , \ \frac{R}{c(1+2R)} \} \ ,$$

vediamo che le condizioni (8.19) del Teorema 8.8 (con dati iniziali $\bar{t}$ e $u(\bar{t}) = \bar{u}$) sono verificate e che T *non dipende da* $\bar{u}$ *e* $\bar{t}$. Prendendo $\bar{t}$ tale che $b-\bar{t} < T/2$ arriviamo ad una contraddizione (perché potremmo estendere la soluzione per valori di $t > b$ contraddicendo la definizione di $I_f(t_0; u_0)$). ∎

Come applicazione consideriamo l'equazione lineare non omogenea

$$u' = A(t)u + b(t) \ , \qquad u(t_0) = u_0 \tag{8.40}$$

dove $A \in C(\mathbb{R}, \mathrm{Mat}(n \times n))$ e $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ con[15]

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\| \le \alpha \ , \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} |b(t)| \le \beta \ , \tag{8.41}$$

per qualche costante α e β. Naturalmente $f(x,t) := A(t)x+b(t)$ è uniformemente lipschitziana in x con costante di Lipschitz α: $|f(x,t) - f(y,t)| = |A(t)(x-y)| \le \|A(t)\| \ |x-y| \le \alpha|x-y|$. Inoltre, se definiamo $c = \max\{\alpha, \beta\}$, otteniamo

$$|A(t)x + b(t)| \le \|A(t)\| \ |x| + |b(t)| \le \alpha|x| + \beta \le c(1 + |x|) \ . \tag{8.42}$$

Quindi, per la Proposizione 8.14, esiste per tutti i tempi una ed una sola soluzione $u(t)$ di (8.40) di classe $C^1(\mathbb{R})$.

In particolare, se A è indipendente dal tempo e $b = 0$, (8.41) è sempre verificata e possiamo prendere $\alpha = \|A\|$, $\beta = 0$, $c = \|A\|$.

Osservazione 8.15 Si noti che la Proposizione 8.14 può essere facilmente estesa al caso in cui f non sia definita su tutto $\mathbb{R}^{n+1}$. Ad esempio, consideriamo (8.40) con $A(t)$ e $b(t)$ continue su di un intervallo aperto (a, b). Allora per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo $A(t)$ e $b(t)$ saranno continue e limitate su $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Con ragionamenti analoghi a quelli usati nella dimostrazione della Proposizione 8.14 si vede facilmente che le soluzioni di (8.40) sono estendibili a tutto $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ e, quindi, per l'arbitrarietà di ε, esse sono estendibili a (a, b).

4 Sistemi lineari

Consideriamo il **sistema lineare omogeneo**

$$u' = A(t)u \ , \tag{8.43}$$

[15] Cioè A è una matrice $n \times n$ i cui elementi di matrice sono funzioni continue su $\mathbb{R}$ e b è un vettore le cui componenti sono funzione continue su $\mathbb{R}$.

con $A(t)$ matrice $(n \times n)$ con elementi a_{ij} che siano funzioni continue su di un intervallo[16] I. In virtù dell'Osservazione 8.15 sappiamo che le soluzioni di (8.43) sono definite (ed uniche) in tutto l'intervallo I. Sebbene, in generale, non sia possibile risolvere esplicitamente sistemi lineari (a coefficienti variabili), non è difficile descrivere la struttura della classe delle soluzioni di tali sistemi.

Se u e v sono due soluzioni di (8.43), lo è anche la combinazione lineare $au(t) + bv(t)$ per ogni valore complesso delle costanti[17] a e b.

Definizione 8.16 *k soluzioni di (8.43), $u^{(1)}$, $u^{(2)}$,...,$u^{(k)}$, si dicono linearmente dipendenti in I se esistono k numeri complessi non tutti nulli, a_1, a_2,...,a_k tali che la funzione vettoriale $t \to \sum_{j=1}^k a_j u^{(j)}(t)$ è identicamente nulla in I.*

Osservazione 8.17 Nel caso in cui (8.43) descriva un'equazione scalare di grado n, si vede subito che la Definizione 8.16 è equivalente a richiedere che la funzione scalare $t \to \sum_{j=1}^k a_j u_1^{(j)}(t)$ (con $u_1^{(j)}(t)$ soluzione dell'equazione scalare) è identicamente nulla in I.

Osservazione 8.18 Supponiamo che $u^{(1)}$, $u^{(2)}$,...,$u^{(k)}$ siano k soluzioni di (8.43), tali che $\sum_{j=1}^k a_j u^{(j)}(t_0) = 0$ per un $t_0 \in I$ e per qualche scelta di costanti a_1,...,a_k non tutte nulle. Allora la funzione $t \to v(t) := \sum_{j=1}^k a_j u^{(j)}(t)$ è soluzione di (8.43) con dato iniziale nullo, $v(t_0) = 0$. Quindi, poiché anche la funzione identicamente nulla soddisfa il medesimo problema di Cauchy[18], per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy si ha che $v := 0$ in I, cioè $u^{(1)}$, $u^{(2)}$,...,$u^{(k)}$ sono *linearmente dipendenti*.

Il prossimo risultato ci dice che non ci possono essere più di n soluzioni indipendenti[19].

Proposizione 8.19 *Siano $u^{(1)}$, $u^{(2)}$,...,$u^{(n)}$, n soluzioni indipendenti di (8.43). Allora per ogni soluzione u di (8.43) esistono $a_j \in \mathbb{C}$ tali che $u = \sum_{j=1}^n a_j u^{(j)}$.*

Prima di dimostrare questa affermazione, facciamo delle osservazioni notazionali. Date n soluzioni $u^{(1)}$, $u^{(2)}$,...,$u^{(n)}$ di (8.43), formiamo la matrice che ha come colonne le componenti delle $u^{(j)}$:

$$U(t) = [u^{(1)}, ..., u^{(n)}] \quad \text{cioe}' \quad U_{ij} = u_i^{(j)} \ . \tag{8.44}$$

Allora

$$AU = A[u^{(1)}, ..., u^{(n)}] = [Au^{(1)}, ..., Au^{(n)}] \tag{8.45}$$

infatti, se $A = (a_{ij})$: $(AU)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} U_{kj} = \sum a_{ik} u_k^{(j)} = (Au^{(j)})_i$. Quindi la matrice $U(t)$ soddisfa

$$U' = [u^{(1)'}, ..., u^{(n)'}] = [Au^{(1)}, ..., Au^{(n)}] = AU \ .$$

Inoltre, $\det U \neq 0$ se e solo le soluzioni $u^{(1)}, ..., u^{(n)}$ sono linearmente indipendenti e per l'Osservazione 8.18 questo accade se e solo se $\det U(t_0) \neq 0$ per un qualche $t_0 \in I$. Infine notiamo che se $c \in \mathbb{C}^n$ allora

$$U(t)c = \sum_{j=1}^n c_j u^{(j)}(t) \tag{8.46}$$

[16] I casi $I = \mathbb{R}$ o $I = (-\infty, b)$, $I = (a, \infty)$ sono ammissibili.

[17] La funzione complessa $z(t) = u(t) + iv(t)$ (con u e v funzioni $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, I intervallo di $\mathbb{R}$) è soluzione di (8.43) se lo sono sia $u(t)$ che $v(t)$ (il che è equivalente a definire $z'(t) = u' + iv'$ che, a sua volta, coincide con il limite del rapporto incrementale $\lim_{h\to 0} \frac{z(t+h)-z(t)}{h}$ con h reale).

[18] Cioè (8.43) e $u(t_0) = 0$.

[19] k soluzioni di (8.43), $\{u^{(j)}\}$, saranno linearmente *indipendenti* in I se $\sum_{j=1}^k a_j u^{(j)}(t) = 0$ implica che $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$.

come si vede subito calcolando la i–esima componente dei vettori a sinistra e a destra di tale relazione.

Dimostrazione (della Proposizione 8.19) Poiché $u^{(1)}$,..., $u^{(n)}$ sono linearmente indipendenti, per una delle osservazioni fatte sopra, segue che la matrice $U(t)$ è invertibile per ogni $t \in I$. Sia $u(t)$ soluzione di (8.43) con $u(t_0) = u_0$ e sia $v(t) = U(t)c$ con $c = U(t_0)^{-1}u_0$. Allora per (8.46) $v(t)$ è soluzione di (8.43) e $v(t_0) = u_0$. Quindi per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy si ha che $v(t) = u(t)$ per ogni $t \in I$. ∎

Definizione 8.20 *Una matrice* $U(t) := [u^{(1)}, ..., u^{(n)}]$ *non singolare*[20] *che soddisfi* $U' = AU$ *si chiama matrice fondamentale (per il sistema* (8.43)*); la funzione* $w(t) := \det U$ *prende il nome di "wronskiano" (della matrice* U *o delle soluzioni* $u^{(1)}$*,...,*$p^{(n)}$*); una matrice fondamentale per* (8.43) *tale che* $U(t_0) = I_n$ *(dove* I_n *è la matrice identità) si chiama soluzione fondamentale di* (8.43) *(relativa al tempo* t_0*).*

Dunque se U è una matrice fondamentale, la soluzione fondamentale di (8.43) rispetto al tempo t_0 è data da $V(t) = U(t)U(t_0)^{-1}$ ed in termini della soluzione fondamentale V, la soluzione di (8.43) con $u(t_0) = u_0$, è data semplicemente da $V(t)u_0$.

Osservazione 8.21 Matrici fondamentali, ovvero n soluzioni indipendenti di (8.43), esistono sempre: siano $u^{(j)}(t)$ le soluzioni di

$$u' = A(t)u \ , \qquad u(t_0) = e^{(j)} \tag{8.47}$$

dove $e^{(j)}$ è il versore in $\mathbb{R}^n$ che ha come componenti tutti 0 tranne la j–esima componente che è 1. L'esistenza e l' unicità su tutto I di tali soluzioni è garantito dal Teorema 8.8 e dalla Osservazione 8.15. Allora $V(t) := [u^{(1)}, ..., u^{(n)}]$ è la soluzione fondamentale di (8.43).

Osservazione 8.22 Dalla Proposizione 8.19 e dall'osservazione precedente segue che *l'insieme di tutte le soluzioni di* (8.43) *formano uno spazio vettoriale di dimensione* n ed una base di tale spazio vettoriale è data da n soluzioni indipendenti $u^{(1)}, ..., u^{(n)}$ (per esempio dalle soluzioni di (8.47)).

L'analisi fatta per i sistemi omogenei può essere usata per discutere i **sistemi lineari non omogenei**

$$u' = A(t)u + b(t) \tag{8.48}$$

con $A(\cdot)$ e $b(\cdot)$ funzioni continue su I a valori, rispettivamente, in $\mathrm{Mat}(n \times n)$ ed in $\mathbb{R}^n$. Ancora per l'Osservazione 8.15, sappiamo che, per ogni u_0 esiste una ed una sola soluzione in tutto l'intervallo I di (8.48) con $u(t_0) = u_0$. Per risolvere il problema di Cauchy per (8.48) (cioè (8.40)) *dobbiamo conoscere la soluzione fondamentale*[21] *del problema omogeneo* $u' = A(t)u$ *ed una qualunque soluzione particolare di* (8.48). Supponiamo infatti che V sia la soluzione fondamentale di $u' = Au$ e che $p(t)$ sia una qualunque soluzione di (8.48), allora si verifica immediatamente che

$$u(t) = p(t) + V(t)(u_0 - p(t_0)) \tag{8.49}$$

è la soluzione di (8.40).

[20] Cioè con $\det U \neq 0$.

[21] Si ricordi che conoscere la soluzione fondamentale V di (8.43) è equivalente a conoscere una qualunque matrice fondamentale U essendo queste legate da $V(t) = U(t)U(t_0)^{-1}$.

Nel caso particolare in cui A sia indipendente dal tempo, la soluzione fondamentale (relativa a t_0) è $V(t) = e^{A(t-t_0)}$ e la soluzione di

$$u' = Au + b(t) \ , \qquad u(t_0) = u_0$$

è data da

$$u(t) = e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} b(\tau)\, d\tau + e^{A(t-t_0)} u_0 \ . \tag{8.50}$$

5 Alcune classi di equazioni risolubili

Equazioni lineari a coefficienti costanti

Si consideri l'equazione differenziale scalare di ordine n a coefficienti costanti

$$Lx := x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0 \ ; \tag{8.51}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ (o anche[22] $a_i \in \mathbb{C}$).

(i) Se

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \ , \tag{8.52}$$

è facile vedere che $P(\lambda) = \det(\lambda - A)$ dove A è la matrice definita in (8.15). $P(\lambda)$ prende il nome di **polinomio caratteristico** dell'equazione (8.51).

(ii) Poichè $\frac{d^j}{dt^j} e^{\lambda t} = \lambda^j e^{\lambda t}$ si ha che, se λ_0 è una radice (in generale complessa) di $P = 0$ (ovvero se $P(\lambda_0) = 0$) allora $e^{\lambda_0 t}$ è soluzione di (8.51). Infatti $L(e^{\lambda_0 t}) = P(\lambda_0) e^{\lambda_0 t} = 0$.

(iii) Si dice che λ_0 è una radice di ordine m di $P = 0$ se esiste un polinomio (a coefficienti complessi) $g(\lambda)$ tale che $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda)$ e $g(\lambda_0) \neq 0$.
Allora, se λ_0 è una radice di ordine m di $P = 0$, $t^j e^{\lambda_0 t}$ è soluzione di (8.51) per ogni $0 \le j < m$.
Infatti, se $z(t;\lambda) := e^{\lambda t}$ allora

$$Lz = z\ P(\lambda) = z\ (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda) \ ,$$

e l'asserto si ottiene derivando rispetto a λ (e calcolando in λ_0) tale relazione.

Da (ii), (iii) e dal teorema fondamentale dell'algebra[23] segue che *vi sono n soluzioni distinte della forma $t^j e^{\lambda t}$ di (8.51) dove se λ è una radice semplice di $P(\lambda) = 0$ allora $j = 0$, mentre se λ è una radice di ordine $m \le n$, allora $0 \le j < m$.*

Se λ è una radice di ordine m di $P = 0$ e se i coefficienti a_i sono reali allora anche $\bar\lambda$ è una radice di ordine m. Dunque[24] $L(t^j e^{\bar\lambda t}) = 0$ ovvero *anche $t^j e^{\bar\lambda t}$ è soluzione di* (8.51). Poiché l'equazione (8.51) è lineare si che, se $z := t^j e^{\lambda t}$, anche $(z+\bar z)/2 := \mathrm{Re}\,(z)$ e $(z-\bar z)/(2i) := \mathrm{Im}\,(z)$ sono soluzioni. In altri termini, *se $\lambda := \alpha + i\beta$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) è una radice di ordine m di $P = 0$, sono soluzioni di* (8.51) *le $2m$ funzioni reali $t^j e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ e $t^j e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,(\beta t)$ per $0 \le j < m$.*

(iv) Poichè le soluzioni $t^j e^{\lambda t}$ (al variare di j e λ) sono tra loro indipendenti, da § 4 segue che *tutte le soluzioni di* (8.51) *sono delle combinazioni lineari delle funzioni $t^j e^{\lambda t}$ (ovvero, nel caso $a_i \in \mathbb{R}$, sono delle combinazioni lineari di $t^j e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ e $t^j e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,(\beta t)$).*

---

[22] Si ricordi la nota 17.

[23] *Se $P(z)$ è un polinomio complesso di ordine n, l'equazione $P(z) = 0$ ha n soluzioni in $\mathbb{C}$ (contando le molteplicità).*

[24] Si ricordi che $\overline{(e^{\alpha})} = e^{\bar\alpha}$.

Sistemi lineari a coefficienti costanti

Dall'Osservazione 7.5 segue che se A è una matrice (indipendente dal tempo), $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$, con I intervallo in $\mathbb{R}$, allora il vettore $u(t)$ definito come

$$u(t) = e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} b(\tau)\, d\tau \tag{8.53}$$

soddisfa

$$u' = Au + b\ , \qquad u(t_0) = 0\ . \tag{8.54}$$

Equazioni scalari, lineari del prim'ordine

Si dimostra che se $a(t)$ e $b(t)$ sono due funzioni continue sull'intervallo I e $t_0 \in I$, l'unica soluzione $u \in C^1(I)$ di

$$u' = a(t)u + b(t)\ , \qquad u(t_0) = u_0 \tag{8.55}$$

è data da

$$u(t) = e^{g(t)} \Big(\int_{t_0}^{t} e^{-g(\tau)} b(\tau) d\tau + u_0 \Big) \tag{8.56}$$

dove $g(t) := \int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau$.

Equazioni a variabili separabili

Si consideri l'equazione differenziale (scalare)

$$u' = f(u)g(t)\ , \qquad u(t_0) = u_0\ , \tag{8.57}$$

dove f è una funzione continua in un intorno di u_0 e g è una funzione continua in un intorno di t_0.

(i) Se $f(u_0) = 0$, $u(t) := u_0$ è soluzione di (8.57) e se assumiamo in più che f sia lipschitziana in u_0, allora $u(t) := u_0$ è *l'unica* soluzione di (8.57).

(ii) Assumiamo ora che $f(u_0) \neq 0$. Poiché la funzione f è continua e la funzione u è C^1, esiste un intorno di t_0 tale che $f(u(t)) \neq 0$ e mantiene il segno di u_0. Dividendo, in (8.57) per $f(u)$ otteniamo

$$\frac{u'}{f(u)} = g(t) \tag{8.58}$$

integrando fra t_0 e t, usando il teorema del cambio di variabili per integrali in $\mathbb{R}$, e ricordando che $u(t_0) = u_0$, otteniamo

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u'(\tau)}{f(u(\tau))} d\tau = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{f(v)} dv = \int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau\ . \tag{8.59}$$

D'altra parte la funzione $F(u) := \int_{u_0}^{u} \frac{1}{f(v)} dv$ è C^1 e $F'(u_0) = \frac{1}{f(u_0)} \neq 0$ dunque F è invertibile. Quindi l'unica soluzione di (8.57) è data da $G(\int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau)$ dove G denota la funzione inversa di F.

Equazioni scalari conservative del second'ordine

Sia $V \in C^1(I, \mathbb{R})$, I intervallo di $\mathbb{R}$ e si consideri, per $x_0 \in I$, la seguente equazione differenziale del secondo ordine (e non lineare):

$$\ddot{x} + V'(x) = 0 \ , \qquad x(t_0) = x_0 \ , \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \ . \tag{8.60}$$

(i) Si dimostri che se

$$E(t) := \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + V(x(t))$$

denota l'"energia al tempo t" della funzione $x(t)$ e se $t \in (a, b) \to x \in I$ è soluzione di (8.60), allora

$$E(t) = E(t_0) := \frac{1}{2}v_0^2 + V(x_0) \ , \qquad \forall \ t \in (a, b) \ .$$

(ii) Si riconduca la soluzione dell'equazione (8.60) alla soluzione di un'equazione a variabili separabili (si veda § 5).

6 Stabilità in sistemi lineari a coefficienti costanti

Consideriamo il sistema (omogeneo) di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$u' = Au \tag{8.61}$$

con $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ matrice indipendente dal tempo.

Definizione 8.23 *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di equilibrio per (8.61), se la funzione costante $u(t) := x_0$ è soluzione di (8.61).*

Quindi x_0 è un punto di equilibrio per (8.61) se e solo se $Ax_0 = 0$; dunque 0 è *sempre* un punto d'equilibrio per (8.61) e $x_0 \neq 0$ è un equilibrio se e solo se x_0 è un autovettore di A con autovalore nullo. Il problema che ora ci poniamo è come evolvono dati iniziali *vicini* ad un punto di equilibrio, ossia come si comportano, per $t \gg 1$, le soluzioni $e^{At}x$ di (8.61), quando il dato iniziale x è vicino ad x_0.

Definizione 8.24 *Un punto di equilibrio x_0 per (8.61) si dice stabile (secondo Liapunov) se $\forall \ \varepsilon > 0$, $\exists \ \delta > 0$ tale che $|e^{At}x - x_0| \le \varepsilon$ per ogni $t > 0$ e per ogni $|x - x_0| \le \delta$. Un punto di equilibrio stabile x_0 si dice asintoticamente stabile se $\exists \ \delta > 0$ tale che $\lim_{t\to\infty} e^{At}x = x_0$, per ogni $|x - x_0| \le \delta$. Un punto di equilibrio asintoticamente stabile si chiama anche "attrattore" per (8.61).*

Se x_0 è un autovettore con autovalore nullo, allora *tutta la retta* $\ell_{x_0} := \{sx_0 : s \in \mathbb{R}\}$ è formata da punti di equilibrio essendo $A(sx_0) = sAx_0 = 0$. Quindi se esiste un autovettore x_0 con autovalore nullo, *non ci può essere alcun punto di equilibrio asintoticamente stabile.*
Se x_0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile, necessariamente $x_0 = 0$ e A non ha alcun autovettore con autovalore nullo. Inoltre se 0 è asintoticamente stabile, allora $\lim_{t\to\infty} e^{At}x = 0$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$. Sia infatti $\delta > 0$ quello della definizione di stabilità asintotica, e sia $x \neq 0$ un qualunque vettore di $\mathbb{R}^n$, allora se poniamo $a = \frac{\delta}{2|x|}$, il vettore ax ha norma uguale a $\frac{\delta}{2}$ ed è quindi all'interno della sfera di raggio δ centrata nell'origine. Allora, $|e^{At}x| = a^{-1}|e^{At}(ax)| \to 0$, se $t \to \infty$.
Si noti che, facendo un eventuale cambio di coordinate ($y = x - x_0$), possiamo sempre ridurci al caso in cui il punto di equilibrio sia l'origine.

Se A possiede un autovettore con autovalore avente parte reale strettamente positiva, allora 0 è un *punto di equilibrio instabile*: infatti è facile vedere che se $Av = \lambda v$, allora $e^{At}v = e^{\lambda t}v$. Dunque se $Av = \lambda v$ e $\operatorname{Re}\lambda > 0$, allora per ogni $\delta > 0$, possiamo trovare, all'interno della sfera di raggio δ attorno all'origine, un vettore w tale che $\lim_{t\to\infty} |e^{At}w| = \infty$: basta prendere $w = av$ con $a = \frac{\delta}{2|v|}$. In tal caso $|e^{At}w| = a|e^{At}v| = a|e^{\lambda t}v| = a|v|e^{t\operatorname{Re}\lambda} \to \infty$ quando $t \to \infty$. E questo dimostra che l'origine è instabile.

Concludiamo questa discussione con un criterio sufficiente affinché 0 sia un punto di equilibrio stabile o asintoticamente stabile.

Proposizione 8.25 *Supponiamo che A sia diagonalizzabile e che tutti gli autovalori abbiano parte reale minore o uguale a 0. Allora l'origine $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile. Se A è diagonalizzabile e tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa, allora $x = 0$ è asintoticamente stabile.*

Dimostrazione Sappiamo che se $T \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ è una matrice invertibile, allora $T^{-1}e^{A}T = e^{T^{-1}AT}$; inoltre se $D = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n)$ è la matrice diagonale avente sulla diagonale i numeri complessi d_1,...,d_n, allora $\|D\| = \max |d_i|$. Sia, dunque, T la matrice che diagonalizza A: $T^{-1}AT = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Dalle osservazioni appena fatte segue che

$$\begin{aligned} \|e^{At}v\| &= \|TT^{-1}e^{At}TT^{-1}v\| = \|Te^{T^{-1}AtT}T^{-1}v\| = \|Te^{\Lambda t}T^{-1}v\| \\ &\leq \|T\|\,\|e^{\Lambda t}\|\,\|T^{-1}\|\,|v| = \|T\|\,\|T^{-1}\|\,|v| \max_{1\leq i\leq n} e^{(\operatorname{Re}\lambda_i)t}\,. \end{aligned}$$

Da tale stima segue subito l'asserto. ∎

In effetti, utilizzando la forma canonica di Jordan, si dimostra in maniera del tutto analoga la stessa affermazione senza l'ipotesi di diagonalizzabilità per A.

7 *Esercizi e complementi*

Esercizio 8.1 Si dimostri che se se u è soluzione di (8.5) allora vale la stima $|u(t)| \leq |u_0|e^{\|A\|\,|t|}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.2 Si dimostri l'affermazione fatta nell'Osservazione 8.17.

Esercizio 8.3 Dimostrare che se $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ con D sfera chiusa in $\mathbb{R}^n$, allora f è uniformemente lipschitziana in D e come costante di Lipschitz può prendersi

$$L = \sup_{x\in D} \|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\|\,. \tag{8.62}$$

Esercizio 8.4 Si dimostri che le funzioni

$$u_1(t) := \begin{cases} 0\,, & \text{se } t \leq 0\,, \\ t^3/27\,, & \text{se } t > 0\,, \end{cases} \qquad u_2(t) := \begin{cases} t^3/27\,, & \text{se } t \leq 0\,, \\ 0\,, & \text{se } t > 0\,, \end{cases} \tag{8.63}$$

sono (altre) soluzioni di (8.10).

Esercizio 8.5 Perché la (8.53) non fornisce, in generale, una soluzione nel caso $A = A(t)$?

Esercizio 8.6 (i) Sia $A := \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ e si calcoli e^A.
(ii) Si verifichi che se $G(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sen}\tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} d\tau$, allora $GG' \neq G'G$ e $G'e^G \neq (e^G)' \neq e^G G'$.
(iii) Si faccia vedere tramite un esempio che la formula (8.56) può non valere per sistemi lineari in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.

Esercizio 8.7 Sia $t \in I \to A(t)$ una funzione continua dall'intervallo I a valori matrici $(n \times n)$ e sia $G(t) := \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ con $t_0, t \in I$. Assumendo che G e A commutino, cioè che $AG = GA$, si dimostri che l'unica soluzione $u \in C^1(I)$ di

$$u' = A(t)u + b(t) \ , \qquad u(t_0) = u_0 \tag{8.64}$$

dove $b : I \to \mathbb{R}^n$ è una funzione continua assegnata è data da

$$u(t) = e^{G(t)} \Big(\int_{t_0}^t e^{-G(\tau)} b(\tau) d\tau + u_0 \Big) \ . \tag{8.65}$$

Esercizio 8.8 Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = f(t) \ , \qquad t \in I \ , \tag{8.66}$$

dove I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e a, b e f sono funzioni continue su I.
(i) Si trovi una soluzione di (8.66) assumendo che si conoscano le soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0 \ . \tag{8.67}$$

(ii) Si dimostri che tutte le soluzioni di (8.66) hanno la forma

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + p \tag{8.68}$$

dove u_1 e u_2 sono soluzioni indipendenti di (8.67) e $p(t)$ è una qualunque soluzione di (8.66).
(iii) Si scrivano esplicitamente (in termini di f) tutte le soluzioni di (8.66) nel caso in cui i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ siano costanti: $a(t) := a$ e $b(t) := b$.

Esercizio 8.9 Sia $x(t)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = f(t) \ , \qquad x(0) = 1 \ , \qquad \dot{x}(0) = -1 \ , \tag{8.69}$$

dove f è una funzione continua su $\mathbb{R}$ con $\int_{\mathbb{R}} |f| dt < \infty$ e si trovi, se esiste, il $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

Esercizio 8.10 Sia u il punto fisso della contrazione Φ_a definita in **7.40**. Quale equazione differenziale soddisfa u?

Esercizio 8.11 Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \dot{x}^2 + \operatorname{senh} x = 0 \ , \quad \dot{x}(0) = 0 \ , \ x(0) = \alpha \ . \tag{8.70}$$

(i) Si trovi $T > 0$ tale che esista un'unica soluzione di (8.70) per $|t| \leq T$.
(ii) Si denoti con $x(t; \alpha)$ la soluzione di (8.70) per $|t| \leq T$ e si calcoli il limite $\lim_{\alpha\to 0} x(t; \alpha)$ per ogni $|t| \leq T$.
(iii) Il limite definito al punto (ii) è uniforme in $t \in [-T, T]$?

Esercizio 8.12 Sia $y(x)$ la soluzione di $(1 - x)y' = 1 + x - y$, $y(0) = 0$. Usando l'equazione differenziale si calcolino tutte le derivate di $y(x)$ in $x = 0$; determinare il raggio di convergenza della serie di Taylor di $y(x)$ e si concluda che in un intorno di $x = 0$ la soluzione $y(x)$ è analitica.

Esercizio 8.13 Sia $T > 0$ e sia $f \in C^1(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, con A aperto di $\mathbb{R}^n$ e f T–periodica: $f(x, t+T) = f(x, t)$ per ogni $(x, t) \in A \times \mathbb{R}$. Dimostrare che se $x(t)$ è soluzione di $\dot{x} = f(x, t)$, $x(0) = x_0$ e se $x(T) = x_0$ allora x è T–periodica ovvero $x(t + T) = x(t)$ per ogni t.

Esercizio 8.14 (Teorema di Picard) Iterando direttamente la mappa ϕ in (8.21), si dia una dimostrazione del Teorema 8.8 senza usare il teorema di punto fisso. Si dimostri che, in tal modo, il Teorema 8.8 vale *senza l'ipotesi* $TL < 1$. Dunque *il tempo di esistenza può essere definito come* $T := \min\{T_0, r/M\}$.

Esercizio 8.15 (Dipendenza C^k dai dati iniziali) Si dimostrino i seguenti risultati sulla dipendenza regolare dai dati iniziali delle soluzioni di equazioni differenziali. Usando le notazioni del Teorema 8.8 si ha:

(i) *Se* f *e* f_x *sono continue su* $D \times I$ *allora la soluzione* $u(t) := \varphi(t; x)$ *di* (8.16) *con* $u_0 := x$ *è di classe* $C^1(\{x, u_0\})$.

(ii) *Se tutte le derivate di* f *rispetto a* x_j *di ordine* $k \geq 1$ *sono continue su* $D \times I$ *allora la soluzione* $u(t) := \varphi(t; x)$ *di* (8.16) *con* $u_0 := x$ *è di classe* $C^k(\{x, u_0\})$.

Capitolo 9

Introduzione alla teoria di Fourier

Osservazione 9.1 In questo capitolo, "f integrabile su I" con I intervallo reale, significa che f è integrabile su $I \backslash \{x_1, ..., x_N\}$ con $x_i \in I$, in senso di Riemann generalizzato (o improprio).

1 Serie di Fourier

Funzioni periodiche e polinomi trigonometrici

Una funzione f di variabile reale si dice **periodica di periodo** $T > 0$ se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se f è una funzione periodica di periodo T, la funzione $\tilde{f}$ definita da $\tilde{f}(x) := f(x\frac{T}{2\pi})$ è periodica di periodo 2π; pertanto considereremo solo funzioni di periodo[1] 2π.

Definizione 9.2 $C^p_{\text{per}} := \{f \in C^p(\mathbb{R}) : \ f(x+2\pi) = f(x) \ , \quad \forall \ x \in \mathbb{R}\}$.

Esempi naturali di funzioni C^∞_{per} (o meglio C^ω_{per}) sono le costanti, $\operatorname{sen} x, \cos x, \ \operatorname{sen} 2x, \cos 2x$,... e loro combinazioni lineari:

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \ , \qquad a_n, b_n \in \mathbb{R} \ ; \tag{9.1}$$

(il ruolo, del tutto formale, del fattore $1/2$ davanti alla costante a_0 apparirà chiaro in seguito). Una tale espressione si chiama *polinomio trigonometrico (reale) di grado* N. Una classe assai più vasta di funzioni periodiche si ottiene considerando limiti, per N che tende ad infinito, di polinomi trigonometrici:

Proposizione 9.3 *Siano* $\{a_n\}_{n\geq 0}, \{b_n\}_{n\geq 1}$ *due successioni di numeri reali tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \ n^p < \infty \ . \tag{9.2}$$

Allora, $s_N(x)$ *(definito in (9.1)) converge, per* N *che tende ad infinito, uniformemente su* $\mathbb{R}$ *ad una funzione* $f \in C^p_{\text{per}}$.

[1] Per le formule relative al caso generale si veda **9.11**.

Il limite di polinomi trigonometrici ossia un'espressione della forma

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\,\mathrm{sen}\,nx) \tag{9.3}$$

prende il nome di *serie di Fourier*; dunque il risultato appena esposto può essere riformulato dicendo: "*se i numeri a_n e b_n soddisfano* (9.2) *allora la serie di Fourier* (9.3) *ad essi associata converge uniformemente su* $\mathbb{R}$ *e definisce una funzione di classe* $C^p_{\rm per}$".

Dimostrazione (della Proposizione 9.3) Grazie a (9.2), per ogni $0\le k\le p$, la serie delle derivate $\sum u_n^{(k)}$, con $u_0:=a_0/2$ e (per $n\ge 1$) $u_n:=a_n\cos nx+b_n\,\mathrm{sen}\,nx$, converge totalmente in $\mathbb{R}$ e la Proposizione 5.27 implica che $\sum u_n$ converge ad una funzione $f\in C^p(\mathbb{R})$. La periodicità di f deriva dalla periodicità di s_N:

$$f(x+2\pi)=\lim_{N\to\infty}s_N(x+2\pi)=\lim_{N\to\infty}s_N(x)=f(x)\ . \quad \blacksquare$$

L'ipotesi (9.2) implica, in particolare, che $\max\{|a_n|,|b_n|\}\le M/n^p$.

Più interessante è la questione inversa: *data una funzione $f\in C^p_{\rm per}$, trovare una successione di polinomi trigonometrici che converga ad f.*

Prima di analizzare tale questione, si noti che $\cos nx$ e $\mathrm{sen}\,nx$ sono, rispettivamente, la parte reale ed immaginaria di e^{inx}: questa osservazione suggerisce una riscrittura più compatta, in forma complessa, dei polinomi trigonometrici (9.1). Ponendo

$$c_0:=\frac{a_0}{2}\ ,\qquad c_{\pm n}:=\frac{a_n\mp ib_n}{2}\qquad (\forall\ n\ge 1)\ , \tag{9.4}$$

ed osservando che la "trasformazione inversa" di tale relazione (ossia la relazione che dà gli a_n e b_n in termini dei $c_{\pm n}$) è data da

$$a_0=2c_0\ ,\quad \text{e per } n\ge 1\ ,\quad a_n=c_n+c_{-n}\ ,\quad b_n=ic_n-ic_{-n}\ , \tag{9.5}$$

si ha che[2]

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\|n|\le N}}c_n\,e^{inx} &= c_0+\sum_{n=1}^{N}(c_n+c_{-n})\cos nx+(ic_n-ic_{-n})\,\mathrm{sen}\,nx\\ &:= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos nx+b_n\,\mathrm{sen}\,nx\ :=\ s_N(x)\ .\end{aligned} \tag{9.7}$$

Osservazione 9.4 (i) Nel caso che stiamo considerando a_n e b_n sono numeri reali e quindi $c_{-n}=\bar c_n$ (dove, come al solito al barra denota "complesso coniugato"). Naturalmente avrebbe

[2] Se z_n, per $n\in\mathbb{Z}$, sono numeri complessi, i simboli

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\|n|\le N}}z_n\ ,\qquad \sum_{n=-N}^{N}z_n\ ,\qquad \sum_{-N}^{N}z_n \tag{9.6}$$

denotano, per N intero positivo, la somma $z_{-N}+z_{-N+1}+\cdots+z_{N-1}+z_N$; naturalmente il simbolo $\sum_{n=-N}^{M}z_n$ o (qualora non vi sia ambiguità) $\sum_{-N}^{M}z_n$, denoterà la somma $z_{-N}+z_{-N+1}+\cdots+z_{M-1}+z_M$; i simbolo $\sum_{n\in\mathbb{Z}}z_n$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n$ o $\sum_{-\infty}^{\infty}z_n$ denotano il limite, qualora esista, $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}z_n$ [per le definizione sulla convergenza di successioni o serie complesse si veda Sezione 2].

senso considerare il caso (apparentemente più generale) in cui a_n e b_n sono numeri complessi, nel qual caso i polinomi trigonometrici $s_N(x)$ sarebbero delle funzioni complesse di variabile reale. In questo capitolo considereremo *polinomi trigonometrici e serie di Fourier reali* anche se useremo spesso la notazione complessa che presenta dei vantaggi dal punto di vista algebrico[3]

(ii) Si noti che per ogni coppia di numeri reali α e β si ha[4]

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \le |\alpha|+|\beta| \le \sqrt{2}\ \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\ . \tag{9.8}$$

Si noti anche che, se a_n, b_n e c_n sono legati da (9.4) (e $b_0 := 0$), si ha

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\ \sqrt{a_n^2+b_n^2}\ , \qquad \forall\ n \ge 0\ . \tag{9.9}$$

Dunque (se a_n, b_n e c_n sono legati da (9.4)) la condizione (9.2) è equivalente a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|\ |n|^p < \infty\ , \tag{9.10}$$

e la Proposizione 9.3 può essere riformulata come segue

se $\bar{c}_n = c_{-n}$ *e* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n||n|^p < \infty$ *allora* $f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \in C^p_{\rm per}$.

Coefficienti di Fourier

Sia $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ una serie di Fourier con $\sum |c_n| < \infty$ [cosicché $f \in C_{\rm per}$]. È possibile calcolare i numeri c_n (o, equivalentemente, i numeri a_n e b_n) dalla sola conoscenza della funzione $f(x)$? La risposta (affermativa) è contenuta nella seguente

Proposizione 9.5 *Siano c_n, per $n \in \mathbb{Z}$, numeri complessi tali che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ e sia $f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Allora*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx\ . \tag{9.11}$$

Dalle relazioni (9.4) ne consegue che i numeri a_n e b_n sono dati da

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \quad (n\ge 0), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,{\rm sen}\, nx\ dx \quad (n \ge 1)\ . \tag{9.12}$$

Dimostrazione (della Proposizione 9.5) Dalla Proposizione 5.26 segue che[5]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx &= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{|m|\le N} c_m e^{imx}e^{-inx}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{|m|\le N} c_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}dx = c_n\ . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Motivati da questa discussione (e cambiando punto di vista!) diamo la seguente

[3]Per le definizioni e proprietà fondamentali relative a funzioni complesse di variabile reale ossia a funzioni $f: E\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ si veda Sezione 2.

[4]La prima disuguaglianza si verifica elevando al quadrato e la seconda deriva dalla disuguaglianza di Cauchy (1.5) con $y_i = 1$.

[5] (i) Qui stiamo usando la versione della Proposizione 5.26 per funzioni complesse di variabile reali: si veda Sezione 2.(ii) Si ricordi anche che $\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx$ è nullo se $0 \ne k \in \mathbb{Z}$ ed è uguale a 2π se $k = 0$. (iii) Qui ed in seguito espressioni quali $\sum_{|m|\le N} z_m$ sono abbreviazioni per $\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ |m|\le N}} z_m$.

Definizione 9.6 *Sia f una funzione periodica di periodo 2π ed integrabile su $[0, 2\pi]$. Si chiamano coefficienti di Fourier di f i numeri complessi*

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \ , \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z}. \tag{9.13}$$

Osservazione 9.7 (i) Anche i numeri a_n e b_n definiti in (9.12) (per f una funzione periodica di periodo 2π ed integrabile su $[0, 2\pi]$) vengono, a volte, chiamati coefficienti di Fourier di f (o coefficienti "reali" di Fourier di f).

(ii) Naturalmente il ruolo dell'intervallo $[0, 2\pi]$ può esser giocato da un *qualunque intervallo lungo* 2π poiché la conoscenza di f su di un qualunque intervallo lungo quanto il suo periodo permettere di ricostruire f su tutto $\mathbb{R}$. Ad esempio si ha: *se $f(x)$ è una funzione periodica ed integrabile su $[0, 2\pi]$ allora l'integrale su un qualunque intervallo lungo 2π coincide con l'integrale tra 0 e 2π.* Infatti, per ogni $a < b$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $\int_{a+2k\pi}^{b+2k\pi} f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ (si ponga $t = x + 2k\pi$), dunque, per ogni x_0,

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)dx &= \int_{x_0}^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{x_0+2\pi} f(x)dx \\
&= \int_{x_0}^{2\pi} f(x)dx + \int_0^{x_0} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx \ .
\end{aligned}$$

In particolare, se f è periodica ed integrabile su $[0, 2\pi]$ tale è $f(x)e^{-inx}$ e dunque il calcolo dei coefficienti di Fourier di f può essere fatto sostituendo $[0, 2\pi]$ con un qualunque intervallo lungo 2π. Ad esempio, è, a volte, utile usare la formula

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \ . \tag{9.14}$$

Alcune proprietà dei coefficienti di Fourier sono contenute nella seguente

Proposizione 9.8 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π a quadrato sommabile (ossia, con $|f|^2$ integrabile) su $[0, 2\pi]$. Allora*

(i) $\quad |\hat{f}_n| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|dx \qquad (\forall\ n \in \mathbb{Z})$;

(ii) $\quad \bar{\hat{f}}_n = \hat{f}_{-n}$, $\qquad$ *($\forall\ n \in \mathbb{Z}$);*

(iii) $\quad \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \Big|f(x) - \sum_{|n|\le N} \hat{f}_n e^{inx}\Big|^2 dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{|n|\le N} |\hat{f}_n|^2$;

(iv) $\quad \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$;

(v) $\quad \displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} |\hat{f}_n| = 0$;

(vi) $\quad \widehat{(f^{(k)})}_n = (in)^k \hat{f}_n$, *(per $f \in C^p_{\rm per}$, $\forall\ 0 \le k \le p$, $\forall\ n$);*

(vii) $\quad$ *se $f \in C^p_{\rm per}$, allora:* $\quad \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2\ |n|^{2k} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(x)|^2 dx$, $\forall\ 0 \le k \le p$, $\forall\ n$.

Dimostrazione (della Proposizione 9.8)
La (i) è conseguenza immediata di (3.35) e del fatto che $|e^{inx}| = 1$.
La (ii) è conseguenza immediata delle definizioni date.

(iii): Espandendo l'integrando si trovano, oltre $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx$, i seguenti due termini[6]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{|n|\le N}\hat f_n e^{inx}\Big|^2\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{|n|\le N}\hat f_n e^{inx}\Big)\Big(\sum_{|m|\le N}\bar{\hat f}_m e^{-imx}\Big)\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{|n|\le N}\hat f_n\sum_{|m|\le N}\bar{\hat f}_m\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)x}\,dx\\
&= \sum_{|n|\le N}|\hat f_n|^2\ ,
\end{aligned}$$

e[7]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\,\mathrm{Re}\Big(f(x)\sum_{|n|\le N}\hat f_n e^{inx}\Big)dx &= 2\,\mathrm{Re}\Big(\sum_{|n|\le N}\hat f_n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{inx}dx\Big)\\
&:= 2\,\mathrm{Re}\Big(\sum_{|n|\le N}\hat f_n\hat f_{-n}\Big) = 2\sum_{|n|\le N}|\hat f_n|^2\ .
\end{aligned}$$

Mettendo assieme tali termini si ottiene l'asserto.
(iv): La relazione in (iii) mostra, tra l'altro, che $\sum_{|n|\le N}|\hat f_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx$ per ogni N e prendendo il limite per $N\to\infty$ si ottiene la (iv).
La (v) è implicata dalla convergenza della serie in (iv).
(vi): Si noti che se $f\in C^1_{\rm per}$ allora[8] $f'\in C_{\rm per}$. Dunque

$$\widehat{(f')}_0 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)dx = \frac{1}{2\pi}\Big[f(x)\Big]_0^{2\pi} := \frac{1}{2\pi}(f(2\pi)-f(0)) = 0\ ,$$

che è la (vi) per $k=1$ e $n=0$; poiché tale relazione può essere iterata, la (vi) è vera per $n=0$ e per ogni $k\le p$. Sia ora $n\neq 0$. Essendo $f\in C^1_{\rm per}$, integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\hat f_n &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\Big(\frac{e^{-inx}}{-in}\Big)'dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{f(x)e^{-inx}}{-in}\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi}f'(x)e^{-inx}dx := \frac{1}{in}\widehat{(f')}_n\ ,
\end{aligned}$$

che è la (vi) per $k=1$ e $n\neq 0$. Iterando tale relazione si ottiene l'asserto.
(vii): Applicando la (iv) a $f^{(k)}$ (che per le ipotesi è integrabile) ed usando la (vi) si ottiene la relazione (vii). ∎

Osservazione 9.9 (i) La relazione in (iv) viene, a volte, chiamata la *disuguaglianza di Bessel*.
(ii) I vari asserti della Proposizione 9.8 possono essere letti in termini dei coefficienti di Fourier "reali" a_n e b_n (9.12) facendo uso delle relazioni (9.4) o (9.5) con $c_n := \hat f_n$. Ad esempio, se

---

[6] Si ricordi che, se z e w sono numeri complessi, allora $|z+w|^2 = (z+w)(\bar z+\bar w) = |z|^2+|w|^2+2\,\mathrm{Re}\,(z\bar w)$; si usi il punto (ii) della nota 5.

[7] Si usi il punto (ii) e si osservi anche che se $u:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ è integrabile allora $\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,u(x)dx = \mathrm{Re}\int_0^{2\pi}u(x)dx$.

[8] $f'(x+2\pi) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+2\pi+h)-f(x+2\pi)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$.

denotiamo con $a_n^{(k)}$ e $b_n^{(k)}$ i coefficienti "reali" di Fourier di $f^{(k)}$, la (vi) diventa

$$a_n^{(k)} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}}\ n^k a_n, & \text{se } k \text{ è pari,} \\ \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}\ n^k b_n, & \text{se } k \text{ è dispari,} \end{cases}$$
$$b_n^{(k)} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}}\ n^k b_n, & \text{se } k \text{ è pari,} \\ \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}}\ n^k a_n, & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases} \tag{9.15}$$

(iii) Dal punto (vii) segue che se $f \in C^p_{\rm per}$, $|\hat{f}_n|^2|n|^{2p} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f^{(p)}(x)|^2dx$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e quindi (maggiorando l'integrando con $\sup_{\mathbb{R}}|f^{(p)}(x)|^2$ e prendendo la radice quadrata) si ottiene

$$f \in C^p_{\rm per} \qquad \Longrightarrow \qquad |\hat{f}_n| \le \frac{M_p}{|n|^p} \quad (\forall\ n \in \mathbb{Z}), \quad \text{con } M_p := \sup_{\mathbb{R}}|f^{(p)}(x)|\ . \tag{9.16}$$

(iv) *Se f è integrabile su $[0, 2\pi]$ allora $\hat{f}_n \to 0$ quando $n \to \infty$* ("Lemma di Riemann–Lebesgue[9]"). Infatti, sia $f_k(x)$ definita come $f(x)$ per $x \in [0, 2\pi - \frac{1}{k})$ e 0 altrimenti. Tale funzione f_k è chiaramente a quadrato sommabile (essendo limitata) ed inoltre dalla definizione di integrale di Riemann segue che $\int_0^{2\pi}|f - f_k| \to 0$ per $k \to \infty$. Dato $\varepsilon > 0$ sia k tale che $\int_0^{2\pi}|f - f_k| < \varepsilon/2$. Essendo f_k a quadrato sommabile, dalla Proposizione 9.8, punto (v) segue che esiste N tale che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $|n| > N$ si ha $|\hat{f}_{k,n}| < \varepsilon/2$. Allora, per ogni $|n| > N$ si ha: $|\hat{f}_n| \le |\hat{f}_n - \hat{f}_{k,n}| + |\hat{f}_{k,n}| = \left|\int_0^{2\pi}(f(x) - f_k(x))e^{-inx}dx\right| + |\hat{f}_{k,n}| \le \int_0^{2\pi}|f(x) - f_k(x)|dx + |\hat{f}_{k,n}| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dall'arbitrarietà di ε segue l'asserto. ∎

(v) Discutiamo un po' più in dettaglio la relazione fondamentale che c'è tra *regolarità* di una funzione periodica ed il *decadimento* (per $|n| \to \infty$) dei suoi coefficienti di Fourier. Il punto (vii) della Proposizione 9.8 è un *parziale* "viceversa" della Proposizione 9.3. Infatti, come già osservato nell'Osservazione 9.4 punto (ii), la Proposizione 9.3 è equivalente a:

se $\bar{c}_n = c_{-n}$ e $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n||n|^p < \infty$ allora $f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \in C^p_{\rm per}$.

Mentre il punto (vii) implica

se $f \in C^p_{\rm per}$ allora $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}_n|^2|n|^{2p} < \infty$;

ma quest'ultima condizione è *più debole* della condizione $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}_n||n|^p < \infty$. Quindi queste relazioni non ci permettono di *caratterizzare esattamente* le funzioni $C^p_{\rm per}$ (con $p < \infty$) in termini del decadimento dei loro coefficienti di Fourier. Invece dalla discussione fatta segue che

$f \in C^\infty_{\rm per}$ se e solo se i coefficienti di Fourier $|\hat{f}_n|$ decadono più rapidamente (per $|n| \to \infty$) di ogni potenza inversa di[10] $|n|$.

Un'altra classe di funzioni che è possibile caratterizzare esattamente tramite una condizione sul decadimento dei coefficienti di Fourier è la classe $C^\omega_{\rm per}$ ossia le funzioni periodiche e reali analitiche su $\mathbb{R}$.

[9] Naturalmente una funzione f può essere integrabile ma non a quadrato sommabile come, ad esempio, $1/\sqrt{2\pi - x}$ su $[0, 2\pi]$.

[10] Ossia: $\forall\ p > 0\ \exists\ C_p > 0$ tale che $|\hat{f}_n| \le C_p|n|^{-p}\ \forall\ n \ne 0$.

Proposizione 9.10 *$f \in C^\omega_{\rm per}$ se e solo se $f \in C^0_{\rm per}$ e*

$$\exists\ C, \sigma > 0 \quad \text{tali che} \quad |\hat f_n| \le C e^{-\sigma|n|} \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}\ . \tag{9.17}$$

Nel corso della dimostrazione faremo uso della seguente stima

Lemma 9.11 *Sia $\alpha > 0$ e sia k un intero non negativo, allora*

$$\sum_{j=0}^\infty e^{-\alpha j}\ j^k \le \Big(1 + \frac{1}{\alpha}\Big)\alpha^{-k}\ k! \tag{9.18}$$

Dimostrazione Se $k = 0$, poiché $\alpha \le \sum_{j=1}^\infty \alpha^j/j!$, si ha

$$\sum_{j=0}^\infty e^{-\alpha j} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}} = 1 + \frac{1}{e^\alpha - 1} = 1 + \Big(\sum_{j=1}^\infty \frac{\alpha^j}{j!}\Big)^{-1} \le 1 + \frac{1}{\alpha}\ ,$$

che è (9.18) nel caso $k = 0$. Sia ora $k \ge 1$ e si consideri la funzione $f(t) := e^{-\alpha t} t^k$ per $t \ge 0$. Tale funzione è positiva per $t > 0$, ha un unico massimo in $t_* := k/\alpha$, è strettamente crescente per $0 \le t \le t_*$ e strettamente decrescente per $t \ge t_*$. Sia $N := [t_*]$ ($[\cdot] :=$ "parte intera") cosicché $N \le t_* < N+1$. Allora, poiché $\min_{N \le t \le N+1} f(t) = \min\{f(N), f(N+1)\}$, $\int_N^{N+1} f(t)dt \ge \min\{f(N), f(N+1)\}$ e quindi

$$\begin{aligned} f(N) + f(N+1) &:= \min\{f(N), f(N+1)\} + \max\{f(N), f(N+1)\} \\ &\le f(t_*) + \int_N^{N+1} f. \end{aligned}$$

Dunque, essendo f crescente tra 0 e N e decrescente per $t \ge N+1$ si ha

$$\sum_{j=1}^{N-1} f(j) \le \int_0^N f(t)dt\ , \qquad \sum_{j=N+2}^\infty f(j) \le \int_{N+1}^\infty f(t)dt\ ,$$

e quindi[11]

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^\infty e^{\alpha j}\ j^k &= \sum_{j=1}^\infty f(j) \le \int_0^\infty f(t)dt + f(k/\alpha) \\ &= \frac{k!}{\alpha^{k+1}} + \Big(\frac{k}{\alpha e}\Big)^k \le k!\ \alpha^{-k}\ \Big(1 + \frac{1}{\alpha}\Big)\ . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dimostrazione (della Proposizione 9.10) Sia $f \in C^\omega_{\rm per}$. Dal Teorema 5.46 segue che $\forall\ x_0 \in [0, 2\pi]\ \exists\ M_{x_0}, r_{x_0} > 0$ tali che

$$\sup_{|x-x_0|<r_{x_0}} |f^{(k)}(x)| \le M_{x_0} r_{x_0}^{-k}\ k!\ , \quad \forall\ k \ge 0\ .$$

Gli intervalli I_{x_0} di centro x_0 e lunghezza $2r_{x_0}$ formano un ricoprimento aperto dell'insieme compatto $[0, 2\pi]$ ed è dunque possibile trovare $0 \le x_1 < \cdots < x_N \le 2\pi$ tali che $[0, 2\pi] \subseteq I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_N}$. Definendo $M := \max_{1 \le j \le N} M_{x_j}$ e $r := \min_{1 \le j \le N} r_{x_j}$ si ha allora

$$|f^{(k)}(x)| \le M r^{-k}\ k! \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ k \ge 0\ . \tag{9.19}$$

[11] Si usi la stima $k! \ge (k/e)^k$ che si ottiene facilmente per induzione su $k \ge 1$ (ricordando che $(1+1/k)^k < e$).

Dal punto (vi) della Proposizione 9.8 e dalla (9.19) segue dunque, per $n \neq 0$, che

$$|\hat{f}_n| = \frac{1}{2\pi|n|^p}\Big|\int_0^{2\pi} f^{(p)}(x)e^{-inx}dx\Big| \leq \frac{1}{|n|^p}M\ r^{-p}\ p! \leq M\Big(\frac{p}{|n|r}\Big)^p . \qquad (9.20)$$

Quindi, se $|n| \geq 2/r$, scegliendo $p := [|n|\ r/2]$ si ha che

$$M\Big(\frac{p}{|n|r}\Big)^p \leq M2^{-[|n|r/2]} \leq M2^{-\{(|n|r/2)-1\}} = (2M)e^{-\{(r|n|\log 2)/2\}} . \qquad (9.21)$$

Da (9.20) ed (9.21) segue (9.17) se poniamo:

$$\sigma := (r\log 2)/2, \quad C_* := \max_{0\leq|n|\leq 2/r} |\hat{f}_n|e^{\sigma|n|}, \quad C := \max\{2M, C_*\}.$$

Assumiamo ora che valga (9.17). Poiché $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^p e^{-\sigma|n|} < \infty$ per ogni $p > 0$, dal punto (ii) dell'Osservazione 9.4 segue che $f \in C^\infty_{\rm per}$. Il punto (vi) della Proposizione 9.8, la (9.17) ed il Lemma 9.11 implicano, per ogni $x \in [0, 2\pi]$ e per ogni intero $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &= \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n (in)^k e^{inx}\Big| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|\ |n|^k \\ &\leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\sigma|n|}|n|^k = (2C)\sum_{j=1}^\infty e^{-\sigma j}\ j^k \\ &\leq (2C)\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)\sigma^{-k}\ k! . \qquad (9.22)\end{aligned}$$

Inoltre, sempre da (9.17), segue che[12]

$$|f(x)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n| \leq C\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\sigma|n|} = C\ \frac{1+e^{-\sigma}}{1-e^{-\sigma}} \leq (2C)\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big) . \qquad (9.23)$$

Quindi $|f^{(k)}(x)| \leq Mr^{-k}\ k!$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $k \geq 0$ se scegliamo $r := \sigma$ e $M := (2C)(1 + \frac{1}{\sigma})$. Dal Teorema 5.46 segue dunque l'asserto. ∎

Convergenza di serie di Fourier

Passiamo a rispondere alla domanda fatta all'inizio di questo capitolo che ora può essere così riformulata: *sotto quali condizioni f (periodica) coincide con la sua serie di Fourier?* Cominciamo con un risultato preliminare che dà condizioni sufficienti affinché il troncamento di una serie di Fourier converga a f in un punto:

Lemma 9.12 (Dini) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica ed integrabile su $[0, 2\pi]$. Fissato $x \in [0, 2\pi)$, se il rapporto incrementale $y \to F(y) := \Big(f(x+y) - f(x)\Big)/y$ è integrabile (come funzione di y) in un intorno di*[13] *$y = 0$ allora*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e^{inx} = f(x) . \qquad (9.24)$$

[12]Se $\delta = \sum_{j=2}^\infty \sigma^j/j!$, $(1+e^{-\sigma})/(1-e^{-\sigma}) = (e^\sigma+1)/(e^\sigma-1) = (2+\sigma+\delta)/(\sigma+\delta) \leq (2+\sigma)/\sigma \leq 2(1+\frac{1}{\sigma})$.

[13]Più precisamente: se F è integrabile su $[-x, -x+2\pi) \cap \{0 < |y| < r\}$ per r sufficientemente piccolo.

Osservazione 9.13 Una ipotesi che implica la validità del "test di Dini" (:= "integrabilità del rapporto incrementale") è che f sia *derivabile* in x. Infatti se f è derivabile in x esiste $\delta > 0$ tale che $|F(y) - f'(x)| < 1$ per $|y| < \delta$. Dunque

$$|F(y)| \le |F(y) - f'(x)| + |f'(x)| \le 1 + |f'(x)| := M \ . \tag{9.25}$$

Dunque per ogni $0 < \rho < \delta$ si ha $\int_{\rho \le |y| \le \delta} |F(y)| dy \le 2\delta M$ e quindi F è integrabile su $[-\delta, \delta]$.

Esempio 9.14 Sia f la funzione di periodo 2π che vale x^2 nell'intervallo $[-\pi, \pi)$. Si noti che la funzione f è di classe $C^0_{\rm per}$, è derivabile in ogni $x \neq \pi + 2k\pi$ ma non è $C^1_{\rm per}$. Calcolando i coefficienti di Fourier di f [usando (9.14) ed osservando che $e^{in\pi} = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$] si trova, per $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\Big[x^2 \frac{e^{-inx}}{-in}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi i n}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi i n}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx}\, dx = \frac{1}{\pi i n}\Big[x \frac{e^{-inx}}{-in}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\Big[x e^{-inx}\Big]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^n \frac{2}{n^2} \ ,
\end{aligned}$$

mentre

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \ .$$

Dunque dal Lemma 9.12 segue che, per ogni $-\pi < x < \pi$,

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}}} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \ . \tag{9.26}$$

La serie in tale relazione converge totalmente e dunque, come nella Proposizione 9.3, definisce una funzione $C_{\rm per}$. Poiché, come già osservato, anche la funzione f è di classe $C_{\rm per}$ si ha che la relazione (9.26) vale *sull'intervallo chiuso* $[-\pi, \pi]$ e calcolando tale relazione in $x = \pi$ si perviene alla notevole identità

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ . \tag{9.27}$$

Dimostrazione (del Lemma[14] 9.12) Sia $G(y) := \dfrac{f(x-y) - f(x)}{e^{-iy} - 1}$. Dalle ipotesi segue che tale funzione (complessa di variabile reale) è periodica di periodo 2π ed è integrabile su $[0, 2\pi]$: infatti, chiaramente $G(y)$ è integrabile su $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, per $\varepsilon > 0$ e sufficientemente piccolo[15], e se $F(y) := \Big(f(x+y) - f(x)\Big)/y$ e $g(y) := (e^{iy} - 1)/y$ è la funzione definita nell'Esempio A.9, si ha che $G(y) = F(-y)/g(-y)$ che è integrabile su[16] $[0, \varepsilon) \cup [2\pi - \varepsilon, 2\pi)$. Dunque $f(x-y) - f(x) = G(y)e^{-iy} - G(y)$ ed essendo ambo i membri di tale identità (come funzioni di y) periodici

[14] L'idea della dimostrazione è tratta da "Appunti sulle serie di Fourier" di A. Figà–Talamanca.

[15] $f(x-y) - f(x)$ è integrabile (in y) su $[0, 2\pi]$ per ipotesi (essendo f integrabile su $[0, 2\pi]$ e periodica) e si ricordi (Esempio A.9) che gli zeri di $e^{iy} - 1$ sono dati da $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

[16] Essendo G periodica di periodo 2π, $\int_0^{\varepsilon} G(y)dy + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} G(y)dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} G(y)dy$ e F è integrabile su di un intorno di 0 per ipotesi e $g(0) = i \neq 0$ ed è continua.

ed integrabili su $[0, 2\pi]$ possiamo calcolarne i coefficienti di Fourier (ossia moltiplicare ambo i membri per $e^{-iny}/(2\pi)$ ed integrare da 0 a 2π) ottenendo le relazioni[17]

$$\hat{f}_0 = \hat{G}_1 - \hat{G}_0 + f(x) \ , \qquad \hat{f}_{-n} e^{-inx} = \hat{G}_{n+1} - \hat{G}_n \quad (\text{per } n \neq 0) \ . \tag{9.28}$$

Dunque, per ogni $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} &= \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_{-n} e^{-inx} = f(x) + \sum_{|n| \leq N} (\hat{G}_{n+1} - \hat{G}_n) \\ &= \hat{G}_{N+1} - \hat{G}_{-N} + f(x) \ . \end{aligned} \tag{9.29}$$

Dal punto (iv) dell'Osservazione 9.9 (e da quanto sopra detto su G) segue che $\lim_{N \to \pm\infty} \hat{G}_N = 0$ e dunque, prendendo il limite per $N \to \infty$ nella (9.29), si ottiene la (9.24). ∎

Teorema 9.15 *Assumiamo che $f \in C^p_{\text{per}}$ per un qualche $p \geq 1$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste N_0 tale che, se $N \geq N_0$, si ha*

$$\sup_{\mathbb{R}} \Big| f(x) - \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} \Big| \leq \frac{\varepsilon}{N^{p - \frac{1}{2}}} \ . \tag{9.30}$$

Inoltre, vale la seguente "uguaglianza di Parseval"

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 \ . \tag{9.31}$$

In particolare, la (9.30) mostra che $\sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx}$, per $f \in C^1_{\text{per}}$ converge uniformemente a f.

Dimostrazione Dal Lemma 9.12 e dall'Osservazione 9.13 segue che

$$f(x) - \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} = \lim_{M \to \infty} \sum_{N < |n| \leq M} \hat{f}_n e^{inx} \ , \qquad \forall \ x \in \mathbb{R}. \tag{9.32}$$

Dalla (vii) della Proposizione 9.8 (con $k = p$) segue che, dato $\varepsilon > 0$, esiste $N_0 > 1$ tale che, per ogni $N \geq N_0$, si ha

$$\sum_{n > N} |\hat{f}_n|^2 \ |n|^{2p} \leq \varepsilon^2 \Big(p - \frac{1}{2} \Big) \ . \tag{9.33}$$

Usando la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz (1.5) e la (9.33), si ottiene, per ogni $M > N \geq N_0$,

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{N < |n| \leq M} \hat{f}_n e^{inx} \Big| &\leq \sum_{N < |n| \leq M} |\hat{f}_n| = \sum_{N < |n| \leq M} \Big(|\hat{f}_n| |n|^p \Big) \ |n|^{-p} \\ &\leq \Big(\sum_{N < |n| \leq M} |\hat{f}_n|^2 |n|^{2p} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{N < |n| \leq M} |n|^{-2p} \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Big(\sum_{|n| > N} |\hat{f}_n|^2 |n|^{2p} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(2 \sum_{n = N+1}^{\infty} n^{-2p} \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon \Big(p - \frac{1}{2} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(2 \int_N^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{N^{p - \frac{1}{2}}} \ . \end{aligned}$$

[17] Per il punto (ii) dell'Osservazione 9.7 si trova che $\int_0^{2\pi} f(x-y) dy = \int_{x-2\pi}^{x} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt = 2\pi \hat{f}_0$.

Prendendo, in tale relazione, il limite per $M \to \infty$, e ricordando la (9.32) si ottiene la (9.30). In particolare, (9.30) mostra che la convergenza di $\sum_{|n|\le N} \hat f_n e^{inx}$ a f è uniforme; quindi si può passare al limite, per $N \to \infty$, nella formula (iii) della Proposizione 9.8, ottenendo l'identità di Parseval. ∎

2 Trasformata di Fourier

Definizione 9.16 *Sia $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Si definisce la trasformata di Fourier*[18] *di f come*

$$\hat f(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} \,đx \ , \qquad đx := \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \ . \tag{9.34}$$

Proposizione 9.17 *La trasformata di Fourier $\hat f$ di una funzione $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ gode delle seguenti proprietà:*

(i) *$\hat f$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$ e*

$$\sup_{\mathbb{R}} |\hat f| \le \|f\|_1 \ :=:= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \,đx \ . \tag{9.35}$$

(ii) *Sia p un intero positivo. Se $x \to x^k f(x) \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per ogni intero $0 \le k \le p$, allora $\hat f \in C^p(\mathbb{R})$ e*

$$\partial_\xi^k \hat f(\xi) = (-i)^k \widehat{(x^k f)}(\xi) \ , \qquad \forall\ k \le p \ ; \tag{9.36}$$

inoltre le funzioni $\partial_\xi^k \hat f$ sono, per $0 \le k \le p$, uniformemente continue su $\mathbb{R}$.

(iii) *Sia p un intero positivo. Se $f \in C^p(\mathbb{R})$ e $f^{(k)} \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per ogni $k \le p$, allora*

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat f(\xi) \ , \qquad \forall\ k \le p \ . \tag{9.37}$$

(iv) *Sia p un intero positivo. Se $f \in C^p(\mathbb{R})$ e $f^{(k)} \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per ogni $k \le p$, allora*

$$|\hat f(\xi)| \le \frac{\|f^{(p)}\|_1}{|\xi|^p} \ , \qquad \forall\ \xi \ne 0 \ , \tag{9.38}$$

e

$$|\hat f(\xi)| \le \frac{M}{1+|\xi|^p} \ , \qquad M := 2\ \max\{\|f\|_1 \ , \ \|f^{(p)}\|_1\} \ . \tag{9.39}$$

Nel corso della dimostrazione useremo il seguente semplice

Lemma 9.18 *Siano g_j $(j \ge 1)$, g e G funzioni in $\mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ tali che*

$$|g_j| \le G \ . \tag{9.40}$$

Sia $\{A_k\}$ una successione di insiemi, misurabili secondo Peano–Jordan, su cui g_j,g e G siano Riemann–integrabili e tali che $A_k \subseteq A_{k+1}$, $\bigcup_k A_k = \mathbb{R}$. Se, per ogni k, $g_j \to g$ uniformemente su A_k, allora $\|g_j - g\|_1 \to 0$.

[18] Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768 (Auxerre) -1830 (Parigi).

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Dalla definizione di integrale generalizzato segue che esiste k tale che

$$\int_{A_k^c} |g| \leq \frac{\varepsilon}{4} \ , \qquad \int_{A_k^c} |G| \leq \frac{\varepsilon}{4} \ . \tag{9.41}$$

Da tale relazione e da (9.40) segue anche che, per ogni $j \geq 1$,

$$\int_{A_k^c} |g_j| \leq \frac{\varepsilon}{4} \ . \tag{9.42}$$

Poiché g_j converge a g uniformemente su A_k, esiste j_0 tale che

$$|g_j(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{mis}(A_k)}$$

per ogni $x \in A_k$ e per ogni $j \geq j_0$. Dunque, per ogni $j \geq j_0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |g_j - g| dx = \int_{A_k^c} |g_j - g| dx + \int_{A_k} |g_j - g| dx \leq \int_{A_k^c} (|g_j| + |g|) dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \ . \qquad \blacksquare$$

Dimostrazione (della Proposizione 9.17) La (9.35) è ovvia. Dimostriamo l'uniforme continuità di $\hat{f}$. Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, esiste un insieme A misurabile secondo Peano-Jordan, su cui f è Riemann integrabile e tale che

$$\int_{A^c} |f| đx \ < \frac{\varepsilon}{4} \ .$$

Sia δ_0 tale che

$$\left| e^{it} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2(1 + \|f\|_1)} \ , \qquad \forall\ |t| < \delta_0 \ ; \tag{9.43}$$

sia $M > 0$ tale che $A \subseteq [-M, M]$ e sia $\delta := \delta_0/M$. Allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $|h| < \delta$ si ha che

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \ &= \ \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \left(e^{-ixh} - 1 \right) đx \right| \\
&\leq \ \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left| e^{-ixh} - 1 \right| đx \\
&= \ \int_{A^c} |f(x)| \left| e^{-ixh} - 1 \right| đx + \int_A |f(x)| \left| e^{-ixh} - 1 \right| đx \\
&\leq \ 2 \int_{A^c} |f(x)| đx + \int_A |f(x)| \left| e^{-ixh} - 1 \right| đx \\
&\leq \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(1 + \|f\|_1)} \int_A |f(x)| đx \\
&\leq \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(1 + \|f\|_1)} \|f\|_1 \leq \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che se $|x| \leq M$ allora si ha che $|-ixh| < \delta_0$ il che permette l'uso della (9.43).

(ii) Dimostriamo dapprima la (9.36) per $p = 1$. Sia $h_j \neq 0$ una qualunque successione convergente a 0 e sia

$$g_j(x) := f(x) e^{-ix\xi} \frac{e^{-ixh_j} - 1}{h_j} \ , \quad g(x) := (-i) x f(x) e^{-ix\xi} \ .$$

Osserviamo, ora, che: $\frac{e^{-ixh_j}-1}{h_j}$ converge a $(-ix)$ uniformemente su[19] $[-a,a]$ per ogni $a>0$; che[20]

$$\left|\frac{e^{-ixh_j}-1}{h_j}\right| \le |x| \ ;$$

che $|g_j|, |g| \le G(x) := |x||f(x)| \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Sia ora A_k una succesione di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan su cui $xf(x)$ sia Riemann integrabile e tali che $\sup_k \int_{A_k} |xf| < \infty$. Poiché gli A_k sono limitati, dalle osservazioni fatte segue che

$$|g_j(x) - g(x)| \le \Big(\sup_{A_k} |xf|\Big) \left|\frac{e^{-ixh_j}-1}{h_j} + ix\right|$$

tende uniformemente a zero su A_k e dunque la (9.36) per $p=1$ segue dal lemma. Il caso con p arbitrario segue per induzione: supponiamo che $x^p f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ e che la (9.36) sia vera per $p-1$. Allora poiché $x(x^{p-1}f) \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, usando la (9.36) con $k=1$, si ha che

$$\partial_\xi \big(\widehat{x^{p-1}f}\big)(\xi) = -i\big(\widehat{x^p f}\big)(\xi)$$

che, insieme alla (9.36) con $k=p-1$, implica la (9.36) anche con $k=p$. L'uniforme continuità di $\partial_\xi^k \hat f$ segue, ora, dalla (9.36) e dal punto (i).

(iii) Sia $p=1$ e assumiamo, dapprima, che $f(x)\to 0$ quando $|x|\to\infty$. Allora,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-ix\xi} đx &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f'(x) e^{-ix\xi} đx \\ &= \lim_{R\to\infty} \Big[\frac{f(x)e^{-ix\xi}}{\sqrt{2\pi}}\Big]_{-R}^{R} + i\xi \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f e^{-ix\xi} đx \\ &= i\xi \hat f(\xi) \ .\end{aligned}$$

In generale da $f\in\mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ non segue che $|f(x)|\to 0$ per $|x|\to\infty$ ma è sempre possibile trovare due successioni $R_j\to\infty$ e $R'_j \to -\infty$ tali che $f(R_j)$ e $f(R'_j)$ tendano a 0 per[21] $j\to\infty$: questo è sufficiente per ripetere l'argomento dato. Il caso con p arbitrario si ottiene per iterazione.

La (9.38) segue immediatamente da (9.37) insieme a (9.35). Per la (9.39) si usi la (9.35) nell'intervallo $|\xi|\le 1$ e la (9.38) per $|\xi|\ge 1$. ∎

Osservazione 9.19 Chiaramente se[22] $f\in C_0^p(\mathbb{R})$ allora $f^{(k)} \in C_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per ogni $k\le p$ e dunque, per tali f vale la (9.39). In particolare se $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ la sua trasformata di Fourier decade più rapidamente di qualunque potenza.

Il prossimo risultato spiega come ricostruire la funzione f a partire dalla sua trasformata di Fourier.

---

[19] Dato $\varepsilon>0$, sia δ tale che $\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| < \varepsilon/a$ per ogni $z\in\mathbb{C}$ con $0<|z|<\delta$ e sia j_0 tale che $|h_j|<\delta/a$, $\forall\ j\ge j_0$. Allora, $\forall\ 0<|x|\le a$, si ha che $\left|\frac{e^{-ixh_j}-1}{h_j} + ix\right| = |x| \left|\frac{e^{-ixh_j}-1}{-ixh_j} - 1\right| \le a\varepsilon/a$.

[20] Per ogni $0\ne t\in\mathbb{R}$, $\left|\frac{e^{it}-1}{t}\right| \le 1$. Infatti $|e^{it}-1| = |\int_0^t \frac{e^{is}}{i} ds| \le \int_0^{|t|} |e^{is}/i| ds = |t|$.

[21] Ad esempio, $\sum_{k=1}^\infty \int_{k-1}^k |f| = \int_0^\infty |f| < \infty$ e dunque per ogni $j\ge 1$ esiste $k=k_j$ tale che $\int_{k_j-1}^{k_j} |f| < 1/j$. Da questo segue che esiste $R_j \in [k_j-1, k_j]$ tale che $|f(R_j)| < 1/j$.

[22] Si ricorda che, per un aperto $E\subseteq\mathbb{R}^n$, $C_0^p(E)$ denota la classe delle funzioni C^p con supporto compatto contenuto in E.

Proposizione 9.20 (Teorema di inversione per funzioni C_0^2) *Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, allora*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, đ\xi\ , \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}\ . \tag{9.44}$$

Vale inoltre la seguente identità di Parseval[23]*:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 đ\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 đx\ . \tag{9.45}$$

La dimostrazione, oltre che sulle proprietà della trasformata e delle serie di Fourier è basata sulle approssimazioni discrete dell'integrale di Riemann su $\mathbb{R}$; il seguente risultato sarà sufficiente per i nostri scopi.

Lemma 9.21 *Sia $\varphi \in C(\mathbb{R})$ tale che esistano due costanti $M > 0$ e $\alpha > 1$ tali che*

$$|\varphi(x)| \le \frac{M}{1+|x|^\alpha}\ , \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}\ . \tag{9.46}$$

Allora $\varphi \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ e

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}}\ \delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx\ . \tag{9.47}$$

Dimostrazione Da (9.46) segue immediatamente che $\varphi \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Dimostriamo, ora, che dalle ipotesi segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 2$ tale che[24]

$$\int_{\{|x|\ge R-1\}} |\varphi(x)|\ dx < \varepsilon\ ; \qquad \delta \sum_{|n|\ge[R/\delta]} |\varphi(\delta n)| < \varepsilon\ , \quad \forall\ 0<\delta<1\ . \tag{9.48}$$

Infatti, dalla (9.46) segue che

$$\int_{\{|x|\ge R-1\}} |\varphi(x)|\ dx \le 2M \int_{R-1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \frac{2M}{\alpha-1}\ \frac{1}{(R-1)^{\alpha-1}}\ ,$$

che implica la prima delle (9.48) con $R \ge R_0(\varepsilon) > 1$. Analogamente, per ogni $\delta \in (0,1)$ e per ogni $R > 2$ si ha che

$$\begin{aligned}
\delta \sum_{|n|\ge[R/\delta]} |\varphi(\delta n)| &\le \delta M \sum_{|n|\ge[R/\delta]} \frac{1}{(|n|\delta)^\alpha} = \frac{2M}{\delta^{\alpha-1}} \sum_{j\ge[R/\delta]} \frac{1}{j^\alpha}\\
&\le \frac{2M}{\delta^{\alpha-1}} \int_{[R/\delta]-1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = 2M \int_{\delta[R/\delta]-\delta}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}\\
&\le 2M \int_{R-2}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{2M}{\alpha-1}\frac{1}{(R-2)^{\alpha-1}}\ ,
\end{aligned}$$

da cui segue la seconda delle (9.48) per R sufficientemente grande; nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che $\delta[R/\delta] - \delta \ge R - 2\delta \ge R - 2$.
Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia R tale che

$$\int_{\{|x|>R-1\}} |\varphi(x)|\ dx < \frac{\varepsilon}{3}\ , \qquad \delta \sum_{|n|\ge[R/\delta]} |\varphi(\delta n)| < \frac{\varepsilon}{3}\ . \tag{9.49}$$

[23] Marc-Antoine Parseval des Chênes, 1755 (Rosières-aux-Saline) -1836 (Parigi).
[24] Come al solito $[x]$ denota il più grande intero $m \le x$.

Sia $0 < \delta_0 < 1$ tale che

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{6R} , \qquad \forall\, x, y \in [-R, R] , \quad |x - y| < \delta_0 . \tag{9.50}$$

Per ogni $0 < \delta < \delta_0$ poniamo

$$N_\delta := [R/\delta] , \qquad R_\delta := \delta N_\delta , \tag{9.51}$$

cosicché

$$\frac{R}{\delta} - 1 < N_\delta \le \frac{R}{\delta} , \qquad R - \delta < R_\delta \le R . \tag{9.52}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx - \delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(\delta n)\Big| \\
&\quad \le \Big|\int_{-R_\delta}^{R_\delta} \varphi(x)dx - \delta \sum_{n=-N_\delta}^{N_\delta - 1} \varphi(\delta n)\Big| + \int_{\{|x|\ge R_\delta\}} |\varphi(x)|dx + \delta \sum_{|n|\ge N_\delta} |\varphi(\delta n)| \\
&\quad = \Big| \sum_{n=-N_\delta}^{N_\delta-1} \int_{\delta n}^{\delta n+\delta} \Big(\varphi(x) - \varphi(\delta n)\Big) dx\Big| + \int_{\{|x|\ge R_\delta\}} |\varphi(x)|dx + \delta \sum_{|n|\ge N_\delta} |\varphi(\delta n)| \\
&\quad \le \sum_{n=-N_\delta}^{N_\delta-1} \int_{\delta n}^{\delta n+\delta} |\varphi(x) - \varphi(\delta n)| dx + \int_{\{|x|\ge R-1\}} |\varphi(x)|dx + \delta \sum_{|n|\ge N_\delta} |\varphi(\delta n)| \\
&\quad \le 2N_\delta\ \delta\ \frac{\varepsilon}{6R} + \frac{2}{3}\varepsilon = R_\delta\ \frac{\varepsilon}{3R} + \frac{2}{3}\varepsilon \le \varepsilon . \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Dimostrazione (della Proposizione 9.20) Sia $T_0 > 0$ tale che $\operatorname{supp} f \subseteq [-T_0/2, T_0/2]$ e, per $T \ge T_0$, sia f_T la funzione periodica di periodo T che coincide con f in $[-T/2, T/2]$. Allora $f_T \in C^2(\mathbb{R})$ e dai risultati sulle serie di Fourier[25] segue che, per ogni $|x| \le T/2$,

$$f(x) = f_T(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat f_{T,n} e^{i\frac{2\pi}{T}nx} , \qquad (|x| \le T/2) , \tag{9.53}$$

dove la serie converge totalmente e

$$\begin{aligned}
\hat f_{T,n} &:= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{2\pi}{T}\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\ đx \\
&:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{2\pi}{T} \hat f\Big(\frac{2\pi}{T}n\Big) .
\end{aligned} \tag{9.54}$$

Dunque, per $T \ge 2|x|$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{T} \hat f\Big(\frac{2\pi}{T}n\Big)\ e^{i\frac{2\pi}{T}nx} .$$

---

[25] Per una funzione periodica di periodo T (ed integrabile) $\hat f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} dx$ e la sua serie di Fourier è $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat f_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$.

Ma dal punto (iv) della Proposizione 9.17 segue che

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{M}{1+|\xi|^2} \ ,$$

per qualche $M > 0$ e quindi la (9.44) segue dal Lemma 9.21 applicato alla funzione

$$\varphi(\xi) := \hat{f}(\xi)\exp(ix\xi)$$

(e con $\delta = 2\pi/T$).
Analogamente (e usando le stesse notazioni), dalla formula di Parseval per serie di Fourier e dalla (9.54) segue che

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f_T|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_{T,n}|^2 = \frac{2\pi}{T^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|\hat{f}\Big(\frac{2\pi}{T}n\Big)\Big|^2 \ .$$

Moltiplicando per T tale relazione e mandando $T \to \infty$ si ottiene, per il[26] Lemma 9.21, la relazione (9.45). $\blacksquare$

La Proposizione 9.20 si generalizza in vari modi; ad esempio vale la seguente

Proposizione 9.22 *Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $f^{(k)} \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per $k = 0, 1, 2$. Allora vale la formula (9.44). Se, inoltre, $f \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R})$, allora vale anche l'identità di Parseval (9.45).*

Dimostrazione L'idea della dimostrazione è basata sull'approssimare f con funzioni C^2 a supporto compatto. Sia $\varphi \in C^\infty$ una funzione monotona non crescente tale che:

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 \ , & \text{se } x \leq 0 \ , \\ 0 \ , & \text{se } x \geq 1 \ . \end{cases} \tag{9.55}$$

A partire da φ, per $R > 0$, costruiamo una funzione ψ_R pari, di classe C^∞, con supporto in $[-R-1, R+1]$ e che valga 1 per $|x| \leq R$, ponendo:

$$\psi_R(x) := \begin{cases} \varphi(x-R) \ , & \text{se } x \geq 0 \ , \\ \psi_R(-x) \ , & \text{se } x < 0 \ . \end{cases} \tag{9.56}$$

Poniamo $f_R := f\psi_R$. Chiaramente $f_R \in C_0^2$ e quindi vale la (9.44) con f_R al posto di f. Poiché f_R coincide con f se $|x| \leq R$, per ogni $R > 0$ e per ogni $|x| \leq R$, si ha

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_R(\xi) e^{ix\xi} {\mathchar'26\mkern-12mu d}\xi \ , \qquad |x| \leq R \ . \tag{9.57}$$

Per prendere il limite per $R \to \infty$ in tal relazione ed ottenere la (9.44), useremo il Lemma 9.18. Dalle ipotesi su f e dalla Proposizione 9.17, (9.39), segue che

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{M_1}{1+|\xi|^2} \ , \qquad M_1 := 2\ \max\{\|f\|_1 \ , \ \|f^{(2)}\|_1\} \ . \tag{9.58}$$

Osserviamo che, se

$$c := \max\{1 \ , \ \sup_{[0,1]}|\varphi'| \ , \ \sup_{[0,1]}|\varphi''| \ \} \ , \tag{9.59}$$

[26] Si ricordi l'osservazione 9.19.

allora

$$\max\{\ 1\ ,\ \sup_{\mathbb{R}} |\psi_R'|\ ,\ \sup_{\mathbb{R}} |\psi_R''|\ \} \le c\ . \tag{9.60}$$

Dunque, essendo $f_R'' := (f\psi_R)'' = f''\psi_R + 2f'\psi_R' + f\psi_R''$, si ha che

$$\|f_R''\|_1 \le \|f''\|_1 + 2\|f'\psi_R'\|_1 + \|f\psi_R''\|_1 \le c\Big(\|f\|_1 + \|f'\|_1 + \|f''\|_1\Big)\ . \tag{9.61}$$

Quindi, poiché $\|f_R\|_1 \le \|f\|_1$, per la (9.39), si ha che

$$|\hat{f}_R(\xi)| \le \frac{M_2}{1+|\xi|^2}\ , \qquad M_2 := 2c\Big(\|f\|_1 + \|f'\|_1 + \|f''\|_1\Big)\ . \tag{9.62}$$

Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_R(\xi)\exp(ix\xi) \to \hat{f}(\xi)\exp(ix\xi)$ uniformemente per $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\hat{f}_R(\xi) - \hat{f}(\xi)| &:= \Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\psi_R(x)-1)\ e^{-ix\xi} đx\Big| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ |\psi_R(x)-1| đx \\ &\le \int_{\{|x|\ge R\}} |f(x)| đx \end{aligned} \tag{9.63}$$

e quest'ultimo integrale tende a 0 quando $R \to \infty$ essendo $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Ora, se R_j è una qualunque successione tendente a $+\infty$, e se

$$g_j(\xi) := \hat{f}_{R_j}(\xi)\exp(ix\xi)\ , \quad g(\xi) := \hat{f}(\xi)\exp(ix\xi)\ , \quad G(\xi) := M_2/(1+|\xi|^2)\ ,$$

la (9.44) segue dal Lemma 9.18.

Ora, assumiamo anche che $f \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R})$. Dalla (9.45) per funzioni C_0^2 segue che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_R(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f_R(x)|^2 dx\ . \tag{9.64}$$

Poiché

$$\int_{-R}^{R} |f|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |f_R|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2\ ,$$

e poiché $f \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R})$, si ha che

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_R|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2\ . \tag{9.65}$$

Poiché[27]

$$\Big||\hat{f}_R(\xi)|^2 - |\hat{f}(\xi)|^2\Big| \le |\hat{f}_R(\xi) - \hat{f}(\xi)|\ |\hat{f}_R(\xi) + \hat{f}(\xi)|\ ,$$

da (9.63) e dalla limitatezza di $\hat{f}$ e $\hat{f}_R$ (vedi (9.58) e (9.62)) segue che $|\hat{f}_R(\xi)|^2$ converge, per $R \to \infty$, a $|\hat{f}(\xi)|^2$ uniformemente su $\mathbb{R}$. Queste osservazioni permettono di prendere il limite per $R \to \infty$ in (9.64) ed ottenere, per il Lemma 9.18, la (9.45). ∎

Concludiamo questa breve discussione sulla trasformata di Fourier con il "Lemma di Riemann-Lebesgue":

[27] Si ricorda che per ogni coppia di numeri complessi z e w si ha che $\Big||z|^2 - |w|^2\Big| \le |z-w|\ |z+w|$.

Proposizione 9.23 *Sia $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Allora* $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ esiste un aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ misurabile secondo Peano-Jordan, su cui f è Riemann integrabile e

$$\int_{A^c} |f| \leq \frac{\varepsilon}{3} \; . \tag{9.66}$$

Inoltre[28] esiste $\psi \in C_0^\infty(A)$ tale che

$$\int_A |f-\psi| đx < \frac{\varepsilon}{3} \; . \tag{9.67}$$

Sia, ora, $M > 0$ tale che $|\hat{\psi}(\xi)| \leq \varepsilon/3$ per ogni $|\xi| \geq M$ (tale M esiste per l'osservazione 9.19). Allora per $|\xi| \geq M$ si ha che[29]

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\Big| \leq \Big|\int_A f(x)e^{-ix\xi}\Big| + \int_{A^c}|f| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \Big|\int_A f(x)e^{-ix\xi}\Big| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \int_A |f-\psi| \;+\; \Big|\int_A \psi e^{-ix\xi}\Big| \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \int_A |f-\psi| \;+\; |\hat{\psi}(\xi)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3 *Esercizi e complementi*

Esercizio 9.1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica e integrabile su $[0, 2\pi]$. Dimostrare che $\int_0^x f(t)dt$ è periodica se e solo se $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$.

Esercizio 9.2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica e integrabile su $[0, 2\pi]$ e siano a_n e b_n i coefficienti di Fourier "reali" definiti in (9.12). Dimostrare le seguenti affermazioni:
(i) f è pari[30] $\implies$ $\hat{f}_n \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{Z}$ $\iff$ $b_n = 0, \forall\, n \geq 1$.
(ii) f è dispari $\implies$ $i\hat{f}_n \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{Z}$ $\iff$ $a_n = 0, \forall\, n \geq 0$.
(iii) Se f è C^1 allora (i) e (ii) valgono con " $\iff$ " al posto di " $\implies$ ".

Esercizio 9.3 Si calcolino i coefficienti di Fourier delle seguenti funzioni periodiche di periodo 2π i cui valori $f(x)$ per $x \in [-\pi, \pi)$ sono dati da:

$$(1)\ f(x) = x^k\ , \quad 1 \leq k \leq 4\ ; \qquad (2)\ f(x) = |x|\ ; \qquad (3)\ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 k^2 x}{2^k}\ ,$$

$$(4)\ f(x) = e^x\ ; \qquad (5)\ f(x) = e^x\ , \quad (0 < x \leq \pi) \text{ e } f \text{ dispari;}$$

$$(6)\ f(x) = \operatorname{sen}^3 x\ ; \qquad (7)\ f(x) = \cos^6 x\ ; \qquad (8)\ \frac{\pi - x}{2}\ .$$

[28] Si ricorda che se $g \in \mathcal{R}_1(A)$, A misurabile secondo Peano-Jordan, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $\psi \in C_0^\infty(A)$ tale che $\int_A |g-\psi| < \varepsilon$.
[29] I seguenti integrali si intendono tutti divisi per $\sqrt{2\pi}$.
[30] Una funzione g definita su $\mathbb{R}^n$ si dice *pari* se $g(-x) = g(x)$, $\forall\, x$, e si dice *dispari* se $g(-x) = -g(x)$.

Esercizio 9.4 Si calcolino i coefficienti di Fourier delle funzioni periodiche di periodo 2π i cui valori coincidono con i valori $f(x)$ elencati in (1)÷(8) dell'Esercizio 9.3 per $x \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 9.5 (i) Sia $u_n(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos n(t-x)\, dt$. Si studi la regolarità di $u := \sum_{n\geq 1} u_n$ e se ne calcoli la serie di Fourier.
(ii) Come al punto (i) con $u_n(x) := \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos n(t-x)\, dt$.

C 9.6 Proposizione 9.24 *Se $f \in C^0_{\rm per}$ è C^1 a tratti*[31] *allora $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat f_n| < \infty$ e quindi la serie di Fourier di f converge totalmente a f.*

Lemma 9.25 *Se $f \in C^0_{\rm per}$ è C^1 a tratti allora $\widehat{(f')}_n = in\hat f_n$.*

Dimostrazione Siano $0 \leq a_1 < \cdots < a_N < 2\pi$ i punti di salto di f', e poniamo $a_0 := 0$ e $a_{N+1} := 2\pi$. Allora

$$\begin{aligned}\widehat{(f')}_n &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f' e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N+1}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f' e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N+1} [f e^{-inx}]_{a_{k-1}}^{a_k} + \frac{in}{2\pi}\sum_{k=1}^{N+1}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f e^{-inx} dx \\ &= \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f e^{-inx} dx := in\hat f_n\ ,\end{aligned}$$

(si noti che poiché f è continua, la somma $\sum_{k=1}^{N+1} [f e^{-inx}]_{a_{k-1}}^{a_k}$ è una somma "telescopica" di cui resta la differenza tra l'ultimo ed il primo termine e tali termini si cancellano per la periodicità). ∎

Dimostrazione (della Proposizione 9.24) Poiché f' è periodica e continua a tratti, f' è integrabile su $[0, 2\pi]$ e dunque dalla disuguaglianza di Bessel (punto (iv), Proposizione 9.8) segue che $\sum |\widehat{(f')}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Dunque dal Lemma e dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz per successioni segue che

$$\begin{aligned}\sum_{n\neq 0} |\hat f_n| &= \sum_{n\neq 0} (|\hat f_n||n|)\ |n|^{-1} \leq \Big(\sum_{n\neq 0} |\hat f_n|^2 |n|^2\Big)^{\frac12} \Big(\sum_{n\neq 0} |n|^{-2}\Big)^{\frac12} \\ &= \Big(\sum_{n\neq 0} |\widehat{(f')}_n|^2\Big)^{\frac12} \Big(\sum_{n\neq 0} |n|^{-2}\Big)^{\frac12} < \infty\ . \quad ∎\end{aligned}$$

T 9.7 Si dimostri che sotto le ipotesi del Lemma 9.12 di Dini si ha che

$$\lim_{N,M\to\infty} \sum_{n=-M}^{N} \hat f_n e^{inx} = f(x)$$

ossia che $\forall\ \varepsilon > 0$ esiste N_0 tale che per ogni $N, M \geq N_0$ si ha che $\Big|\sum_{n=-M}^{N} \hat f_n e^{inx} - f(x)\Big| < \varepsilon$.

C 9.8 La seguente versione del Lemma 9.12 di Dini dà, sotto opportune ipotesi, informazioni sulla convergenza della serie di Fourier in punti dove $f(x)$ ha un salto. Ricordiamo prima le notazioni

$$f(x+) = \lim_{h\downarrow 0} f(x+h) := \lim_{y\to x, y>x} f(y)\ , \qquad f(x-) = \lim_{h\uparrow 0} f(x+h) := \lim_{y\to x, y<x} f(y)\ .$$

[31] Una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, con E intervallo di $\mathbb{R}$, è C^1 **a tratti** se esistono N punti in E $a_1 < \cdots < a_N$ per cui $f \in C^1\big((a_{k-1}, a_k)\big)$, per $2 \leq k \leq N$, ed esistono (finiti) i limiti, rispettivamente, da destra e da sinistra di f e f' in a_{k-1} ed a_k.

Lemma 9.26 *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodica di periodo 2π ed integrabile su $[0,2\pi]$. Se $x\in[0,2\pi)$ è tale che esistono i limiti $f(x\pm)$ e tale che la funzione*

$$F(y) := \begin{cases} \dfrac{f(x+y)-f(x+)}{y}\ , & \text{se } y>0\ ,\\[2ex] \dfrac{f(x+y)-f(x-)}{y}\ , & \text{se } y<0\ ,\\[2ex] 0\ , & \text{se } y=0\ ,\end{cases} \tag{9.68}$$

è integrabile in un intorno di zero, allora

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{|n|\le N}\hat f_n e^{inx} = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}\ . \tag{9.69}$$

Dimostrazione Sia

$$G(y) := \begin{cases} \dfrac{f(x-y)-f(x-)}{e^{-iy}-1}\ , & \text{se } y>0\ ,\\[2ex] \dfrac{f(x-y)-f(x+)}{e^{-iy}-1}\ , & \text{se } y<0\ ,\\[2ex] 0\ , & \text{se } y=0\ .\end{cases}$$

Dalle ipotesi fatte (ragionando in maniera analoga a quanto fatto nella dimostrazione del Lemma 9.12) segue che G è periodica ed integrabile su $[0,2\pi]$. Seguendo lo schema della dimostrazione del Lemma 9.12 troviamo la relazione

$$f(x-y)-\chi_+(y)f(x-)-\chi_-(y)f(x+) = G(y)e^{-iy}-G(y) \tag{9.70}$$

dove

$$\chi_+(y) := \begin{cases} 1\ , & \text{se } y>0\ ,\\ 0\ , & \text{se } y\le 0\ ,\end{cases} \qquad \chi_-(y) := \begin{cases} 0\ , & \text{se } y\ge 0\ ,\\ 1\ , & \text{se } y>0\ .\end{cases}$$

Moltiplicando per $e^{-iny}/(2\pi)$ ed integrando tra $-\pi$ e π ambo i mebri della (9.70), troviamo

$$\begin{aligned} \hat f_0 &= \hat G_1 - \hat G_0 + \frac{f(x+)+f(x-)}{2}\ ,\\ \hat f_{-n}e^{-inx} &= \hat G_{n+1}-\hat G_n + f(x-)\,\frac{1-e^{-in\pi}}{2\pi i n} + \ f(x+)\frac{e^{in\pi}-1}{-2\pi i n} \qquad (n\ne 0)\ .\end{aligned}$$

Osservando che $e^{\pm in\pi} = (-1)^n$ si ha che

$$\sum_{0<|n|\le N}\frac{1-e^{-in\pi}}{n} = \sum_{\substack{|n|\le N\\ n\text{dispari}}}\frac{2}{n} = 0\ , \qquad \sum_{0<|n|\le N}\frac{e^{in\pi}-1}{n} = \sum_{\substack{|n|\le N\\ n\text{dispari}}}\frac{-2}{n} = 0\ .$$

Dunque $\sum_{|n|\le N}\hat f_n e^{inx} = \frac{f(x+)+f(x-)}{2} + \hat G_{N+1}-\hat G_N$ da cui (come nella dimostrazione del Lemma 9.12) segue l'asserto. ∎

Esercizio 9.9 Si dimostri che se f è periodica e C^1 a tratti allora soddisfa le ipotesi del Lemma 9.26. Dunque *nei punti dove f ha un salto (ma esistono i limiti da destra e da sinistra di f e f') la serie di Fourier vale la media del salto.*

Esercizio 9.10 Sia $k\ge 2$ e sia $u(x) = \sum_{n\ge 1}\frac{\cos nx}{n^k}$. Si dimostri che $u\in C^{k-2}_{\text{per}}$ ma che $u\notin C^k_{\text{per}}$.

Esercizio 9.11 Sia f una funzione di periodo $T > 0$ integrabile su $[0, T)$. Si scrivano le formule rilevanti per l'analisi di Fourier.

Esercizio 9.12 Dimostrare che se u è una serie di potenze dispari $[u(x) = -u(-x)]$, allora tutti i coefficienti pari sono nulli mentre se u è pari $[u(x) = u(-x)]$, sono nulli tutti i coefficienti dispari.

Esercizio 9.13 * Verificare la relazione $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$ usando la serie di Taylor; cioè verificare:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \ .$$

Esercizio 9.14 (Corda vibrante con estremi fissi) L'evoluzione dello spostamento verticale di una corda elastica (di lunghezza, a riposo, unitaria) con estremi fissi, che oscilli (senza attrito e senza forze esterne) in un piano, soddisfa, in prima approssimazione, la seguente *equazione differenziale alle derivate parziali*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ , \qquad x \in (0,1) \ , \qquad t > 0 \ , \tag{9.71}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \ , \qquad \forall\, t > 0 \ , \tag{9.72}$$

dove $u = u(x,t)$ denota la posizione, all'istante t (in un piano cartesiano x, $y = u$), del punto della corda che a riposo coincide con il punto $(x, y) = (x, 0)$ e c è una costante che dipende dalle caratteristiche fisiche della corda.

Il problema (classico) di Cauchy per (9.71)**,** (9.72) consiste nel trovare

$$u \in C^2((0,1) \times (0,\infty)) \ , \qquad \text{con} \quad u, u_t \in C([0,1] \times [0,\infty)) \ ,$$

che soddisdfi (9.71), (9.72) e le seguenti *condizioni iniziali*

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \qquad u_t(x,0) = v_0(x) \ , \tag{9.73}$$

dove u_0 e v_0 sono funzioni assegnate (sufficientemente regolari e tali che $u_0(0) = u_0(1) = v_0(0) = v_0(1) = 0$). Le codizioni "al contorno" (9.72) si chiamano **condizioni di Dirichlet**.

Definiamo il seguente spazio di funzioni

$$C^k_{\rm dis}\Big((0,1)\Big) := \{f \in C^k([0,1]) : \ f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0 \ \forall\, i \text{ pari e } \ i \le k\} \ . \tag{9.74}$$

Si risolva il problema di Cauchy per (9.71), (9.72) supponendo che i dati iniziali u_0 e v_0 siano di classe $C^\infty_{\rm dis}((0,1))$.

Esercizio 9.15 Si risolva il problema di Cauchy per (9.71), (9.72) supponendo che i dati iniziali u_0 e v_0 siano:
(i) $u_0 = \operatorname{sen}^3 x$, $v_0 = 0$.
(ii) $u_0 = 0$, $v_0 = \operatorname{sen}^p x$ con $p = 1, 3, 4$.

Esercizio 9.16 Discutere il problema di Cauchy per (9.71), (9.72) con $u_0 = \operatorname{sen}^2 x$ e $v_0 = 0$.

Esercizio 9.17 Per una funzione $u(x,t)$ di classe C^1 si definisce **l'energia al tempo** t la quantità

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\Big)\, dx \ . \tag{9.75}$$

(i) **(Conservazione dell'energia per la corda elastica)** Si dimostri che se

$$u \in C^2((0,1) \times (0,\infty)) \cap C([0,1] \times [0,\infty))$$

è soluzione di (9.72) allora

$$\frac{dE}{dt} = 0 \ , \quad \forall\ t > 0 \tag{9.76}$$

e quindi che $E(t) := E(0)$.

(ii) **(Unicità)** Si usi il punto (i) per dimostrare che la soluzione del problema di Cauchy per (9.71), (9.72) con dati iniziali in C^∞_{dis} è *unica*.

Esercizio 9.18 (Equazione del calore) La temperatura di un filo metallico di lunghezza unitaria con gli estremi tenuti a temperatura costante, che (per semplicità) supporremmo uguale a 0, soddisfa la seguente equazione alle derivate parziali

$$u_t - k u_{xx} = 0 \ , \qquad x \in (0,1) \ , \qquad t > 0 \ , \tag{9.77}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \ , \qquad \forall\ t > 0 \ , \tag{9.78}$$

dove $u(x,t)$ denota la temperatura al tempo t del punto del filo di coordinata uguale ad x e $k > 0$ è la cosiddetta "conduttività".

Il problema (classico) di Cauchy per (9.77)**,** (9.78) consiste nel trovare u tale che

$$u \in C([0,1] \times [0,\infty)) \ , \quad \text{con} \quad u_t, u_x, u_{xx} \in C((0,1) \times (0,\infty)) \ ,$$

tale che soddisdfi (9.77), (9.78) e la *condizione iniziale*

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \tag{9.79}$$

dove u_0 è una funzione assegnata (sufficientemente regolare e tale che $u_0(0) = u_0(1) = 0$). Le codizioni "al contorno" (9.78) si chiamano **condizioni di Dirichlet**.

Si risolva il problema di Cauchy per (9.77), (9.78) supponendo che il dato iniziale u_0 appartenga a $C^1_{\text{dis}}((0,1))$.

Esercizio 9.19 Si risolva il problema di Cauchy per (9.77), (9.78) con dato iniziale $u_0 = \operatorname{sen}^p x$ con $p = 1, 2, 3, 4$.

Appendice A

Il campo complesso

1 I numeri complessi

1. (Il campo complesso) Il campo complesso $\mathbb{C}$ è, per definizione, $(\mathbb{R}^2, +, *)$ ove le operazioni di somma e prodotto "complesso" sono definite come segue:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (SC)
- $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$ (PC)

Osservazione A.1 (i) Si noti che, mentre la somma "complessa" coincide con la somma (S) di $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale (vedi Sezione 1), il "prodotto complesso" $*$ è assai diverso sia dal prodotto in (P) definito nella Sezione 1, che dal prodotto scalare definito dalla (1.1): esso infatti è una operazione binaria da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: ad una coppia di vettori z_1 e z_2 in $\mathbb{R}^2$ associa un terzo vettore z in $\mathbb{R}^2$.

(ii) La somma in (SC) è commutativa e associativa; l'elemento neutro è il vettore (o "numero complesso") $0 := (0, 0)$; l'opposto di $z = (x, y)$ è $-z := (-x, -y)$.

Proposizione A.2 (i) *Il prodotto complesso è commutativo e associativo.*

(ii) *L'elemento neutro del prodotto complesso è* $1 := (1, 0)$*.*

(iii) *Se* $z = (x, y) \neq 0$ *il reciproco di* z*, denotato* z^{-1} *o* $1/z$ *è dato da*

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) .$$

Dimostrazione (i) La commutatività è ovvia. Per l'associatività dobbiamo verificare che

$$\Big((x_1, y_1) * (x_2, y_2)\Big) * (x_3, y_3) = (x_1, y_1) * \Big((x_2, y_2) * (x_3, y_3)\Big) , \tag{A.1}$$

o anche, in vista della commutatività di $*$,

$$(x_1, y_1) * \Big((x_2, y_2) * (x_3, y_3)\Big) = \Big((x_3, y_3) * (x_2, y_2)\Big) * (x_1, y_1) . \tag{A.2}$$

D'altra parte, dalla definizione di * si ha che

$$\begin{aligned}\Big((x_1, y_1) * (x_2, y_2)\Big) * (x_3, y_3) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) * (x_3, y_3) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 \,,\, x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3) ,\end{aligned}$$

che è simmetrica in 1 e 3 (ossia scambiando gli indici 1 e 3 tra loro otteniamo lo stesso risultato) e dunque (A.2) (e quindi (A.1)) è verificata.

(ii) e (iii) sono una semplice verifica diretta che segue immediatamente dalla definizione di $*$.
∎

2 L'esponenziale complesso e le funzioni trigonometriche

Consideriamo ora serie di potenze in campo complesso, ossia consideriamo serie della forma $\sum a_n(x-x_0)^n$ con a_n, x_0 e la variabile x numeri complessi[1]. Poiché il criterio della radice vale anche per serie numeriche a coefficienti in $\mathbb{C}$, si verifica immediatamete che *il Teorema 5.32 e la sua dimostrazione valgono parola per parola anche nel caso complesso.* Naturalmente ora l'insieme delle x tali che $|x-x_0|<1$ coincide con il disco aperto nel piano complesso di centro x_0 e raggio 1 (e quindi si spiega anche il nome "raggio di convergenza"). In queso paragrafo estenderemo i risultati dei paragrafi precedenti (quelli legati alla integrazione verranno discussi in seguito[2]).

Una serie di potenze complesse $f(z) := \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ convergente nel disco complesso $D := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$ definisce una funzione da $D \subseteq \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ ossia una *funzione complessa di variabile complessa*. Molte delle nozioni introdotte nel caso di funzioni reali o complesse di variabile reale (quali continuità, limiti e derivate[3]) si estendono nella maniera ovvia. Sia $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

(i) f si dice **continua** in $z_0 \in E$ se

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\ , \quad \forall\ z \in E \text{ con } |z-z_0| < \delta\ ; \tag{A.3}$$

f è continua in E, $f \in C(E, \mathbb{C})$, se f è continua in ogni punto $z_0 \in E$; f è **uniformemente continua** in E se (A.3) vale per ogni $z_0 \in E$ (e la scelta di δ è indipendente da z_0);

(ii) $\alpha \in \mathbb{C}$ è il **limite di** f per z che tende a $z_0 \in E$, $\alpha = \lim_{z\to z_0} f(z)$, se

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \qquad |f(z) - \alpha| < \varepsilon\ , \quad \forall\ z \in E \text{ con } 0 < |z-z_0| < \delta\ ; \tag{A.4}$$

(iii) f si dice **derivabile** in z_0 punto interno[4] di E se esiste il limite del rapporto incrementale $(f(z)-f(z_0))/(z-z_0)$ per $z \to z_0$, tale limite, se esiste, è la **derivata** di f in z_0 e si denota con $f'(z_0)$ o con $\frac{df}{dz}(z_0)$:

$$f'(z_0) := \frac{df}{dz}(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\ ; \tag{A.5}$$

se $E \subseteq \mathbb{R}$ è aperto, $f \in C^1(E, \mathbb{C})$ significa che f è derivabile in ogni punto di E e la sua derivata $f'(z)$ è una funzione continua su E (le classi $C^k(E, \mathbb{C})$ si definiscono come al solito per induzione, ma, come vedremo tra poco [Osservazione A.6], tale definizione non è molto significativa).

[1] Di solito, per indicare serie nel campo complesso la variabile indipendente viene indicata con z e la serie ha la forma $\sum a_n(z-z_0)^n$. In questo paragrafo useremo entrambe le notazioni specificando, quando fosse necessario, se la variabile x è da intendersi reale o complessa.

[2] Si veda **A.2**, **A.3** e **A.4**.

[3] Per l'integrazione si vedano **A.2** e **A.3**.

[4] z_0 è **interno a** E se esiste un $\delta > 0$ tale che il disco aperto $\{z : |z-z_0| < \delta\} \subseteq E$; un insieme $E \subseteq \mathbb{C}$ è **aperto** se ogni suo punto è interno; un insieme $E \subseteq \mathbb{C}$ è **chiuso** se è il complementare di un aperto.

Esempio A.3 Consideriano il caso $f(z) = z^n$ (e $E = \mathbb{C}$). Per $n = 0, 1$ si ha, ovviamente, $f'(z) = 0, 1$. Sia $n \geq 2$. Esattamente come nel caso reale, chiamando h il numero complesso $z - z_0$, otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} z_0^j\ h^{n-j}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} z_0^j\ h^{n-j-1} = n z_0^{n-1}\ . \end{aligned} \tag{A.6}$$

Quindi z^n è derivabile (in senso complesso) e la sua derivata (nel punto generico z) è (come nel caso reale) nz^{n-1}.

Esempio A.4 Diamo ora un esempio di funzione complessa di variabile complessa non derivabile. Sia $f(z) = \bar{z}$ dove la barra, come d'uso comune, denota complesso coniugato, ossia se $z = x + iy$ con x e y rispettivamente parte reale ed immaginaria di z, allora $\bar{z} = x - iy$. Osserviamo che se f è derivabile in z_0, allora comunque si scelga una successione di numeri complessi $z_n \to z_0$ (ossia tali che $|z_n - z_0| \to 0$) si ha $\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n - z_0} \to f'(z_0)$. Fissiamo z_0 e consideriamo le successioni $z_n := z_0 + \frac{1}{n}$ e $w_n := z_0 + i\frac{1}{n}$. Si verifica immediatamente che $z_n \to z_0$, $w_n \to z_0$ e che

$$\frac{\bar{z}_n - \bar{z}_0}{z_n - z_0} = 1\ , \qquad \frac{\bar{w}_n - \bar{z}_0}{w_n - z_0} = -1\ ,$$

da questo segue che la funzione $z \to \bar{z}$ non è derivabile in alcun punto.

Osservazione A.5 (i) Grazie alle definizioni sopra elencate, possiamo estendere le definizioni, date in §3, di convergenza uniforme, per serie e successioni, e di convergenza totale per serie, anche per funzioni complesse di variabile complessa[5]. Dopodiché le Proposizioni 5.23 e 5.27, *con le loro dimostrazioni*, valgono anche per funzioni complesse di variabile complessa. Allo stesso modo, le definizioni e i risultati dei primi tre paragrafi del presente capitolo si estendono *verbatim* al caso di funzioni complesse di variabile complessa (per i risultati relativi all'integrazione si vedano **A.2**, **A.3** e **A.4**).

(ii) Consideriamo una funzione complessa $z \in D \subseteq \mathbb{C} \to f(z) \in \mathbb{C}$ dove D è un aperto di $\mathbb{C}$ tale che $D \cap \mathbb{R}$ sia un aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ e supponiamo che $f(x) \in \mathbb{R}$ se $x \in D \cap \mathbb{R}$. Se f è derivabile in senso complesso su D allora f è derivabile, nel senso delle funzioni reali di variabile reale, su $D \cap \mathbb{R}$ e (naturalmente) la derivata complessa e quella reale coincidono su $D \cap \mathbb{R}$.

Osservazione A.6 Sebbene la discussione appena fatta possa far pensare che l'analisi delle funzioni complesse di variabile complessa sia analoga a quella delle funzioni complesse di variabile reale, nello studio delle funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ appaiono nuovi e straordinari fenomeni. Ad esempio in seguito verrà provato che

Se $E \subseteq \mathbb{C}$ è un insieme aperto e $f \in C^1(E, \mathbb{C})$ allora f è rappresentabile come serie di potenze nell'intorno di ogni punto di E.

Si noti che dal Teorema 5.36 (versione complessa) segue, in particolare, che la classe $C^1(E, \mathbb{C})$ *coincide* con la classe $C^\infty(E, \mathbb{C})$!

[5]Ossia con $E \subseteq \mathbb{C}$, $x, x_0 \in \mathbb{C}$ e u_n e u funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$.

Esponenziale complesso

Concludiamo questo paragrafo discutendo la **funzione esponenziale** nel campo complesso. Definiamo per $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \ . \tag{A.7}$$

Poiché $\limsup \left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} = 0$ si ha che *il raggio di convergenza della serie esponenziale* (A.7) *è infinito*. In effetti, possiamo stimare l'errore che si commette approssimando e^z con la somma parziale di ordine N come segue. Dato z, sia N un intero tale che $N+2 > |z|$, allora

$$\begin{aligned}
\Big|\exp(z) - \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}\Big| &= |\sum_{k>N} \frac{z^k}{k!}| \le \sum_{k>N} \frac{|z|^k}{k!} \\
&= \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}\Big(1 + \frac{|z|}{N+2} + \frac{|z|^2}{(N+3)(N+2)} + \cdots\Big) \\
&\le \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \big(\frac{|z|}{N+2}\big)^k \\
&= \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \ \frac{N+2}{N+2-|z|} \ .
\end{aligned} \tag{A.8}$$

In particolare se $|z| \le 1$ si ha, per ogni $N > 0$,

$$|\exp(z) - \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}| \le \frac{1}{(N+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{N+2}} = \frac{1}{(N+1)!} \frac{N+2}{N+1} < \frac{1}{N!\ N} \ . \tag{A.9}$$

Poniamo ora in relazione la funzione esponenziale con il numero di Nepero e. Dalla formula del binomio di Newton, si ha che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \ \frac{1}{k!} \ . \tag{A.10}$$

Osservando che $\dfrac{n!}{(n-k)!n^k} \le 1$ per ogni $0 \le k \le n$, otteniamo che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} := \exp(1) \ , \tag{A.11}$$

e prendendo il limite superiore per $n \to \infty$ si ha che $\limsup_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le \exp(1)$. D'altra parte, per ogni $n_0 \le n$ si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ge \sum_{k=0}^{n_0} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \ \frac{1}{k!} \ . \tag{A.12}$$

Ora, poiché, per k fissato, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} = 1$, prendendo il limite inferiore per $n \to \infty$ in (A.12), otteniamo che

$$\liminf_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ge \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} \tag{A.13}$$

e prendendo il limite per $n_0 \to \infty$ si ottiene $\liminf_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \exp(1)$ che insieme alla disuguaglianza sopra dimostrata implica che

$$\exp(1) \leq \liminf_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \limsup_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \exp(1) \ . \tag{A.14}$$

In particolare il $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ esiste e, come è noto, prende il nome di *numero di Nepero* e si denota spesso con e.

Dimostriamo ora *la regola di addizione per la funzione esponenziale complessa* ossia:

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \qquad \forall \quad z, w \in \mathbb{C} \ . \tag{A.15}$$

Per la formula binomiale di Newton, si dimostra che

$$\begin{aligned} \exp(z+w) \quad &:= \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= \quad \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!} \ \sum_{h=0}^{\infty}\frac{w^h}{h!} := \exp(z)\exp(w) \ . \end{aligned} \tag{A.16}$$

Da tale regola e dal fatto che $\exp(0) = 1$ segue immediatamente che $\exp(-z)\exp(z) = 1$ ossia che

$$[\exp(z)]^{-1} = \exp(-z) \ , \qquad \forall \ z \in \mathbb{C} \ . \tag{A.17}$$

Notiamo anche che[6]

$$\overline{\exp(z)} := \overline{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}} = \lim_{n\to\infty}\overline{\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{z}^k}{k!} := \exp(\overline{z}) \ . \tag{A.18}$$

Un'altra proprietà fondamentale della funzione esponenziale è che la sua derivata complessa coincide con sé stessa: per il Teorema 5.36 (caso complesso), $\exp(z)$ è derivabile e la sua derivata si ottiene derivando termine a termine la serie che la rappresenta, dunque

$$\frac{d}{dz}\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} := \exp(z) \ . \tag{A.19}$$

Prima di passare a discutere le funzioni trigonometriche consideriamo brevemente la funzione $\exp(x)$ per x reali. Innanzitutto facciamo vedere che

$$\exp(x) = e^x \qquad \forall \ x \in \mathbb{R} \ . \tag{A.20}$$

Da (A.15) si ha, per ogni numero intero positivo q, che

$$\underbrace{\exp\left(\frac{1}{q}\right)\cdots\exp\left(\frac{1}{q}\right)}_{q \text{ volte}} = \exp(1) := e \ , \tag{A.21}$$

[6]Si ricorda che il complesso coniugato di una somma di numeri complessi è uguale alla somma dei complessi coniugati; inoltre l'operazione di complesso coniugato è continua sul campo dei complessi ossia se $z_n \to z$ allora $\overline{z_n} \to \overline{z}$.

ossia

$$\exp\left(\frac{1}{q}\right) = e^{\frac{1}{q}} \ . \tag{A.22}$$

Da (A.21) e da (A.15), se p e q sono numeri interi positivi,

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{q}\right)\cdots\exp\left(\frac{1}{q}\right)}_{p \text{ volte}} = e^{\frac{p}{q}} \ . \tag{A.23}$$

Essendo la funzione $\exp(z)$ continua su $\mathbb{C}$ (Proposizione 5.23 versione complessa), se p_k e q_k sono numeri interi positivi tali che p_k/q_k tende al numero reale x, si ha che $e^{\frac{p_k}{q_k}} = \exp\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \to \exp(x)$; tale relazione mostra la validità di (A.20) nel caso in cui x sia un numero reale positivo. Se $x < 0$, da (A.17) segue che $e^{-x} = \exp(-x) = \exp(x)^{-1} = 1/e^x$ e dunque $\exp(x) = \exp(-x)^{-1} = \left(e^{-x}\right)^{-1} = e^x$, il che mostra la validità di (A.20) per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Possiamo ora facilmente ridimostrare le proprietà fondamentali della funzione $x \in \mathbb{R} \to e^x = \exp(x)$: dalla definizione di $\exp(x)$ segue che $e^x > 0$ per $x \geq 0$ e poiché, per $x < 0$, $\exp(x) = 1/\exp(-x) = 1/\exp(|x|)$ si ha che

$$\exp(x) = e^x > 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R} \ . \tag{A.24}$$

Per ogni intero positivo k e per ogni $x > 0$, $e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, dunque $e^x/x^k > x/(k+1)!$ e quindi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x}x^k = 0 \qquad \forall\ k \in \mathbb{N} \ . \tag{A.25}$$

Poiché la derivata reale coincide con quella complessa per $x \in \mathbb{R}$ si ha che $(e^x)' = e^x$ e dunque la funzione $x \in \mathbb{R} \to e^x \in \mathbb{R}$ è una funzione strettamente positiva, strettamente crescente e strettamente convessa che manda la retta $\mathbb{R}$ sulla semiretta $(0, \infty)$ in maniera biunivoca. Le ben note proprietà del logaritmo reale, ossia (per definizione) della funzione inversa di $x \to e^x$ derivano da quanto appena detto.

In vista della (A.20) è *uso comune definire* e^z, *per ogni* $z \in \mathbb{C}$, *come* $\exp(z)$.

Funzioni trigonometriche

Definizione A.7 *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *si pone*

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \ , \qquad \operatorname{sen} z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ . \tag{A.26}$$

Come per l'esponenziale si verifica immediatamente che *il raggio di convergenza di tali serie è infinito*. Inolte è immediato verificare che[7] , per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\cos x \in \mathbb{R}\ ,\ \operatorname{sen} x \in \mathbb{R}\ , && \text{(A.27)}\\
&\cos(-z) = \cos z\ , \qquad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z\ , && \text{(A.28)}\\
&\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\ , \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\ , && \text{(A.29)}\\
&e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \quad \text{(formula di Eulero)}\ , && \text{(A.30)}\\
&\operatorname{Re} e^{ix} = \cos x\ ,\ \operatorname{Im} e^{ix} = \operatorname{sen} x\ ; && \text{(A.31)}\\
&\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w\ , && \text{(A.32)}\\
&\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w\ , && \text{(A.33)}\\
&|e^{ix}|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1\ , && \text{(A.34)}\\
&\frac{d}{dz}\cos z = -\operatorname{sen} z\ , \qquad \frac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \cos z\ . && \text{(A.35)}
\end{aligned}$$

Possiamo ora dare una definizione "analitica" di "pigreco", il cui valore numerico è

$$\begin{aligned}
\pi \quad = \quad & 3.14159265358979323846264338327950288419716 9\\
& 39937510582097494459230781640628620899862 8\\
& 03482534211706798214808651328230664709384 4\\
& 60955058223172535940812848111745028410270 1\\
& 93852110555964462294895493038196442881097 5\\
& 66593344612847564823378678316527120190914 5\\
& 64856692346034861045432664821339360726024 9\\
& 14127372458700660631558817488152092096 2....\ ,
\end{aligned}$$

Sia A l'insieme degli zeri positivi del coseno ossia $A := \{x > 0 :\ \cos x = 0\}$. Tale insieme è non vuoto. Infatti il coseno è una funzione continua tale che $\cos 0 = 1$ mentre

$$\cos 2 := 1 - 2 + \frac{2}{3} - \Big(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\Big) - \cdots < -\frac{1}{3}\ .$$

Definizione A.8 $\pi = 2\alpha_1$ *dove* $\alpha_1 := \inf A$.

[7] Le (A.27) e (A.28) seguono immediatamente dalla definizione A.7; la (A.29) segue addizionando le serie esponenziali (cosa possibile essendo tali serie assolutamente convergenti); la (A.30) segue da (A.29); la (A.31) segue da (A.30) e da (A.27); le (A.32) e (A.33) seguono da (A.29), (A.15) e (A.30); da (A.18) e (A.15) segue che $|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{(e^{ix})} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$ ossia la (A.34); la (A.35) segue dalla definizione A.7 e dalla versione complessa della Proposizione 5.27.

Da tale definizione seguono le seguenti ben (?) note proprietà di periodicità e di simmetria delle funzioni seno e coseno: per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha[8]:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \;, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \;, \qquad e^{i\pi} = -1 \;, \qquad e^{i2\pi k} = 1 \;\; \forall k \in \mathbb{Z} \;, \tag{A.36}$$
$$e^{z+2\pi i} = e^z \;, \qquad \cos(z+2\pi) = \cos z \;, \qquad \operatorname{sen}(z+2\pi) = \operatorname{sen} z \;, \tag{A.37}$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-z\right) \;, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right) \;, \tag{A.38}$$
$$\operatorname{sen}(\pi+z) = -\operatorname{sen}(\pi-z) \;, \qquad \cos(\pi+z) = \cos(\pi-z) \;. \tag{A.39}$$

Si noti che da tali proprietà di periodicità e simmetria e dalle regole di derivazione del seno e coseno (si veda anche la discussione nella nota 8) seguono i ben noti grafici di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ (per $x \in \mathbb{R}$). Infine dimostriamo alcune proprietà di iniettività della funzione esponenziale complessa ossia:

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| = 1 \quad \exists! \quad t \in [0, 2\pi) \quad \text{tale che} \quad z = e^{it} \;, \tag{A.40}$$
$$\forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \quad \exists \quad w \in \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad z = e^w \;, \tag{A.41}$$
$$e^z = e^w \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, k \in \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad z = w + 2k\pi i \;. \tag{A.42}$$

Cominciamo col dimostrare che $e^{it} \neq 1$ se $t \in (0, 2\pi)$. Infatti, dato $t \in (0, 2\pi)$ sia $\tau := t/4 \in (0, \pi/2)$ e poniamo $e^{i\tau} = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$). I numeri x e y appartengono all'intervallo aperto $(0,1)$ e $e^{it} = (x+iy)^4 = (x^2-y^2)^2 - 4x^2y^2 + i4xy(x^2-y^2)$. Se e^{it} fosse reale allora si avrebbe che $x^2 = y^2$ e da (A.34) seguirebbe che $x^2 = y^2 = 1/2$ ossia $e^{it} = -1$. Da questa proprietà segue immediatamenter l'unicità in (A.40): se fosse $e^{it_1} = e^{it_2}$ con $0 \le t_1 < t_2 < 2\pi$ allora $e^{i(t_2-t_1)} = 1$ con $0 < t_2 - t_1 < 2\pi$ il che contraddirrebbe quanto appena dimostrato. Rimane da dimostrare l'esistenza in (A.40): dato $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, poniamo $z = x + iy$ (con $x, y \in [-1, 1]$). Se x e y appartengono a $[0,1]$, essendo $\cos t$ strettamente decrescente per $t \in [0, \pi/2]$, si avrebbe che esiste un unico $t_0 \in [0, \pi/2]$ tale che $\cos t_0 = x$ e dunque (essendo $y \ge 0$) $e^{it_0} = z$. Se $x < 0$ e $y \ge 0$, allora $-iz = e^{it_0}$ e quindi $z = ie^{it_0} = e^{i(t_0+\pi/2)}$. Se $y < 0$, allora $-z = e^{it_0}$ e quindi $z = -e^{it_0} = e^{i(t_0+\pi)}$, il che conclude la dimostrazione di (A.40). La (A.41) segue ora facilmente: sia $x = \log|z|$. Allora $z/|z| = ze^{-x} = e^{iy}$ per un unico $y \in [0, 2\pi)$ e dunque $z = e^w$ con $w := x + iy$. Infine se $z := x + iy$, $w := x' + iy'$ (con $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ e) con $y \ge y'$ e se $e^z = e^w$ allora $e^x = e^{x'}$ e quindi $x = x'$ e $e^{i(y-y')} = 1$. Se poniamo $k := [(y-y')/(2\pi)]$, allora $y - y' - 2\pi k \in [0, 2\pi)$ e la (A.42) segue da (A.40). ∎

Esempio A.9 Come esempio discutiamo la funzione g definita come $g(z) := \frac{e^{iz}-1}{z}$ se $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e $g(0) = i$. Innanzitutto osserviamo che

$$g(z) := \frac{e^{iz}-1}{z} := \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!} - 1}{z} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!}}{z} = i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^k}{(k+1)!} \tag{A.43}$$

e tale serie (esattamente come la serie che definisce l'esponenziale complesso) ha raggio di convergenza infinito. In particolare *g è continua in $z = 0$*. Studiamo ora gli zeri di g ossia

[8] Essendo $\pi/2 = \alpha_1$ uno zero del coseno, da (A.34) segue che $\operatorname{sen}(\pi/2) = \pm 1$, d'altra parte essendo $\cos x > 0$ per $x \in [0, \pi/2)$ (come segue di nuovo dalla definizione di π e da $\cos 0 = 1$) ed essendo $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, la funzione $\operatorname{sen} x$, che vale 0 in 0 risulta strettamente crescente tra 0 e $\pi/2$ quindi $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$; dunque $e^{i\pi/2} = i$; da (A.15) segue che $e^{i\pi} = e^{i\pi/2}e^{i\pi/2} = i^2 = -1$, $e^{2\pi i} = e^{i\pi}e^{i\pi} = 1$, $e^{2\pi ik} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1$ con il che abbiamo dimostrato la validità di (A.36). Le (A.37), (A.38) e (A.39) seguono ora immediatamente da (A.36) e da (A.15) o da (A.32) e (A.33).

cerchiamo valori di z dove $g(z) = 0$. Abbiamo visto che $g(0) = i$ e, se $z \neq 0$, $g(z) = 0$ è equivalente a $e^{iz} - 1 = 0$. Usando le (A.30) troviamo che

$$\mathrm{Re}\left(e^{iz} - 1\right) = e^{-y}\cos x - 1\ , \quad \mathrm{Im}\left(e^{iz} - 1\right) = e^{-y}\,\mathrm{sen}\, x\ , \quad (\mathrm{Re}\, z := x\ ,\ \ \mathrm{Im}\, z := y)\ .$$

Dunque affinché $e^{iz} - 1 = 0$ deve essere $\cos x = e^y$ e $\mathrm{sen}\, x = 0$ il che equivale a dire $y = 0$ e $x = 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. Dunque *gli zeri di* $g(z)$ *sono sull'asse reale e sono dati da* $z = 2k\pi$ *con* k *intero ma diverso da zero.*

Il logaritmo complesso

Ricordiamo:

$$\begin{aligned}
\exp(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\ ,\\
\mathrm{sen}\,(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ,\\
\cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\ ,\\
\mathrm{senh}\,(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ,\\
\cosh(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}\ .
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Da tali relazioni segue imediatamente la "formula di Eulero":

$$\exp(iz) = \cos z + i\,\mathrm{sen}\, z\ , \qquad \forall\ z \in \mathbb{C}\ . \tag{A.45}$$

Vale, inoltre, il seguente importante

Teorema A.10 (Teorema di addizione) $\exp(z + w) = \exp(z)\ \exp(w)$*,* $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$*.*

Definizione A.11 (Pi greco) $\pi := 2\ \inf\left\{x > 0 :\ \cos x = 0\right\}\ .$

Teorema A.12

(1) *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z| = 1$*, esiste un unico* $t \in [0, 2\pi)$ *tale che*

$$\exp(it) = z\ .$$

(2) *per ogni* $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$*, esiste* $w \in \mathbb{C}$ *tale che*

$$\exp(w) = z\ .$$

(3) $\exp(z) = \exp(w)$ *se e solo se esiste* $k \in \mathbb{Z}$ *tale che* $z - w = 2\pi k i$*.*

Si ricorda anche che, se e denota il numero (trascendente) di Nepero

$$
\begin{aligned}
e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad = \quad & 2.718281828459045235360287471352662497757247 \\
& 09369995957496696762772407663035354759457 \\
& 13821785251664274274663919320030599218174 \\
& 13596629043572900334295260595630738132328 \\
& 62794349076323382988075319525101901157383 \\
& 41879307021540891499348841675092447614606 \\
& 68082264800168477411853742345442437107539 \\
& 07774499206955170276183860626133138458300 \\
& 07520449338265602976067371132007093287091 \\
& 274437470472306969772\ldots\ ,
\end{aligned}
$$

allora

$$
e^x = \exp(x) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}\ . \tag{A.46}
$$

Poiché, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x) > 0$ (utilizzando il teorema di derivazione di serie di funzioni), si ha che $x \to \exp(x)$ è una funzione strettamente crescente a valori in $(0, \infty)$.

Definizione A.13

($*$) *Denotiamo la funzione (reale) inversa di* $x \in \mathbb{R} \to y = \exp(x) \in (0,\infty)$ *con* $\log_* y$.

($**$) *Se* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *poniamo*

$$
\log w = \{z :\ \exp(z) = w\}\ , \quad \arg w = \operatorname{Im}\,\log w = \{\operatorname{Im} z : z \in \log w\}\ .
$$

Proposizione A.14 *Sia* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Esiste un unico* $z = x + iy \in \log w$ *tale che* $y \in [0, 2\pi)$. *Inoltre* $x = \log_* |w|$.

Dimostrazione Per la parte (1) del Teorema A.12 esiste un unico $y \in [0, 2\pi)$ tale che

$$
\exp(iy) = \frac{w}{|w|}\ ,
$$

e per il teorema di addizione (Teorema A.10) e la definizione di $\log_*$

$$
\exp(\log_* |w| + iy) = \exp(\log_* |w|)\exp(iy) = |w|\ \frac{w}{|w|} = w\ . \quad \blacksquare
$$

Definizione A.15 *La funzione che a* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *associa l'unico* $z \in \mathbb{C}$ *della Proposizione A.14 si denota* Log w *e si chiama "parte principale del logaritmo di* w*"; la funzione che a* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *associa l'unico* $y \in [0, 2\pi)$ *della Proposizione A.14 si denota* Arg w *e si chiama "argomento principale di* w*"*

Proposizione A.16 *Se* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *allora*

$$
\log w = \text{Log}\ w + i2\pi\mathbb{Z} = \log_* |w| + i\text{Arg}\ w + i2\pi\mathbb{Z}\ .
$$

La dimostrazione è conseguenza immediata della Proposizione A.14 e della parte (3) del Teorema A.12. $\blacksquare$

Proposizione A.17 *Se w_1 e w_2 sono numeri complessi diversi da zero, allora*

$$\log(w_1 w_2) = \log w_1 + \log w_2 \ . \tag{A.47}$$

Si noti che l'uguaglianza in (A.47) è un'uguaglianza tra insiemi.
Dimostrazione Se $z_k \in \log w_k$, allora $\exp(z_k) = w_k$ e, per il teorema di addizione, $\exp(z_1 + z_2) = w_1 w_2$, cioè $z_1 + z_2 \in \log(w_1 w_2)$. Questo dimostra che

$$\log w_1 + \log w_2 \subseteq \log(w_1 w_2) \ . \tag{A.48}$$

Sia ora $z \in \log(w_1 w_2)$ e si considerino $z_k \in \log w_k$. Si ha allora (per le scelte fatte e per il teorema di addizione)

$$\exp(z) = w_1 w_2 = \exp(z_1 + z_2).$$

Dalla parte (3) del Teorema A.12 segue allora che esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $z - (z_1 + z_2) = 2\pi i k$, ovvero, $z = (z_1 + 2\pi i k) + z_2$. Ma $z_1 + 2\pi i k \in \log w_1$ e, dunque, $z \in \log w_1 + \log w_2$, il che dimostra

$$\log(w_1 w_2) \subseteq \log w_1 + \log w_2 \ .$$

Tale relazione assieme a (A.48) prova l'asserto. ∎

Definizione A.18 *Se $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e $b \in \mathbb{C}$ definiamo*

$$a^b := \exp(b \log a) = \Big\{ z = \exp(bw) : \ w \in \log a \Big\} \ . \tag{A.49}$$

Osservazione A.19 Normalmente, in letteratura, l'esponenziale di un numero complesso $\exp(z)$ si denota, più sinteticamente (ed in vista della relazione A.46), con e^z.

Esercizio Trovare gli errori:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \exp\Big(\frac{1}{2}\log 2\Big) = \exp\Big(\frac{1}{2}(\log_* 2 + i2\pi\mathbb{Z})\Big) = \pm\sqrt{2} \ ;$$
$$e = e^1 = e^{-i^2} = e^{-i\cdot i} = \Big(e^{-i}\Big)^i = \Big(e^{-i+2\pi i}\Big)^i = e^{(-i+2\pi i)i} = e^{1-2\pi} = \frac{e}{e^{2\pi}} \ .$$

3 *Esercizi e complementi*

T A.1 Tralasciando gli enunciati che coinvolgano l'integrazione di funzioni, si verifichi attentamente che tutti gli enunciati e relative dimostrazioni del Capitolo 3 valgono anche nel caso complesso.

T A.2 (Integrazione complessa I) Per ogni $z, z_0 \in \mathbb{C}$ e per ogni intero $k \neq -1$ *definiamo*

$$\int_{z_0}^{z} (w - z_0)^k dw := \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1} \ . \tag{A.50}$$

Si estenda, per linearità, tale definizione a qualunque polinomio in $(z - z_0)$ a coefficienti in $\mathbb{C}$. Se $f(z) := \sum_{k\geq 0} a_k (z - z_0)^k$ è una serie di potenze con raggio di convergenza positivo, *definiamo*

$$\int_{z_0}^{z} f(w) dw := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (z - z_0)^n \ . \tag{A.51}$$

Si verifichi che per ogni serie di potenze di centro z_0 si ha

$$\frac{d}{dz} \int_{z_0}^{z} f(w) dw = f(z) \ . \tag{A.52}$$

Si verifichi anche che vale l'enunciato completo del Teorema 5.36.

T A.3 (Integrazione complessa II) C'è un'altra maniera, più generale, di definire l'integrazione nel campo complesso. Siano $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ due funzioni reali continue sull'intervallo $[a,b]$ e derivabili con continuità in (a,b) e si consideri la funzione $\gamma : t \in [a,b] \to \gamma(t) := \alpha(t) + i\beta(t) \in \mathbb{C}$. Si dice che $\gamma(t)$ *rappresenta una curva complessa regolare* se $\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2 > 0$ per ogni $t \in (a,b)$. Sia ora $z \in \mathbb{C} \to f(z) \in \mathbb{C}$ una funzione complessa continua su di un insieme aperto $D \subseteq \mathbb{C}$ e sia γ una curva complessa regolare come sopra contenuta in D (cioè $\{\gamma(t) : t \in [a,b]\} \subseteq D$). Denotiamo con $u(z) := \mathrm{Re}\,[f(z)]$ la parte reale di $f(z)$ e con $v(z) := \mathrm{Im}\,[f(z)]$ la parte immaginaria di $f(z)$ cosicché $f(z) = u(z) + iv(z)$; si noti che $t \in [a,b] \to u \circ \gamma(t)$ e $t \in [a,b] \to v \circ \gamma(t)$ sono funzioni reali e continue della variabile reale t. Definiamo ora l'integrale di f lungo la curva γ come

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz \quad &:= \quad \int_a^b f \circ \gamma(t)\ \gamma'(t)\ dt \\
&:= \quad \int_a^b \Big[u \circ \gamma(t)\alpha'(t) - v \circ \gamma(t)\beta'(t)\Big]\ dt \\
&\qquad\quad + i \int_a^b \Big[u \circ \gamma(t)\beta'(t) + v \circ \gamma(t)\alpha'(t)\Big]\ dt\ .
\end{aligned}$$

(i) Si dimostri che se $f(z) = z^k$, e se γ è una curva complessa regolare, $\int_\gamma f(z)dz$ dipende solo dagli estremi di γ (ossia dai punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ e non dalla particolare forma di γ).

T A.4 Verificare che, grazie agli Esercizi **A.2** e **A.3**, tutti i risultati del Capitolo 3, inclusi quelli all'integrazione, valgono nel campo complesso.

T A.5 Si dimostri il seguente "Teorema di Cauchy":

Sia $f(z)$ una serie di potenze convergente in un disco complesso D. Allora per ogni curva complessa regolare e chiusa[9] *contenuta in*[10] *D si $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Esercizio A.6 Usare la (A.9) per dimostrare che il numero di Nepero e è un numero irrazionale.

4 Sviluppi in serie di funzioni elementari

Dimostriamo gli sviluppi in serie di Taylor delle principali funzioni elementari.

[9] Ossia con $\gamma(a) = \gamma(b)$.
[10] Ossia $\gamma(t) \in D$ per ogni $a \leq t \leq b$.

$$\frac{x^m}{(1-x)^n} = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{n-1-m+k}{n-1} x^k; \quad n, m \in \mathbb{N}, n \geq 1, |x| < 1 \tag{A.53}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall\, x \tag{A.54}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\ ; \qquad |x| < 1\ , \tag{A.55}$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\ ; \qquad |x| < 1\ , \tag{A.56}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k\ ; \qquad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\ ,\ |x| < 1\ , \tag{A.57}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ; \qquad \forall\, x\ , \tag{A.58}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\ ; \qquad \forall\, x\ , \tag{A.59}$$

$$\operatorname{Arcsen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\ \frac{1}{2k+1}\ x^{2k+1}\ ; \qquad |x| < 1\ , \tag{A.60}$$

$$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\ \frac{1}{2k+1}\ x^{2k+1}\ ; \qquad |x| < 1\ , \tag{A.61}$$

$$\operatorname{Arctan} x = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{2k-1}\ ; \qquad |x| < 1\ , \tag{A.62}$$

$$\operatorname{senh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ; \qquad \forall\, x\ , \tag{A.63}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\ ; \qquad \forall\, x\ , \tag{A.64}$$

$$\operatorname{Arcsenh} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\ ; \qquad |x| < 1\ , \tag{A.65}$$

$$\operatorname{Arctanh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\ ; \qquad |x| < 1\ , \tag{A.66}$$

dove per α numero reale non intero (e k intero non negativo)

$$\binom{\alpha}{0} := 1\ , \quad \binom{\alpha}{1} := \alpha\ ,$$

e per $k \geq 2$,

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\ ; \tag{A.67}$$

il doppio fattoriale $n!!$ (per n intero) è definito come

$$0!! = 1\ , \quad 1!! := 1\ , \quad \text{e per } n \geq 2 \quad n!! := n\ (n-2)!!\ ; \tag{A.68}$$

si noti la scelta del "ramo principale" per le funzioni circolari e iperboliche inverse[11].

Dimostrazione La (A.53) si ottiene immediatamente ricordando l'Esempio 5.37.

La (A.54) è ben nota.

La (A.55) si ottiene dalla relazione

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x)$$

espandendo in serie $(1+t)^{-1}$ ed usando il Teorema 5.36.

La (A.56) si ottiene dalla relazione precedente osservando che $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x)$.

La (A.57) si ottiene calcolando la serie di Taylor ed usando il usare il criterio del rapporto per serie[12].

Le (A.58) e (A.59) valgono per definizione.

La (A.60) si ottiene dalla relazione

$$\mathrm{Arcsen}\, x = \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\ dt\ ,$$

usando la (A.57).

La (A.61) si ottiene dalla (A.60) osservando che $\mathrm{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsen}\, x$.

La (A.62) si ottiene dalla relazione

$$\mathrm{Arctan}\, x = \int_0^x (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\ dt\ ,$$

usando la (A.57).

Le (A.63) e (A.64) derivano dalla serie esponenziale (A.53); le (A.64) e (A.65) seguono (analogamente al caso delle funzioni circolari inverse), rispettivamente, dalle identità

$$\mathrm{Arcsenh}\, x = \int_0^x (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\ dt\ , \qquad \mathrm{Arctan}\, x = \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\ dt\ . \tag{A.69}$$

Le espansioni in serie delle funzioni $\tan x$, $\mathrm{cotan}\, x$, $\tanh x$, $\mathrm{cotanh}\, x$ sono date in termini dei cosiddetti **numeri di Bernoulli**. Per definizione i numeri di Bernoulli[13] B_n $(n \geq 0)$ sono i coefficienti dello sviluppo attorno a $x = 0$ della funzione $\frac{x}{e^x-1}$ moltiplicati per $n!$:

$$\frac{x}{e^x - 1} := \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}\ . \tag{A.70}$$

---

[11] $\mathrm{Arcsen}\, 0 = 0$, $\mathrm{Arccos}\, 0 = \pi/2$, $\mathrm{Arctan}\, 0 = 0$, $\mathrm{Arcsenh}\, 0 = 0$, $\mathrm{Arctanh}\, 0 = 0$.

[12] Dal criterio del rapporto per serie numeriche si ottiene immediatamente che: *Se esiste il* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *tale limite coincide con* $1/R$ *dove* R *è il raggio di convergenza della serie di potenze* $\sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n$.

[13] Si veda anche **A.9**.

Valgono allora le seguenti identità per $|x|$ sufficientemente piccolo[14]:

$$\begin{aligned}
\tan x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} \, |B_{2k}| \, x^{2k-1} \,, && \text{(A.71)}\\
\operatorname{cotan} x &= \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \, |B_{2k}| \, x^{2k-1} \,, && \text{(A.72)}\\
\tanh x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} \, B_{2k} \, x^{2k-1} \,, && \text{(A.73)}\\
\operatorname{cotanh} x &= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \, B_{2k} \, x^{2k-1} \,. && \text{(A.74)}
\end{aligned}$$

Per la dimostrazione si vedano **A.9** e **A.10**.

Un'altra funzione elementare trascendente che compare spesso nelle applicazioni è la cosiddetta *funzione di errore*

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt \,. \tag{A.75}$$

L'espansione in serie di tale funzione si ottiene immediatamente calcolando la serie esponenziale con $x = t^2$ e integrando da 0 a x:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \, \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \,, \qquad \big(\forall\, x\big) \,. \tag{A.76}$$

5 *Esercizi e complementi*

Esercizio A.7 Calcolare $\binom{\pm\frac{1}{2}}{k}$.

Esercizio A.8 Dimostrare che $\limsup_{k\to\infty} \left|\binom{\alpha}{k}\right|^{\frac{1}{k}} = 1$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Esercizio A.9 Sia

$$b(x) := \frac{x}{e^x - 1} \,. \tag{A.77}$$

(i) Si dimostri che $b(x)$ è analitica in $x = 0$.
(ii) Si definiscano i numeri di Bernoulli B_n come in (A.70) e si calcolino i primi cinque B_n.
(iii) Si dimostri l'identità

$$b(2x) + x = x \operatorname{cotanh} x \,. \tag{A.78}$$

(iv) Dimostrare che $B_{2k+1} = 0$ per ogni $k \geq 1$.

Esercizio A.10 (i) Usando la (A.78) si dimostri la (A.74).
(ii) Si dimostrino le identità elementari

$$\begin{aligned}
&\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \, \cosh x \,, \quad \cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 \,, \\
&\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \,, \quad 2 \operatorname{cotanh} 2x \; - \operatorname{cotanh} x = \tanh x \,.
\end{aligned}$$

[14]La determinazione esatta dei domini su cui valgono le (A.71)÷(A.74) non è immediata: comunque le (A.71) e (A.73) valgono per $x^2 < \pi^2/4$ mentre (A.72) e (A.74) valgono per $x^2 < \pi^2$.

(iii) Usando l'ultima relazione nel punto (ii) si dimostri la (A.73).
(iv) Si dimostrino le identità elementari

$$\tanh x = -i \tan ix \ , \qquad \mathrm{cotanh}\, x = i\, \mathrm{cotan}\, ix \ . \tag{A.79}$$

Usando il punto (iv) si dimostrino (A.71) e (A.72).

Appendice B

Algebra Lineare

R B.1 Alcuni richiami di algebra lineare

(1) $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ denota la matrice diagonale $(n \times n)$ con elementi di matrice $\Lambda_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\Lambda_{ii} = \lambda_i$.

(2) Se $v^{(1)}, ..., v^{(n)}$ sono n vettori in $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{C}^m$, $T := [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$ denota la matrice $(m \times n)$ con elementi di matrice $T_{ij} = v_i^{(j)}$, ossia i vettori $v^{(j)}$ costituiscono la j–esima colonna della matrice T.

(3) Se A è una matrice $(p \times m)$ e $v^{(j)} \in \mathbb{R}^m$ (o $\mathbb{C}^m$), $1 \leq j \leq n$, allora

$$A[v^{(1)}, ..., v^{(n)}] = [Av^{(1)}, ..., Av^{(n)}] \ . \tag{B.1}$$

(4) Se $[v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$ è come sopra e $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ allora

$$[v^{(1)}, ..., v^{(n)}]\Lambda = [\lambda_1 v^{(1)}, ..., \lambda_n v^{(n)}] \ . \tag{B.2}$$

(5) Se $[v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$ è come sopra ed $x = (x_1, ..., x_n)$ è un vettore in $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) allora

$$[v^{(1)}, ..., v^{(n)}]x = x_1 v^{(1)} + \cdots + x_n v^{(n)} \ . \tag{B.3}$$

(6) Si ricorda che data una matrice $(n \times n)$ ad elementi reali o complessi, si chiama **polinomio caratteristico** di A, il polinomio di grado n, $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ dove I è la matrice identità, $I = \operatorname{diag}(1, ..., 1)$ (a volte, se necessario, si indicherà I con I_n). Le n soluzioni (in generale complesse, anche se A è una matrice reale) di $P_A(\lambda) = 0$ si chiamano **autovalori di** A. L'insieme degli autovalori di A, si chiama **spettro di** A e si denota $\sigma(A)$. Tale insieme contiene, al più, n numeri complessi distinti (per esempio $\sigma(I_n) = \{1\}$). Se $\lambda \in \sigma(A)$, il determinante di $A - \lambda I$ è zero e, dalle proprietà del determinante, segue che le n colonne (in generale complesse) che formano la matrice $A - \lambda I$ sono *linearmente dipendenti*; questo, in virtù del punto (5) significa che esiste un vettore (in generale a componenti complesse) non nullo x, tale che $(A - \lambda I)x = 0$ ovvero $Ax = \lambda x$; tale vettore si chiama **autovettore** di A relativo all'autovalore λ.

(7) Una matrice quadrata $A \in \operatorname{Mat}(n \times n)$ si dice **diagonalizzabile** se esiste una matrice non singolare T (cioè con $\det T \neq 0$) tale che $T^{-1}AT = \Lambda$ con Λ matrice diagonale. Dalla proprietà del determinante

$$\det(AB) = \det(BA) \tag{B.4}$$

segue che $\det(T^{-1}BT) = \det B$. Da queste relazioni segue facilmente che se A è diagonalizzabile e $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, allora lo spettro di A è costituito dall'insieme dei λ_i.

(8) *Se A possiede n autovettori indipendenti, allora è diagonalizzabile.* Infatti, siano $v^{(j)}$ gli n autovettori indipendenti di A e λ_j i corrispondenti autovalori. Allora $T = [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$ è non singolare e dai punti (3) e (4) segue che

$$\begin{aligned} AT &= A[v^{(1)}, ..., v^{(n)}] = [Av^{(1)}, ..., Av^{(n)}] \\ &= [\lambda_1 v^{(1)}, ..., \lambda_n v^{(n)}] = [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]\Lambda = T\Lambda \end{aligned}$$

con $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Ovvero $T^{-1}AT = \Lambda$, cioè A è diagonalizzabile.

(9) (**Esercizio**) Se A possiede $m \le n$ autovalori distinti, allora i corrispondenti autovettori sono indipendenti e dunque: *se A possiede n autovalori distinti, allora è diagonalizzabile.*

(10) Se A è una matrice $(n \times m)$, A^T denota la matrice **trasposta** di A ovvero la la matrice $(m \times n)$ con elementi $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Una matrice quadrata A si dice **simmetrica** se $A^T = A$. Si verifichi che A è simmetrica (e reale) se e solo se

$$u \cdot Av = Au \cdot v \ , \qquad \forall\ u, v \in \mathbb{R}^n \ . \tag{B.5}$$

Una matrice quadrata reale U si dice **ortogonale** se $UU^T = U^TU = I$ ovvero se U è invertibile e $U^{-1} = U^T$. *Una matrice simmetrica è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale* ovvero esiste una matrice ortogonale U tale che $U^TAU = \Lambda$, con Λ diagonale (per una dimostrazione si veda, ad esempio, *Algebra lineare* di S. Lang, Ed. Boringhieri).

(11) **(Forma canonica di Jordan)** Vale il seguente teorema di Jordan[1]:

Teorema *Per ogni matrice quadrata complessa A esiste una matrice invertibile (quadrata, complessa) T tale che*

$$T^{-1}AT = J := \begin{pmatrix} J^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J^{(2)} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & J^{(m)} \end{pmatrix}$$

dove $J^{(i)}$ sono blocchi quadrati $d_i \times d_i$ e $\sum_{i=1}^m d_i = n$; tali blocchi (detti "blocchi di Jordan") hanno la forma

$$J^{(i)} = \lambda_i I_{d_i} + \varepsilon_i N_{d_i}$$

con $\lambda_i \in \mathbb{C}$, ε_i uguale o a 0 o a 1 e N_d denota la matrice $(d \times d)$ nilpotente[2]

$$N_d := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

C B.2 (Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$)

Si consideri $\mathbb{R}^n$ e la sua base "ortonormale" standard $e^{(1)}$,..., $e^{(n)}$, dove, come al solito, $e^{(j)}$ è la n–nupla, $(0, ..., 1, ..., 0)$, con tutti 0 tranne un 1 nel j–esimo posto. Ogni punto (o "vettore") $x := (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ si scrive allora come

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e^{(j)} \ , \tag{B.6}$$

[1] Per una dimostrazione si veda, ad esempio, *Algebra lineare* di S. Lang, Ed. Boringhieri.
[2] "M nilpotente" significa che esiste un intero positivo p tale che $M^p = 0$.

e il **prodotto scalare** tra due punti (o "vettori") $x, y \in \mathbb{R}^n$ è dato da

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \ . \tag{B.7}$$

Il prodotto scalare, visto come funzione su coppie di punti in $\mathbb{R}^n$ è *simmetrico e bilineare*[3]. È possibile usare il prodotto scalare anche per introdurre il concetto di[4] "angolo" in $\mathbb{R}^n$; in particolare si dice che due vettori x e y sono *ortogonali*, e si scrive $x \perp y$ se $x \cdot y = 0$. La base standard $\{e^{(j)}\}$ è "ortonormale" nel senso che $e^{(i)} \cdot e^{(j)} = \delta_{ij}$ dove δ_{ij} è il cosiddetto *delta di Kronecker*:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0 \ , & \text{se } i \neq j \ , \\ 1 \ , & \text{se } i = j \ . \end{cases} \tag{B.8}$$

Dato un vettore non nullo x definiamo *il piano ortogonale a* x l'insieme

$$\pi_x := \{y \in \mathbb{R}^n : \ y \cdot x = 0\} \ . \tag{B.9}$$

È facile vedere che[5] π_x è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $(n-1)$.

Una matrice (reale) $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ si dice *simmetrica* se

$$Ax \cdot y = x \cdot Ay \ , \qquad \forall \ x, y \in \mathbb{R}^n \ , \tag{B.10}$$

ovvero[6] se $A_{ij} = A_{ji}$ (dove A_{ij} denota l'elemento di matrice corrispondente alla riga i ed alla colonna j).

Una matrice (reale) U si dice *ortogonale* se conserva il prodotto scalare:

$$Ux \cdot Uy = x \cdot y \ , \qquad \forall \ x, y \in \mathbb{R}^n \ . \tag{B.11}$$

Si verifica facilmente[7] che U è ortogonale se e solo se vale una qualunque delle seguenti affermazioni: (i) $U^T = U^{-1}$; (ii) $|Ux| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$; (iii) $U = [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$ con $\{v^{(j)}\}$ base ortonormale in $\mathbb{R}^n$ (cioè $v^{(i)} \cdot v^{(j)} = \delta_{ij}$).

Matrici ortogonali hanno determinate uguale a[8] 1 o -1. Chiamiamo $SO(n)$ l'insieme delle matrici (reali) $(n \times n)$ ortogonali e con determinante uguale ad 1:

$$SO(n) := \{U \in \mathrm{Mat}(n \times n) : \ U^T = U^{-1} \ \text{e} \ \det U = 1\} \ . \tag{B.12}$$

Si vede facilmente[9] che ogni matrice $U \in SO(2)$ corrisponde ad una *rotazione in* $\mathbb{R}^2$ mentre ogni matrice di $SO(3)$ può scriversi come composizione di tre rotazioni in $\mathbb{R}^3$.

Concludiamo questi richiami ricordando che esiste un procedimento standard (chiamato "il procedimento di ortogonalizzazione di Gram–Schmidt") per costruire una base ortonormale $\{u^{(j)}\}$ a partire da una qualunque base di vettori, $\{v^{(j)}\}$, in $\mathbb{R}^n$ in modo tale che il sottospazio vettoriale generato da $u^{(1)}$,..., $u^{(j)}$ coincida con il sottospazio generato da $v^{(1)}$,..., $v^{(j)}$ (si veda **B.10**).

Esercizio B.3 Si dimostri che A soddisfa (B.10) se e solo se $A_{ij} = A_{ji}$.

Esercizio B.4 Si dimostri la nota 7 al Capitolo 5.

[3] Cioè: $x \cdot y = y \cdot x$ e $(ax + by) \cdot z = ax \cdot z + by \cdot z$ per ogni coppia di scalari a, b; *bi*–lineare significa che è lineare in tutti e due i suoi argomenti (cosa che deriva immediatamente dalla proprietà di simmetria).

[4] Per una discussione più generale su angoli e prodotto scalare si veda **B.5**.

[5] Esercizio **B.9**.

[6] Esercizio **B.3**.

[7] Esercizio **B.6**.

[8] Esercizio **B.6**, punto (3).

[9] Esercizi **B.7** e **B.8**.

T B.5 (Angoli in $\mathbb{R}^n$). Sia $\operatorname{Arccos} : [-1,1] \to [0,\pi]$ la funzione inversa di $\cos\theta$ definita in modo tale che $\operatorname{Arccos} 0 = \frac{\pi}{2}$; (si noti che questa definizione fissa univocamente il "ramo" della funzione inversa del coseno, che abbiamo qui chiamato Arccos, e che tale funzione è continua su $[-1,1]$ e C^∞ sull'intervallo aperto $(-1,1)$). Dati due vettori non nulli x ed y in $\mathbb{R}^n$ definiamo l'angolo θ tra x e y come

$$\theta := \operatorname{Arccos} \frac{x \cdot y}{|x|\ |y|} \ . \tag{B.13}$$

Si dimostri che, nei casi $n = 2, 3$, tale definizione coincide con quella usuale di angolo θ formato dalle due semirette $\{\lambda x : \lambda \geq 0\}$ e $\{\lambda y : \lambda \geq 0\}$ (scegliendo naturalmente l'angolo $\theta \leq \pi$).

Esercizio B.6 Si dimostri che (B.11) è equivalente ad una qualunque delle seguenti affermazioni: (i) $U^T = U^{-1}$; (ii) $|Ux| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$; (iii) $U = [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$ con $\{v^{(j)}\}$ base ortonormale in $\mathbb{R}^n$.

T B.7 (Il gruppo[10] $SO(2)$). Sia $U \in SO(2)$. (i) Dimostrare che esiste $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che

$$U = U(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ . \tag{B.14}$$

(ii) Dimostrare che se ad un punto $x \in \mathbb{R}^2$ facciamo corrispondere il numero complesso $z = x_1 + ix_2$, l'azione di U in (B.7) corrisponde alla moltiplicazione di z per $e^{i\theta}$.
[Più formalmente, sia $\varphi : x \in \mathbb{R}^2 \to z = \varphi(x) := x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$. Bisogna allora dimostrare che $\varphi(Ux) = e^{i\theta}\varphi(x)$.]

(iii) Si dimostri che $U(\theta)^{-1} = U(-\theta)$.

T B.8 (Il gruppo $SO(3)$). In virtù dell'esercizio precedente possiamo definire in $\mathbb{R}^3$ rotazioni di un angolo θ *attorno ad un asse coordinato*:

$$\begin{aligned}
U^{(1)}(\theta) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ , \qquad &&(\text{rotazione di } \theta \text{ attorno a } \mathrm{e}^{(1)}) \\
U^{(2)}(\theta) &:= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \ , \qquad &&(\text{rotazione di } \theta \text{ attorno a } \mathrm{e}^{(2)}) \\
U^{(3)}(\theta) &:= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad &&(\text{rotazione di } \theta \text{ attorno a } \mathrm{e}^{(3)}) \ .
\end{aligned} \tag{B.15}$$

(i) Si dimostri che se $U \in SO(3)$ allora esistono $\theta, \varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ tali che

$$U = U^{(3)}(\theta)U^{(1)}(\varphi)U^{(3)}(\psi) \ . \tag{B.16}$$

(ii) Si dimostri che $\big(U^{(i)}(\theta)\big)^{-1} = U^{(i)}(-\theta)$.

Esercizio B.9 Si dimostri che dato $x \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$, il piano ortogonale a x, π_x, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $(n-1)$.

[10] Un **gruppo** G è un insieme dotato di una operazione binaria "$*$": $a, b \in G \to a * b \in G$ che goda delle seguenti proprietà: (i) (*associatività*) $\forall\, a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$; (ii) (*esistenza dell'elemento neutro o dell'unità*) $\exists\, e \in G$ tale che $e * a = a * e = a$, $\forall\, a \in G$; (iii) (*esistenza dell'inverso*) $\forall\, a \in G\ \exists\, b \in G$ tale che $a * b = b * a = e$ (e tale elemento viene normalmente denotato con $b = a^{-1}$).

T B.10 (Ortonormalizzazione di Gram–Schmidt) Siano $v^{(1)}$,...,$v^{(m)}$ vettori indipendenti in $\mathbb{R}^n$ con $m \le n$ e sia V lo spazio vettoriale generato da tali vettori. Definiamo

$$w^{(1)} := v^{(1)} \ , \qquad u^{(1)} := \frac{w^{(1)}}{|w^{(1)}|} \ ,$$
$$w^{(2)} := v^{(2)} - \frac{v^{(2)} \cdot w^{(1)}}{w^{(1)} \cdot w^{(1)}} w^{(1)} \ , \qquad u^{(2)} := \frac{w^{(2)}}{|w^{(2)}|} \ ,$$

e, ricorsivamente,

$$w^{(j)} := v^{(j)} - \sum_{h=1}^{j-1} \frac{v^{(j)} \cdot w^{(h)}}{w^{(h)} \cdot w^{(h)}} w^{(h)} \ , \qquad u^{(j)} := \frac{w^{(j)}}{|w^{(j)}|} \ . \tag{B.17}$$

Si dimostri che: $w^{(j)} \cdot w^{(h)} = 0$ per ogni $h \neq j$; $\{u^{(j)}\}$ è una base ortonormale di V (cioè $u^{(j)} \cdot u^{(h)} = \delta_{hj}$ e che il sottospazio

$$V(u^{(1)}, ..., u^{(j)}) := \{v \in \mathbb{R}^n : \ v = \sum_{h=1}^{j} a_h u^{(h)} \text{ con } a_h \in \mathbb{R}\} \tag{B.18}$$

generato dai vettori $u^{(1)}, ..., u^{(j)}$ coincide con $V(v^{(1)}, ..., v^{(j)})$ e con $V(w^{(1)}, ..., w^{(j)})$, per ogni $j \le m$.

Appendice C

Esercizi vari

C.1 Verificare il Teorema della divergenza nel seguente caso: $f(x,y) = (1+xy, x)$, $A = \{(x,y) : (x-2)^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$.

C.2 Sia

$$f(x,y) = \int_{2+\operatorname{sen} y^2}^{4} \operatorname{senh}(t^2 x + y)dt$$

(a) Calcolare f_x e f_y;
(b) dimostrare che f non ha punti critici in $\mathbb{R}^2$;
(c) determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f su $\mathbb{R}^2$.

C.3 Calcolare $\int_{\mathcal{S}} f d\sigma_3$, dove $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\ x_i > 0\, \forall i\}$ e $f(x) = x_4^2$.

C.4 Sia $f(x) = \exp(\cos x)$. Trovare M tale che $|\widehat{f}_n| \le M/n^4$ ($\widehat{f}_n = n-$esimo coefficiente di Fourier).

C.5 Sia

$$u_n(x) = \max\left(x^n, \frac{1}{n^2}\right), \quad n \ge 1.$$

(a) Discutere la convergenza della serie $\sum u_n$;
(b) dimostrare che la serie $\sum u_n$ è continua ma non C^1 sul suo insieme di definizione.

C.6 Per $x \in \mathbb{R}^n$, sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \ge 1 \end{cases}$$

(a) Dimostrare che $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ma $f \notin C^1(\mathbb{R}^n)$ e discutere la differenziabilità di f;
(b) trovare un numero positivo δ per il quale se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < 1/100$, con x_0 tale che $|x_0| = 1$;
(c) f è differenziabile nel punto $(\sqrt{2}, 1, 1, \ldots, 1)$?

C.7 Calcolare $\displaystyle\int_T x^3 y\ e^{-x^2}\ dxdy$ dove $T := \{1 < xy < 2\ ;\ x > 0\}$.

C.8 (i) Calcolare $\dfrac{\partial}{\partial x_i} g(|x|)$ dove $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e g è una funzione $C^1((0,\infty))$.

(ii) Sia $\omega := 3\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|^2} dx_i$. Calcolare $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ dove Γ è la curva $\{(1+t, t^2, ..., t^n) :\ t \in [0,1]\}$ nel verso che va da $(1, 0, ..., 0)$ a $(2, 1, ..., 1)$.

C.9 (i) Si calcoli la serie di Taylor di $\log(s+t)$ nell'intorno di $(s_0, t_0) = (1, 0)$. (ii) Si calcoli la serie di Taylor di $\log(x - y^2)$ nell'intorno di $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

C.10 Sia $u_n(x) := \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_1^2 \exp(-nxt^4)dt$. Discutere la convergenza (puntuale, uniforme e totale) di $u(x) := \displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ e di $v(x) := \sum_{n\geq 1} u_n'(x)$ e dire per quali x la funzione $u(x)$ è derivabile e la sua derivata coincide con $v(x)$.

C.11 Determinare l'estremo superiore ed inferiore (specificando se si tratta di massimi o minimi) della funzione $f(x,y) := 1/(x^2+y^2)$ sull'insieme $A := \{(x,y) : \ xy + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(xy) > 1\}$.

C.12 Data una funzione f su $\mathbb{R}^n$ si definisca l'insieme $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \geq 1\}$. Si diano esempi di funzioni $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ per cui $A \neq \emptyset$ e per le quali valga: (i) A è un rettangolo degenere; (ii) A è un rettangolo non degenere; (iii) A è un insieme di misura nulla che non sia un rettangolo; (iv) $\displaystyle\int_A f < 1$; (v) $\displaystyle\int_A f > 1$; (vi) $\displaystyle\int_A f = 1$.

C.13 Sia $f : x \in \mathbb{R}^2 \to y \in \mathbb{R}^2$ data da $f(x) := (x_1 + \mathrm{sen}\,(x_1 x_2), x_2 + \mathrm{sen}\, x_1^2)$. Si trovi una sfera $B_r(0) := \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < r\}$ su cui sia definita e regolare la funzione inversa di f.

C.14 Si calcoli $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} f d\sigma$ dove $\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\} \cap \{x > 0\}$ e $f := x^2 - 2yz^2$.

C.15 Sia Γ la curva in $\mathbb{R}^3$ data dall'intersezione delle superfici $\{y = x^2\}$ e $\{z = x^3\}$ e limitata dai piani $\{x = 1\}$ e $\{x = 2\}$. Verificare che Γ è un elemento di curva regolare e calcolare $\displaystyle\int_\Gamma f ds$ con $f := \log|z|/(1+4y+9xz)^{\frac{1}{2}}$.

C.16 Siano $A_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < |x|, \text{ e } x^2+y^2 < 4\}$, $A_2 := \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ e $\omega := -\dfrac{y+x}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dy$. (i) Dire se ω è esatta su A_1 e/o su A_2. (ii) Sia Γ il quadrato di centro l'origine e lato 2 orientato in senso orario e si calcoli $\int_\Gamma \omega$.

C.17 Sia $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x+y < 1\}$ e si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_E e^{-|x-y|}\,\mathrm{sen}\, 2x \ dxdy$.

C.18 Sia $\varphi(t) := (1 + \mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, 2t)$. (i) Dimostrare che $\Gamma := \{\varphi(t) : t \in [0,\pi]\}$ è una curva chiusa, semplice (cioè senza autointersezioni) e regolare a tratti. (ii) Calcolare, usando il teorema di Green, l'area racchiusa da Γ.

C.19 Sia $A := \{(x,y) \in (1,\infty) \times (0,\infty) : yx \leq 1\}$ e sia $A_k := A \cap \{x \leq k\}$. (i) Dimostrare che A_k è misurabile per ogni k e dedurne che A è misurabile. (ii) Dire per quali α la funzione $x^\alpha \in \mathcal{L}^1(A)$.

C.20 Per $\alpha \geq 1$ sia $f_\alpha := e^{-\alpha x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. (i) Dimostrare che $f_\alpha \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e calcolare $\int_{\mathbb{R}} f_\alpha$. (ii) Sia $u_k := f_{2^k}$ per $k \geq 1$. Dimostrare che la serie $\sum u_k$ converge quasi ovunque ad una funzione $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e calcolare $\int_{\mathbb{R}} g$.

C.21 Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ per: (i) $f(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^n x_i^2$; (ii) $f(x) = (x_1 + x_2^2, \cos(x_1, x_2))$; (iii) $f(x,y,z) = \dfrac{y}{z - x^2}$.

C.22 Sia $f(x) := e^{x_1^2 + x_2} + \mathrm{senh}\, x_1$. Calcolare: (i) $\dfrac{\partial^\alpha f}{\alpha!}$ con $\alpha = (2,3)$; (ii) f'; (iii) f''; (iv) $\partial^2 f(0)\ (\xi)^2$ con $\xi := (1,1)$.

C.23 Sviluppare in serie di Taylor attorno a $x_0 = 0$ la funzione $|x| \operatorname{sen} |x|$, ($x \in \mathbb{R}^n$).

C.24 Sia $x \in \mathbb{R} \to u(x) \in \mathbb{R}$ la funzione con supporto $[-1, 1]$ che vale $1 - |x|$ per $|x| \le 1$; data una successione di numeri $c_k > 0$, sia $u_k(x) := c_k\ u(x - 2k)$. (i) Dimostrare che la serie $\sum_{k \ge 0} u_k$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$; (ii) trovare una condizione sufficiente sui c_k affinché la serie $\sum u_k$ converga totalmente su $\mathbb{R}$; (iii) trovare una successione $\{c_k\}$ tale che $\sum u_k$ converga uniformemente su $\mathbb{R}$ ma non vi converga totalmente.

C.25 Sia $f(x, y) := 0$ se $x = 1$ e $f(x, y) := y \exp\Big(-\big(\frac{y}{x-1}\big)^2\Big)$ per $x \neq 1$.
(i) Dimostrare che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \{(1, 0)\})$.
(ii) Studiare la continuità e regolarità di f in $(1, 0)$.
(iii) Studiare i punti critici di f. (iv) Trovare $\delta > 0$ tale che $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < 1/100$ per $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ con $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e (qualora f fosse continua in $(1, 0)$) con $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

C.26 Si dimostri che non esiste alcuna $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che $\nabla f = (x \operatorname{sen} y, y \operatorname{sen} x)$.

C.27 Si trovino i punti stazionari e si dica se si tratta di massimi o minimi (relativi o assoluti) di $f(x, y) = (x + 3y)e^{-xy}$.

C.28 Dire se è continua la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\ , & \text{se } (x,y) \neq 0\ , \\[2ex] 0\ , & \text{se } x = y = 0\ . \end{cases}$$

C.29 Calcolare $\partial_x^\alpha f(x_0)$ e $\partial_x^p f(x_0)(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)})$, con $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^4$, $p = 3$, $\alpha = (2, 1)$, $x_0 = (1, -1)$, $\xi^{(1)} = (1, 0)$, $\xi^{(2)} = (2, 2)$, $\xi^{(3)} = (3, 1)$.

C.30 Trovare i massimi e minimi di $F(x) = \int_0^1 \log(1 + x^2 + y^2) dy$.

C.31 Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x, y) = x^2 y$ su $D := \{x^2 + y^2 \le 1\}$.

C.32 Si consideri la funzione $f : y \in \mathbb{R}^2 \to f(y) = (f_1(y), f_2(y)) \in \mathbb{R}^2$ definita come

$$f_1 = y_1 + y_1^2 \cos y_2\ , \qquad f_2 = y_2 + y_1^2\ .$$

Si dica se la funzione f è invertibile in un intorno di $y_0 = (0, 0)$ e se sì , si dia una stima di r_1 in modo tale che valga la condizione del teorema della funzione inversa.

C.33 Fissato un numero naturale $N > 0$, si trovi un δ tale che $|f(x) - f(x_0)| < 10^{-N}$ per ogni $|x - x_0| < \delta$ nel seguente caso: $f = \log[\cos\big(\prod_{i=1}^n x_i\big)]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = 0$.

C.34 Si trovi una soluzione particolare della seguente equazione differenziale

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = f(t)\ , \qquad f(t) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \cos(4nt)\ .$$

C.35 Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\ddot{x}x^3 + 1 = 0\ , \qquad x(0) = 1\ , \qquad \dot{x}(0) = 0\ .$$

C.36 Si discuta l'insieme di convergenza di $\sum_{n=1}^\infty \log\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^{\frac{1}{n}}$ e, si dimostri, in particolare, che la serie non converge totalmente su $\mathbb{R}$.

C.37 Scrivere la serie di Fourier di $|\operatorname{sen} x|$ (su $[-\pi, \pi]$) e se ne discuta la convergenza.

C.38 Sia $u = \sum_{k \geq 1} a_k x^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza positivo, con $a_1 \neq 0$, e si assuma che la funzione inversa di u, $v := u^{-1}$ (che è tale che $v \circ u(x) = x$), sia anch'essa una serie di potenze con raggio di convergenza positivo. Calcolare i coefficienti dello sviluppo attorno a zero di v.

C.39 Sia $f(x) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k^2} \operatorname{sen}(2^k x)$. Si dimostri che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma che f non è analitica in 0.

C.40 Trovare il massimo e minimo di

$$f(x,y) := \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \ , \quad \text{su} \quad D := \{x^2 + y^2 \leq 4\} \ .$$

C.41 Risolvere, facendo uso degli esponenziali di matrici, il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} u' - u - 2v &= 0 \ , \\ v' - u - 2v &= 0 \ . \end{aligned}$$

C.42 Si trovi la serie di Taylor di $x_2^4 + \operatorname{senh}(x_1 + \cdots + x_n)$.

C.43 Calcolare $\int_D x^2 y^2 dx dy$ dove $D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

C.44 Calcolare $\int_T \cos \frac{x-y}{x+y} dx dy$ dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$.

C.45 Si dimostri che l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ è un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^2$.

C.46 Si determini la serie di Taylor in $x = 0$ di $(4 - x^2)^{-1/2}$ e se ne calcoli il raggio di convergenza.

C.47 (i) Si discuta la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(\log n)^x} \ .$$

(ii) Si discuta la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n!}$ e se ne calcoli la somma.

C.48 Si calcoli l'area della frontiera dell'insieme

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\} \ .$$

C.49 Si consideri, su $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, la 1-forma

$$\omega := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

(i) Dire se ω è chiusa. (ii) Calcolare l'integrale di ω su di una circonferenza orientata positivamente di raggio r e centrata nell'origine. (iii) Dire se ω è esatta e, in caso affermativo, se ne trovi una promitiva.

C.50 Studiare la regolarità di

$$f = \begin{cases} x^2 + y^2 \ , & \text{se } x = 0 \\ y \ , & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

.

C.51 Trovare un'immersione, nell'intorno di $x_0 = (1, 10, 2, 0)$, che realizzi $\{\phi = 0\}$ con $\phi(x) = x_1^2 + x_2^5 (x_3 - 2) + \cos x_4 - 2$.

C.52 Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 10 in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) := \log(1 + x_1 x_2 x_3) \ , \qquad x \in \mathbb{R}^3 \ .$$

C.53 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x) = \Big(\sum_{i=1}^{4} |x_i|^5\Big)^{\frac{1}{5}}$$

sul bordo sferico $\{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$.

C.54 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned} & u_t - u_{xx} = 0 \ , \qquad x \in (0,1) \ , \quad t > 0 \ , \\ & u(0,t) = u(1,t) = 0 \ , \qquad\qquad t > 0 \ , \\ & u(x,0) = \operatorname{sen}^2 \pi x \ . \end{aligned}$$

C.55 Si calcoli il seguente integrale

$$\int_D \frac{dx}{1 + x_1 + x_2 + x_3} \ , \qquad D := \{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\} \cap \{x : x_i \geq 0 \ \forall i\} \ .$$

C.56 Sia $z = z(x,y)$ la funzione definita implicitamente dalle relazioni:

$$z^3 - 2xy + y = 0 \ , \qquad z(1,1) = 1 \ .$$

Si calcoli il polinomio di Taylor di grado 2 nell'intorno di $(1,1)$.

C.57 Si trovi l'espansione in serie di potenze $y = \sum_{n \geq 0} y_n x^n$ e se ne determini il raggio di convergenza della soluzione della seguente equazione differenziale:

$$(1 - x)y' = 1 + x - y \ , \qquad y(0) = 0 \ .$$

C.58 Calcolare l'integrale

$$\int_D z \ dx \ dy \ dz \ ,$$

dove D è l'insieme compatto delimitato dalle superfici $z^2 = x^2 + y^2$ e $z = 1$.

C.59 Si calcoli il seguente integrale

$$\int_D \frac{dx}{(1 + |x|^2)^2} \ , \qquad D := [0, \infty) \times [0, \infty) \ .$$

C.60 Si calcoli il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione y^x nell'intorno di $(1,1)$.

C.61 (i) Si discuta la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \cos \frac{x}{n} - \cos \frac{x}{2n} \Big\} \ .$$

(ii) Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica di periodo 2π definita come segue nell'intervallo $[-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 1 \ , & \text{se } 0 \leq x < \pi \ . \end{cases}$$

C.62 Si esprima un numero positivo $a > 0$ come prodotto di quattro numeri positivi con somma minima.

C.63 Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ la cui frontiera $\partial\Omega$ sia una superficie regolare chiusa. Sapendo che il volume di Ω è 1, si calcoli il flusso (esterno) attraverso $\partial\Omega$ di $F(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}^3$).

C.64 Si calcoli il seguente integrale

$$\int_D \log\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\ , \qquad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 1\}\ .$$

C.65 (i) Si dica quante funzioni continue $(x,y) \to z(x,y)$ soddisfano l'equazione

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$$

nell'intorno di $(x,y) = (0,0)$. (ii) Si calcolino le derivate parziali delle funzioni di cui al punto (i) (sempre in un intorno dell'origine).

C.66 Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$yy'' + {y'}^2 = {y'}^3\ , \qquad y(0) = 1\ , \qquad y'(0) = 1\ .$$

C.67 (i) Si discuta la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{x^n}\ .$$

(ii) Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n!}\ .$$

C.68 Trovare i massimi e i minimi (se esistono) della funzione $\exp(x^2+y^2) - \frac{x^2}{2} - y^2$ sull'insieme $\{x \ge 1\} \cap \{4x^2+y^2 \le 8\}$.

C.69 (i) Si calcoli la norma $\|\cdot\|_{2,2}$ della matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. (ii) Si calcoli e^{At} (con $t \in \mathbb{R}$). (iii) Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^2$, si calcoli $\lim_{t\to\infty} \varphi(t;x_0)$ dove $\varphi(t;x_0)$ denota la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$.

C.70 Sia $u_n(x) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\cos n(t-x)\,dt$. (i) Si studi la convergenza della serie $\sum u_n$. (ii) Si studi la regolarità della serie $\sum u_n$ sul suo insieme di definizione. (iii) Dire se $\sum u_n$ definisce una funzione periodica ed in caso affermativo se ne calcolino i coefficienti di Fourier.

C.71 Sia $\omega^1 := \dfrac{(x_1+x_2|x|)dx_1 + (x_2+x_1|x|)dx_2}{|x|}$, per $x \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. (i) Dire se ω^1 è chiusa. (ii) Calcolare $\int_\Gamma \omega^1$ dove Γ denota la circonferenza unitaria centrata nell'origine orientata in senso antiorario. (iii) Dire se ω^1 è esatta.

C.72 Sia $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\log(1+|x|)}{|x|}\ , & \text{se } x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\ , \\ 1\ , & \text{se } x = 0\ . \end{cases}$ (i) Discutere la regolarità di f in $x = 0$ (continuità, derivabilità etc.). (ii) Trovare $\delta > 0$ tale che $|f(x)| < 1/10$ per $|x| < \delta$.

C.73 Sia $\omega^1 = \dfrac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$ definita su $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$. (i) Dire se ω^1 è esatta su A ed in caso affermativo, calcolare la primitiva $U(x,y)$ tale che $U(0,e) = U(0,-e) = 1$. (ii) Calcolare $\displaystyle\int_\Gamma \omega^1$ dove $\Gamma := \{(x,y) = e(\cos^{100} t,\ \operatorname{sen}^{100} t)\ :\ 0 \le t \le \pi/2\}$ orientata nel verso che va da $(e,0)$ a $(0,e)$.

C.74 Siano

$$s(t) := \begin{cases} \operatorname{sen}(1/t)\ , & \text{se } t \neq 0\ , \\ 0\ , & \text{se } t = 0\ , \end{cases} \qquad c(t) := \begin{cases} \cos(1/t)\ , & \text{se } t \neq 0\ , \\ 0\ , & \text{se } t = 0\ , \end{cases}$$

e sia $f(x,y) = x^2\ s(x) + y^2\ c(y)$. Discutere la regolarità di f (continuità, differenziabilità, etc.).

C.75 Sia $r > 0$, $\mathcal{S}_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\ ,\ 0 \le z \le r\}$ e Ω_r l'insieme limitato la cui frontiera è $\mathcal{S}_r$. Calcolare i seguenti integrali

$$\text{(i)} \quad \int_{\mathcal{S}_r} x^2 z d\sigma\ , \qquad \text{(ii)} \quad \int_{\Omega_r} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz\ .$$

C.76 Sia $x(t)$ una soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 3\dot{x} + x = |\operatorname{sen} t|$, calcolare il $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

C.77 Per $x \in \mathbb{R}^2$ sia $\|x\| := \sqrt{\frac{x_1^2}{100} + x_2^2}$. (i) Dire se $\|\cdot\|$ definisce una norma su $\mathbb{R}^2$ ed in caso affermativo trovare due costanti positive a e b tali che $a|x|_\infty \le \|x\| \le b|x|_\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$. (ii) Calcolare il $\|\cdot\|$–diametro del disco unitario $B^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ ovvero calcolare il $\sup_{x,y\in B_1^2} \|x - y\|$.

C.78 Studiare la serie $u(t) := \sum_{n\ge 1} \cos(n^4 t^2)\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^{100} t}\right)$ indicando in particolare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme, totale; si studi, inoltre, la regolarità di u.

C.79 Trovare la soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\begin{aligned} u_t &= 3u_{xx}\ , \qquad t > 0\ , \quad 0 < x < \pi\ , \\ u(x,0) &= \sum_{k=10}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k^2 x}{2^k}\ . \end{aligned}$$

C.80 Sia Γ la curva chiusa in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0\}$ delimitata da $\{y = x\}$ e $\{y = x^3\}$. (i) Usando le formule di Green si calcoli l'area delimitata da Γ. (ii) Sia $\omega := \frac{ydx-(x+2)dy}{(x+2)^2+y^2}$ e si calcoli $\int_{\Gamma^+} \omega$ dove Γ^+ è la curva Γ con l'orientamento antiorario. (iii) Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\Gamma x^3 ds$.

C.81 Siano $v^{(1)} := (-10,0,2)$, $v^{(2)} := (1,1,0)$ e $v^{(3)} := (0,0,1)$ e sia $P \subseteq \mathbb{R}^3$ il parallelepipedo $\{x_1 v^{(1)} + x_2 v^{(2)} + x_3 v^{(3)} : 0 \le x_i \le 1\}$. Si calcolino il volume di P e l'integrale $\int_P y_1 y_2 dy$.

C.82 Sia X_T lo spazio di Banach delle funzioni delle funzioni continue su $[-T,T]$ con norma uniforme $\|u\|_\infty := \sup_{|t|\le T} |u(t)|$ e sia $\Phi_a : X_T \to X_T$ definita come

$$(\Phi_a u)(t) := a + t^2 + \int_0^t \operatorname{sen} u(s)\ ds\ .$$

(i) Trovare $T > 0$ tale che Φ_a sia una contrazione da X_T in se stesso. (ii) Quale equazione differenziale soddisfa il punto fisso di Φ_a?

C.83 Studiare la convergenza delle serie:

$$\sum_{n\ge 2} \frac{x^n}{n(n-1)}\ , \qquad \sum_{n\ge 1} \frac{2^{nx}}{e^{x^n} - n}\ .$$

Se $u(x)$ denota il valore della prima serie si calcoli $u(\frac{1}{2})$.

C.84 Sia $f(x,y) := |x|^2 + y^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6y - 11$, $(x \in \mathbb{R}^2,\ y \in \mathbb{R})$. (i) Quante soluzioni g di classe C^∞ nell'intorno del punto $(1,-2)$ esistono dell'equazione $f(x, g(x)) = 0$? (ii) Si verifichi che se $g(1,-2) > 0$ allora g ha un massimo relativo stretto in $(1,-2)$.

C.85 Si calcoli il volume dell'insieme

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x-2y+3)^2 + (3x+4y-1)^2 + 100z^2 \le 1\} \ .$$

C.86 Trovare il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y) = \max\{x+y, 1\}$ sul disco chiuso (in $\mathbb{R}^2$) di raggio 1 e centrato nell'origine.

C.87 Sia $f(x)$ la funzione dispari, periodica di periodo 2π che vale 1 per $0 < x \le \pi/2$ e 2 per $\pi/2 < x < \pi$. (i) Si disegni il grafico di f per $x \in [-\pi, \pi]$ (si segnino chiaramente i valori di f in $k\pi$). (ii) Si calcolino, nella maniera più esplicita possibile, i coefficienti di Fourier di f. (iii) Si calcoli il valore della somma $\sum_{k \ge 1} (-1)^k/(2k+1)$.

C.88 Sia $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = (2+\cos u)\,\mathrm{sen}\, v,\ y = (2+\cos u)\cos v,\ z = \mathrm{sen}\, u,\ (u,v) \in [0,2\pi]^2\}$. Si dimostri che S è una superficie regolare e si calcoli $\int_S \mathrm{Arcsen}\, z\, d\sigma$ ($\mathrm{Arcsen}\, 0 = 0$).

C.89 (i) Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità della funzione $f(x) := x_1 |x|^\alpha$ per $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e $f(0) := 0$. (ii) Sia $f(0) := 0$ e per $x \in \mathbb{R}^2 \ne 0$ sia $f(x) = |x|^{2p}\,\mathrm{sen}\,|x|^{-1}$. Si dica per quali p f_{x_1} esiste ed è continua.

C.90 Si discuta, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'esistenza e l'unicità delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 3y^{2/3} + \alpha \ , \qquad y(0) = 0 \ .$$

C.91 Sia $A := \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Si trovi $V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tale che

$$-\nabla V(x) = Ax \ , \qquad V(0) = 0 \ , \qquad (x \in \mathbb{R}^2) \ .$$

C.92 Si trovino il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y) = xy$ sull'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y^2 \le 3\}$.

C.93 Sia $f(0,0) = 0$ e, per $(x,y) \ne (0,0)$, sia $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}\,\mathrm{sen}\,(x^3+y^3)$. Si studi la regolarità di f in $\mathbb{R}^2$ (continuità, differenziabilità, derivabilità, etc.)

C.94 Sia $\Gamma := \{(x,y,z) :\ x = \mathrm{sen}\, t - t\cos t + 5,\ y := 0,\ z = t\,\mathrm{sen}\, t + \cos t - \frac{t^2}{2},\ 0 < t < \frac{\pi}{2}\}$. (i) Si controlli che Γ è un elemento di curva regolare in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli la lunghezza. (ii) Si calcoli l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando Γ attorno all'asse delle z di un angolo pari a $\pi/2$.

C.95 Sia

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha x/k}\ \frac{\cos k^2 x}{k^{100}} \ .$$

(i) Si studi la convergenza della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (convergenza puntuale, uniforme, totale). (ii) Si trovino i valori di α per cui f è $C^\infty(\mathbb{R})$. (iii) Per $\alpha = 0$ f è una funzione periodica e pari. Calcolare i primi cinque coefficienti di Fourier a_0,...,a_4.

C.96 Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^3} x_1^2\ x_3^2\ e^{-|x|^2} dx \ .$$

C.97 Si trovi la soluzione della seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned} &u_{tt} - 2u_{xx} = 0 \;, \qquad 0 < x < \pi \;, \quad t > 0 \;; \\ &u(x,0) := \sum_{k=1}^{100} k \,\mathrm{sen}\, k^2 x \;, \qquad u_t(x,0) := 0 \;; \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \;, \quad \forall\, t > 0 \;. \end{aligned}$$

C.98 Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_S (x^2+y^2)^n \; d\sigma \;, \qquad S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z^2 = x^2 + y^2 \text{ e } 0 \le z \le 1\} \;.$$

C.99 Sia $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x| + |y| \le a\}$. (i) Facendo un opportuno cambiamento di variabili si trasformi D in un quadrato di uguale area, di lati paralleli agli assi coordinati e di centro l'origine. (ii) Si calcloli l'integrale di $x^2 y - |x| y^{20}$ sul dominio $A := \{\sqrt{2} \le |x| + |y| \le 2\sqrt{2}\}$.

C.100 Sia T il triangolo in $\mathbb{R}^2$ con vertici in $(0,0)$, $(0,1)$ e $(2,0)$ e sia $\omega := \mathrm{senh}\,(x+y)dx + xdy$. Si calcoli

$$\int_{\partial T^+} \omega$$

sia direttamente che usando la formula di Green.

C.101 Per ogni n intero positivo sia

$$R_n := [\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + 2^{-n}] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

e sia $A := \bigcup_{n \ge 1} R_n$. Dimostrare che A è misurabile secondo Peano–Jordan e calcolarne la misura.

C.102 Si discutanmo i massimi e minimi relativi ed assoluti (qualora esistano) della funzione $f(x,y) = xy^2(x+y-1)$ nel dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + y \ge 1\}$.

C.103 Trovare il valore massimo e quello minimo (qualora esistano) della somma degli spigoli di parallelepipedi rettangoli di volume unitario.

C.104 Sia

$$f(x) := \sum_{n \ge 1} \frac{(\,\mathrm{sen}\, nx)^2}{2^n} \;.$$

(i) Si verifichi che f è una funzione pari $C^\infty(\mathbb{R})$ periodica di periodo 2π. (ii) Si calcolino i coefficienti di Fourier di f e, usando la formula di Parseval, si calcoli il valore dell'integrale tra 0 e π di f^2.

C.105 Si trasformi il problema di Cauchy $\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$, $x(0) = -2$, $\dot{x}(0) = 1$, in un problema di Cauchy per una funzione vettoriale $u(t) := (u_1(t), u_2(t))$ e si risolva quest'ultimo facendo uso di esponenziali di matrici.

C.106 Sia $f(x,y) := \Big(\,\mathrm{sen}\,(x - y^2), x^4 + \tan y\Big)$. Si enunci il teorema della funzione inversa, si dimostri che f è invertibile in un intorno di $(0,0)$ e si trovi una sfera su cui è definita la funzione inversa.

C.107 Discutere la convergenza (puntuale, totale e uniforme) delle seguenti serie di funzioni

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha e^{-nx} \;, (\alpha \in \mathbb{R}); \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{sen}\, \frac{1}{n}}{2^n (x-1)^n} \;.$$

Si calcoli il limite per x che tende ad infinito della serie in (i).

C.108 Calcolare il valore della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} \ .$$

C.109 Sia $f(x) := \operatorname{sen}(x_1 x_4^{100}) + \exp(|x|^2)$, $x \in \mathbb{R}^4$. Trovare un $\delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ allora $|f(x) - f(0)| < 1/100$.

C.110 Si calcoli la serie di Taylor in un intorno di zero della funzione
$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt \ .$$

C.111 Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f(x) = 0$ se $|x| > 1$ e $f(0) = 1$. Dimostrare che f non può essere analitica su tutto $\mathbb{R}$.

Appendice D

Suggerimenti e soluzioni di alcuni esercizi

2.2: $\alpha|x|^{\alpha-2}x_i$.
2.4: Si dimostri (per induzione) che $6^k \leq (2k+1)!$ per ogni $k \geq 1$.
3.5 (vii): no.
4.2: Si veda **5.41**.
4.6 (i): Si può prendere $\rho = (1/2)$ e $r = (1/\sqrt{2})$.
4.7: Sì il teorema è applicabile e si possono prendere $r = (\rho/8)$ e $\rho = (1/3)$.
4.8: Sì , f è invertibile in un intorno di $(0,0)$ e tale intorno contiene la sfera chiusa di raggio ρ con $\rho = (1/8)$ [anche in questo caso basta verificare

$$\|I - T\frac{\partial f}{\partial y}(y)\|_\infty \leq \frac{1}{2n}\ , \qquad \forall\ y \in Y_0\ , \tag{D.1}$$

al posto di (4.39)].
4.12:

$$\begin{aligned}
&\Delta(v^{(1)}, ..., av^{(j)} + bw^{(j)}, ..., v^{(n)}) = (-1)^{j-1}\Delta(av^{(j)} + bw^{(j)}, ..., v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = (-1)^{j-1}\big(a\Delta(v^{(j)}, ..., v^{(1)}, ..., v^{(n)}) + b\Delta(w^{(j)}, ..., v^{(1)}, ..., v^{(n)})\big) \\
&\quad = a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(j)}, ..., v^{(n)}) + b\Delta(v^{(1)}, ..., w^{(j)}, ..., v^{(n)})\ .
\end{aligned}$$

4.17 (i):$\frac{\partial F}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$.
4.18: Si dimostrino, nell'ordine, le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
&1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx\ , \\
&2) \qquad \Big(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx\Big)^2 = \int_{[-R,R]^2} e^{-|x|^2} dx := \beta_R\ , \\
&3) \qquad \int_{B_R} e^{-|x|^2} dx < \beta_R < \int_{B_{\sqrt{2}R}} e^{-|x|^2} dx\ , \\
&4) \qquad \lim_{s\to\infty} \int_{B_s} e^{-|x|^2} dx = \pi\ ,
\end{aligned}$$

qui, come al solito, $|x| := |x|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $B_s := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < s\}$; per dimostrare 4) si usino le coordinate polari dell'esercizio **4.17**.

4.19 $I_{2k} = \sqrt{\pi}\dfrac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}$, $I_{2k+1} = \dfrac{k!}{2}$.

4.20: Si noti che se facciamo corrispondere a $x \in \mathbb{R}^2$ il numero complesso $x = x_1 + ix_2$, $(i = \sqrt{-1})$, la trasformazione $x \to \phi(x)$ non è altro che $z \to z^2$.

4.21: $\frac{\partial F}{\partial(\rho,\theta,\psi)} = \begin{pmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\psi & -\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi & \rho\cos\theta\cos\psi \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi & \rho\cos\theta \operatorname{sen}\psi & \rho \operatorname{sen}\theta\cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -\rho \operatorname{sen}\psi \end{pmatrix}$, $\det \frac{\partial F}{\partial(\rho,\theta,\psi)} = -\rho^2 \operatorname{sen}\psi$.

4.23 (i): Si assuma $\alpha < 2\pi$ (il caso $\alpha = 2\pi$ si ottiene poi tramite limiti); (ii) l'insieme $E' := \{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \theta \le \alpha\ \forall\ (\rho,z) \in E_0\}$ è normale e misurabile e $E = F(E')$ con F come in **4.22**; (iii) Vol(E)= $\alpha\int_{E_0} \rho d\rho dz$.

4.24: $2\pi^2 r^2 R$.

5.13: Sia $n = 1$ e $\phi(x) = -x^2(x^2-1)$; allora $A_- = (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, $\partial A_- = \{-1,1\}$, $E_0 = \{-1,0,1\}$.

5.17: Cerchiamo il massimo ed il minimo (assoluti) di f su B^n. Poiché $f_{x_i} = \prod_{j\neq i} x_j$, si ha che se $\nabla f(x_0) = 0$ allora $f(x_0) = 0$ che chiaramente non è né un minimo né un massimo per f su B^n. Dunque il massimo e il minimo di f vengono assunti sulla frontiera di B^n che è S^{n-1}. Sia $F(x,\lambda) := f(x) - \lambda\phi(x)$ con $\phi(x) = |x|^2 - 1$. I punti critici di F sono i punti di S^{n-1} tali che $f_{x_i} = \lambda\phi_{x_i}$ cioè $\prod_{j\neq i} x_j = 2\lambda x_i$, e moltiplicando tale relazione per x_i si ottiene $f(x) = 2\lambda x_i^2$ da cui $x_i^2 = x_j^2$ per ogni i e j (si noti che possiamo escludere $x_i = 0$ e anche $\lambda = 0$). Quindi $|x_i| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e quindi il massimo di f su B^n è $\frac{1}{n^{\frac{n}{2}}}$ ed il minimo è $-\frac{1}{n^{\frac{n}{2}}}$.

5.11 (i): Supponendo (per assurdo) che x_0 sia un minimo locale, dalla continuità di f e dal fatto che $\inf f < f(x_0)$ segue che esiste un $x_1 \neq x_0$ tale che $f(x_0) = f(x_1)$ e quindi (Teorema di Rolle) esiste x_2 tra x_0 e x_1 (ma diverso da tali punti) per cui $f'(x_2) = 0$ contro l'ipotesi fatta; (ii): No, un controesempio, nel caso $n = 2$ è dato dalla funzione $f(x,y) = \left(e^{-x^2} + e^x\right)y^2(y^2-2) + e^{-x^2} - 1$ (soluzione proposta da L. Biasco).

5.15: Triangolo equilatero.

5.24: Per dimostrare la convergenza uniforme, si dimostri prima che gli intervalli I_n sono disgiunti.

5.26: Si consideri f_n lineare a tratti che valga 0 al di fuori dell'intervallo $I_n := (\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n})$ e valga $2n$ nel punto di mezzo di I_n.

5.28: Se $\alpha_p(x) := \sum_{n=1}^\infty n^p x^n$ allora $\alpha_p = x\alpha'_{p-1}$ $[\alpha_0 = 1/(x-1)$, $\alpha_1 = x/(1-x)^2$,...]

5.29: $2^N - N - 1$.

5.32: Si noti che $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx - f(0) = \int_{a_n}^{b_n} \delta_n(x)[f(x) - f(0)]dx$.

5.33: $u_n := \dfrac{x^n}{n!} + 1$.

5.39 (i): Si osservi che $\displaystyle\int_a^b u(x+t)dt = \int_{a+x}^{b+x} u(y)dy$ e si usi il teorema fondamentale del calcolo; (iii): si dimostri, usando il punto (i), la seguente formula: $D_h u(x) = \displaystyle\int_0^1 u'(x+th)dt$, $D_h^p u(x) = \displaystyle\int_0^1 \Big(\cdots \int_0^1 \Big(\int_0^1 u^{(p)}(x + h(t_1 + \cdots + t_p))dt_1\Big)dt_2 \cdots\Big)dt_p$, e si giustifichi (per induzione) il passaggio al limite sotto segno di integrale.

5.48: Poiché $x = v(y)$ è l'inversa di $y = u(x)$ si ha che $v \circ u(x) = x$. Quindi, essendo $u(0) = 0$, si ha $v(0) = 0$ ovvero $b_0 = 0$ ed inoltre $x = \sum_{n\ge1} b_n u^n(x) = \sum_{n\ge1} b_n \sum_{k\ge n} a_k^{(n)} x^k$, dove si è posto come al solito $u^n(x) = \sum_{k\geq n} a_k^{(n)} x^k$. Scambiando l'ordine delle sommatorie si ottiene $x = \sum_{k\geq 1} x^k \Big(\sum_{n=1}^k b_n a_k^{(n)} \Big)$. Osservando che $a_k^{(k)} = a_1^k$ ed eguagliando i coefficienti della relazione appena ottenuta si perviene a $b_1 a_1 = 1$ e, per $k \geq 2$, $\sum_{n=1}^k b_n a_k^{(n)} = 0$. Quindi

$$b_1 = \frac{1}{a_1} \ , \qquad b_k = -\frac{1}{a_1^k} \sum_{n=1}^{k-1} b_n a_k^{(n)} \ , \quad (\forall\ k \geq 2) \ . \tag{D.2}$$

5.49: ricordando (5.59) si trova $a_k^{(n)} = \binom{k-1}{n-1}$.
5.51: $u = (1-x)^{-1}$.
A.7: Per $k \geq 2$ si ha $\binom{\frac12}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1}{2^k} \frac{(2k-3)!!}{k!}$ e $\binom{-\frac12}{k} = (-1)^k \frac{1}{2^k} \frac{(2k-1)!!}{k!}$.
5.43: Si dimostri prima che f non è analitica nei punti "diadici" (cioè nei punti della forma $p + h2^{-k}$ con p, h, k interi) osservando che le serie di Taylor di f in tali punti hanno tutte la stessa coda.
A.8: il raggio di convergenza di $\sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$ è 1.
A.9 (ii): $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac12$, $B_2 = \frac16$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$; (iv): si noti che $x \operatorname{cotanh} x$ è una funzione pari.
5.47: Si usi (5.76).
9.10 Si ricordi il punto (iv) dell'Osservazione 9.9.
9.11: $\hat f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx$; $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat f_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$;
$\frac{1}{T}\int_0^T \Big| f(x) - \sum_{|n|\leq N} \hat f_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \Big|^2 dx = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx - \sum_{|n|\leq N} |\hat f_n|^2$; $\widehat{f^{(k)}} = \Big(in\frac{2\pi}{T} \Big)^k \hat f_n$;
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat f_n|^2 \, \Big| \frac{2\pi}{T} n \Big|^{2k} \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f^{(k)}(x)|^2 dx$.
6.18: Si prenda un numero arbitrariamente grande di rettangoli isosceli "paralleli" al piano $\{z = 0\}$.
6.21: Area($\mathcal{S}$)$= \alpha \int_a^b u(t) \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2} dt$.
6.23: Se $\alpha := R/r$, $\beta := \sqrt{|\alpha^2 - 1|}$ si ha

$$2\pi R r \Big(\alpha + \frac{1}{\beta} \log(\alpha + \beta) \Big) \text{ se } R > r \ ,$$
$$2\pi R r \Big(\alpha + \frac{1}{\beta} \operatorname{arcsen} \beta \Big) \text{ se } R < r \ .$$

6.24: $4\pi r^2 R$.
6.26: $-\operatorname{Or} = \operatorname{Or}(\bar\varphi)$ con $\bar\varphi(v) := \varphi(-v_1, v_2)$ sul dominio $\overline{V}$ con $V := \{v \in \mathbb{R}^2 : v_1 = -u_1, v_2 = u_2\}$; si verifichi che in tal caso $v(u) = (-u_1, u_2)$.
6.31 (i): Se $\Gamma = z((a,b))$ è una curva in $\mathcal{S}$, $\phi(z(t)) := 0$; (ii): i versori sono due e sono dati da

$$\nu = \pm \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \ . \tag{D.3}$$

6.42: (a) dimostrare che, se Γ_r denota il cerchio di centro l'origine e raggio r, dalle ipotesi segue che $\int_{\Gamma_r} \omega^1 = 0$ per ogni r; (b) si definisca la seguente funzione $F(x) := \int_{\Gamma(x)} \omega^1$ dove $\Gamma(x)$

è il segmento che unisce il punto $x_0 := (1,0)$ se $x \notin (-\infty, 0) \times \{x_2 = 0\}$ mentre se $x_2 = 0$ e $x_1 < 0$ $\Gamma(x)$ denota l'unione (orientata) del semicerchio superiore di centro l'origine e raggio 2 che va da $(0,1)$ a $(-1,0)$ e del segmento che unisce $(-1,0)$ con x; (c) far vedere che il valore di F non cambia se in (b) si prende il semicerchio inferiore nella costruzione di $\Gamma(x)$ per punti sull'asse negativo delle x_1; (d) far vedere che F è continua su A; (e) far vedere che F è C^1 e concludere la tesi ricordando la dimostrazione della Proposizione 6.14.

6.56 (b): Ad ogni I_j^k si può associare (ed in un solo modo) una n–pla di 0 e 1 con $n = 2^k$; ad ogni punto di K si può associare (ed in un solo modo) una sequenza di 0 e 1.

6.57: Se $I_x := \{(x,y) \in [0,1]^2 : 0 \le y \le 1\}$, $I^y := \{(x,y) \in [0,1]^2 : 0 \le x \le 1\}$ e $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ si può prendere $Q := \bigcup_{x \in \mathbb{Q}_1} I_x \ \cup \ \bigcup_{x \in \mathbb{Q}_1} I^y$.

6.58: $\int (\int f dx) dy = 1/2 = -\int (\int f dy) dx$; infatti $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ e $\int (\int |f| dx) dy = \infty$.

6.62: $f_k := 2^{k-1} \chi_{I_k}$ con $I_k := \Big(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2^k}, \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2^k} \Big)$.

B.3: Si prenda $x = e^{(i)}$ e $y = e^{(j)}$.

B.6: Si dimostrino prima i seguenti fatti: (1) due matrici A, B sono uguali se e solo se $Ax \cdot y = Bx \cdot y$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ (si consideri il caso $x = e^{(i)}$, $y = e^{(j)}$); (2) se vale (B.11) allora U è invertibile (se non lo fosse esisterebbe un vettore non nullo v tale che $Uv = 0$, ma allora, per (B.11), si avrebbe...); (3) si dimostri che se U è ortogonale, $\det U = \pm 1$; (4) per dimostrare l'implicazione "(ii) $\Longrightarrow$ (i)" si usi il fatto che

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2x \cdot y \ , \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \ ; \tag{D.4}$$

per dimostrare l'equivalenza tra (iii) e (B.11) si ricordi che se chiamiamo $v^{(j)} := Ue^{(j)}$, allora $[v^{(1)}, ..., v^{(n)}] = U$.

B.7 (ii): $U = [v, w]$ con v, w vettori ortonormali in $\mathbb{R}^2$ (cioè $|v| = |w| = 1$ e $v \cdot w = 0$). Il fatto che $|v| = 1$ significa che v appartiene al cerchio unitario S^1 e quindi esiste $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Ora il vettore w deve essere ortogonale (e questo fissa due vettori opposti) e il fatto che il determinante deve essere 1 fissa univocamnete la scelta di w in termine di v.

B.8 (i): Sia $R := U^{(3)}(\theta_1)$ la rotazione attorno all'asse $e^{(3)}$ che porta il vettore $v := Ue^{(3)}$ sul piano coordinato $\pi_{e^{(1)}, e^{(3)}} := \{x_2 = 0\}$. Sia poi $S := U^{(2)}(\theta_2)$ la rotazione attorno all'asse $e^{(2)}$ che porta il vettore Rv su $e^{(3)}$. Sia ora $T := SRU$ e si dimostri che T è una rotazione attorno all'asse $e^{(3)}$. Da questo segue l'asserto.

A.3 (i): Osservando che $\frac{d}{dt} \frac{\gamma(t)^{k+1}}{k+1} = \gamma(t)^k$, si ha, per $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z_1$,

$$\int_\gamma z^k dz := \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\gamma(t)^{k+1}}{k+1}\ dt = \frac{\gamma(b)^{k+1} - \gamma(a)^{k+1}}{k+1} = \frac{z_1^{k+1} - z_0^{k+1}}{k+1} \ ;$$

(ii): Si usi il punto (i) per far vedere che, nel caso di serie di potenze, le definizioni di integrale complesso date in **A.2** e **A.3** coincidono.

A.6: Se fosse $e = p/q$, varrebbe (A.9) con $z = 1$ e con $N = q$, etc.

8.1: Poiché $\|A^k\| \le \|A\|^k$ e $|\sum_{k \ge 0} \frac{A^k u_0}{k!} t^k| \le \sum_{k \ge 0} \frac{|t|^k}{k!} |A^k u_0| \le \sum_{k \ge 0} \frac{|t|^k}{k!} \|A^k\| |u_0|$ che per definizione corrisponde a $|u_0| e^{\|A\| |t|}$.

8.6: $e^A = \begin{pmatrix} \cosh xy & x \operatorname{senh} xy \\ y \operatorname{senh} xy & \cosh xy \end{pmatrix}$; (si prenda $A := \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sen} t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ e $b := 0$ e si usino i punti (i) e (ii) qui sopra).

8.8 (i): $\tau \to \varphi(t, \tau)$ è la soluzione di (8.67) con dati iniziali $u(\tau) = 0$ e $u'(\tau) = f(\tau)$.

8.13: $\tilde{x}(t) := x(t+T)$ soddisfa lo stesso problema di Cauchy di $x(t)$.

8.15 (i): Per r e T_0 sufficientemente piccoli possiamo assumere che $c := \sup_{D \times I} |f_x| T_0 < 1$. Sia $\varphi_0(t; x) := x$, $\varphi_j(t; x) := x + \int_{t_0}^t f(\varphi_{j-1}(\tau, x), \tau) d\tau$. Dall'ipotesi fatta segue che φ_j converge uniformemente su $D\times I$. Per induzione si dimostra che $\varphi_j \in C^1(D\times I)$. Sia $A_j := \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$. Allora, su $D \times I$, si ha $\|A_j - A_{j-1}\| \leq c\|A_{j-1} - A_{j-2}\|$ e da questo segue che anche A_j converge uniformemente in $D\times I$. L'asserto segue ora dalla generalizzazione a più variabili del Teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

9.14: Si cerchi u della forma $u = \sum_{n\geq 1} b_n(t) \operatorname{sen} n\pi x$.

9.17 (i): Si moltiplichi (9.72) per u_t e si integri per parti; (ii):se ce ne fossero due, u e v, si consideri la differenza $w := u - v$ e se ne calcoli l'energia.

7.1 (4): se $x^{(j)}$ denota la successione che ha tutti zeri tranne $x^{(j)}_j = 1$, ℓ^p contiene l'insieme $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ...\}$; (5)÷(9): $C(I)$ contiene l'insieme $\{1, x, x^2, ...\}$.

7.2 (ii): $u = \sum_{k\geq 1} k^{-2}(x/r)^k$ e $v = \sum_{k\geq 1}(x/r)^k$.

7.4: Sia X uno spazio vettoriale (diciamo su $\mathbb{R}$) di dimensione n e si fissi una base $\xi^{(1)}$,...,$\xi^{(n)}$. Si consideri l'isomorfismo $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \to \sum x_i \xi^{(i)} \in X$. Se $\|\cdot\|_a$ è una norma su X si definisca, per $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|_a := \|\varphi(x)\|_a$ e si dimostri che $|\cdot|_a$ è una norma su $\mathbb{R}^n$.

7.7 (i): Se v è un autovettore di A con autovalore λ, allora $\|A\| \geq |Av|\ |v|^{-1} = |\lambda|$; (ii): se λ_{i_0} è tale che $|\lambda_{i_0}| = \max |\lambda_i|$, considerare il versore $e^{(i_0)}$; (iii): $|Uv|^2 = Uv \cdot Uv = v \cdot U^T Uv = v \cdot v = |v|^2$; (iv): se A è reale e simmetrica può essere diagonalizzata tramite una matrice ortogonale, si usino poi i punti precedenti.

7.12 (i): Sia $n = m = 1$ e $E = [-1, 1]$ e si prenda $f(x) = \sqrt{|x|}$; (ii): Sia f_k una successione di Cauchy in $(\mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$; allora f_k è di Cauchy in $(C(E, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\infty,E})$ e dunque esiste $f \in C(E, \mathbb{R}^m)$ tale che $\|f_k - f\|_{\infty,E} \to 0$; sia $M = \sup_k \|f_k\|_{\mathrm{Lip}}$ che, essendo f_k di Cauchy, è un numero; allora, per ogni $x \neq y$, $M \geq \frac{|f_k(x)-f_k(y)|}{|x-y|} \to \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$ e dunque $\|f\|_{\mathrm{Lip}} < \infty$.

7.13 (i): Sia $n = m = 1$ e $E = [-1, 1]$ e si prenda $f(x) = |x|^\alpha$; (ii): la dimostrazione è uguale a quella per lo spazio $\mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$ in **7.12**.

7.22: Se $f \in X$ allora $|f(x) - f(y)|/|x - y| < \|f\|\ |x - y|^{\alpha-1}$ e prendendo il limite per $x \to y$ (essendo $\alpha > 1$) si ottiene che $f' = 0$ su E.

7.24: Sia $y = \frac{x}{|x|_\infty}$ cosicché (7.51) è equivalente a $\lim |y|_p = 1$ se $|y|_\infty = 1$; si dimostri, prima, che $|y|_p \geq 1$; per dimostrare l'uguaglianza si osservi prima che se $0 < a < 1$, $(1 + a^p)^{\frac{1}{p}} \to 1$.

7.28: $p < q \implies \ell^p \subsetneq \ell^q$.

7.34: $\|A\| \leq 1$, infatti per ogni $f \in X$, $|(Af)(x)| \leq \|f\|_{\infty,[0,1]} \int_0^1 e^{-(x-y)^2} dy \leq \|f\|_{\infty,[0,1]}$.

7.35: Esistono infiniti inversi destri dati da $T_a : x := \{x_0, x_1, x_2, ...\} \to T_a x := \{a, x_0, x_1, ...\}$; $\|T_a\| = \max\{|a|, 1\}$. Su $Y := \{x \in \ell^\infty : x_0 = 0\}$, S ha per inverso T_0.

7.36: $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$; infatti, poiché $A^2 = -I$ si ha che:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(At)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} (\frac{(At)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}\ I + \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\ A\ .$$

7.39 (i): deriva dall'equivalenza delle norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_\infty$ [nella norma $\|\cdot\|_\infty$ l'esistenza del limite del rapporto incrementale $(A(t) - A(t_0))/(t - t_0)$ è equivalente all'esistenza di tutti i rapporti incrementali $(A_{ij}(t) - A_{ij}(t_0))/(t - t_0)$]; la matrice $(A(t) - A(t_0))/(t - t_0)$ ha per elementi di matrice $(A_{ij}(t) - A_{ij}(t_0))/(t - t_0)$; (ii): per il punto (i) si ha $\Big((AB)'\Big)_{ij} = ((AB)_{ij})' = \sum_k (A_{ik}B_{kj})' = \sum_k A'_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}B'_{kj} = \Big(A'B\Big)_{ij} + \Big(AB'\Big)_{ij}$; L'altra identità si dimostra allo stesso modo; (iii): poiché $AA^{-1} = I$ in un intorno di t_0, derivando tale identità in t_0 (essendo la matrice identità costante si ha che $I' = 0$), dal punto (ii) segue che: $0 = (AA^{-1})' = A'A^{-1} + A(A^{-1})'$ ovvero la tesi; (iv): segue dalla definizione di derivata parziale.

7.37 (i): $\Lambda^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2)$; (ii): Se $v \in \mathbb{R}^n$ è un autovettore per $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ allora $A^2 v = \lambda^2 v$, etc. (iii): $(T^{-1}AT)^2 = T^{-1}A^2T$, *etc.* .