

Luigi Chierchia

Lezioni di
Analisi matematica 2



Copyright © MMII
ARACNE EDITRICE S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

00173 Roma
via Raffaele Garofalo, 133 A/B
(06) 93781065

ISBN 88-7999-178-0

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

I edizione: ottobre 1997
I ristampa: settembre 2002
II ristampa: settembre 2005

Avvertenze

Queste “Lezioni” raccolgono appunti da me usati nell’insegnamento del corso di Analisi Matematica 2 presso le Facoltà di Ingegneria dell’Università di Roma “Torvergata” (anno accademico 1993/94) e di Scienze dell’Università di Roma Tre (corsi di Laurea in Matematica e Fisica, anni accademici 1994/95, 1995/96, 1996/97).

Gli enunciati dei vari Lemmi, Teoremi, Proposizioni etc. sono numerati consecutivamente all’interno di ogni capitolo; ad esempio, l’Osservazione 4.12 si trova nel capitolo 4 tra il Lemma 4.11 e l’Esempio 4.13.

Alla fine di ogni capitolo vi è una sezione, intitolata “Esercizi e complementi”, che contiene esercizi (preceduti dalla lettera **E**), “complementi” (preceduti dalla lettera **C**) ed alcuni “richiami” (preceduti dalla lettera **R**). Sono quasi completamente assenti alcuni tipi di esercizi “standard” (ad esempio: esercizi sull’integrazione esplicita di funzioni di più variabili, esercizi sulla risoluzione esplicita di equazioni differenziali) ed è pertanto indispensabile consultare altri testi di esercizi. Alcuni degli esercizi di queste “Lezioni” sono stati proposti, negli anni passati, come prove scritte per le valutazioni di fine corso.

L’intuito e la comprensione matematica sono (e devono) essere spesso basati su “figure geometriche, diagrammi” etc.: la mancanza di figure in queste “Lezioni” è esclusivamente dovuto alla provvisorietà della stesura.

Ringrazio i miei colleghi Lucia Caramellino e Carlangelo Liverani per innumerevoli suggerimenti e migliorie. Ringrazio anche gli studenti dei corsi in cui queste “Lezioni” sono state seguite per il loro fondamentale *feedback* e per aver segnalato errori di stampa e imprecisioni (che temo non siano ancora del tutto scomparsi).

Roma, 22/9/1997

Indice

0	Disuguaglianze di Cauchy e disuguaglianze triangolari	1
	Esercizi e complementi	5
1	Serie e successioni di funzioni	10
	Esercizi e complementi	14
2	Serie di potenze	25
2.1	Raggio di convergenza e proprietà elementari	25
2.2	Principio di identità	28
2.3	Operazioni elementari con serie di potenze	32
2.4	Serie di potenze complesse. Funzione esponenziale. Funzioni trigonometriche	37
	Esercizi e complementi	44
3	Funzioni C^∞, C_0^∞ e C^ω	47
3.1	Definizioni ed esempi	47
3.2	Convoluzione e regolarizzazione	51
3.3	Espansione di alcune funzioni elementari	54
	Esercizi e complementi	57
4	Serie di Fourier	59
4.1	Funzioni periodiche e polinomi trigonometrici	59
4.2	Coefficienti di Fourier	61
4.3	Convergenza di serie di Fourier	67
	Esercizi e complementi	70
5	Funzioni di n variabili reali	74
5.1	Norma, distanza euclidea e prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$	74
5.2	Topologia standard di $\mathbf{R}^n$	75
5.3	Compattezza in $\mathbf{R}^n$	77
5.4	Connessione in $\mathbf{R}^n$	79
5.5	Funzioni continue da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$	81
5.6	Funzioni differenziabili da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$	86
5.7	Derivate successive	92
5.8	Formula di Taylor in $\mathbf{R}^n$	95
5.9	Serie di Taylor, funzioni $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ e $C^\omega(\mathbf{R}^n)$	101
5.10	Massimi e minimi locali di funzioni di n variabili	107
5.11	Funzioni differenziabili da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$	110
5.12	Derivate sotto segno di integrale	111
	Esercizi e complementi	113
6	Spazi normati	129
6.1	Spazi normati e spazi di Banach: definizioni ed esempi	129
6.2	Serie di potenze di matrici	137
6.3	Un teorema di punto fisso	140
	Esercizi e complementi	141

7	Funzioni implicite	150
7.1	Teorema delle funzioni implicite	150
7.2	Massimi e minimi vincolati	157
	Esercizi e complementi	160
8	Equazioni differenziali ordinarie	162
8.1	Introduzione	162
8.2	Un teorema “generale” di esistenza ed unicità	166
8.3	Dipendenza dai dati iniziali	168
8.4	Intervalli di esistenza	170
8.5	Struttura delle soluzioni di sistemi lineari	172
	Esercizi e complementi	175
9	Integrazione in $\mathbf{R}^n$	182
9.1	Rettangoli in $\mathbf{R}^n$	182
9.2	Funzioni a scalini	184
9.3	Insiemi di misura nulla	186
9.4	L'integrale di Riemann in $\mathbf{R}^n$	189
9.5	Funzioni $\mathcal{L}^1$	198
9.6	Teoremi sull'integrazione di limiti	206
9.7	Lo spazio di Banach L^1	209
9.8	Integrali iterati e Teorema di Fubini	212
9.9	Funzioni ed insiemi misurabili. Misura di Lebesgue	214
9.10	Integrazione su insiemi misurabili. Insiemi normali	219
9.11	Cambiamento di variabili nelle integrazioni	221
	Esercizi e complementi	230
10	Integrazione su varietà di $\mathbf{R}^n$	237
10.1	Inclusioni differenziabili in $\mathbf{R}^n$ e varietà	237
10.2	Integrazione su varietà: definizioni	242
10.3	Il Teorema della divergenza in $\mathbf{R}^n$	245
10.4	1-Forme differenziali in $\mathbf{R}^n$ e teoremi di Green e Stokes	252
	Esercizi e complementi	261
A	Esercizi vari	272
B	Suggerimenti e soluzioni di alcuni esercizi	282

0 Disuguaglianze di Cauchy e disuguaglianze triangolari

Senza dubbio la disuguaglianza usata più frequentemente nello studio dell'analisi su $\mathbb{R}$ (il campo dei numeri reali) è

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad (0.1)$$

valida per ogni coppia di numeri reali x e y .

In questa sezione dimostreremo alcune disuguaglianze, legate a (0.1), che saranno di fondamentale importanza per lo studio dell'analisi su $\mathbb{R}^n$ o su altri spazi.

La prima è la **disuguaglianza di Cauchy in $\mathbb{R}^n$** : se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ sono elementi (o "vettori") di $\mathbb{R}^n$ allora si ha

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (0.2)$$

La disuguaglianza di Cauchy vale anche per $n = \infty$. Più precisamente, siano $\{x_k\}_{k \geq 1}$ e $\{y_k\}_{k \geq 1}$ due successioni di numeri reali tali che le serie a termini positivi $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ e $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2$ convergano, allora anche la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|$ converge ed inoltre si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (0.3)$$

Sostituendo le serie con integrali si ottiene la seguente **disuguaglianza di Schwarz** (o "di Cauchy-Schwarz"): sia (a, b) un intervallo in $\mathbb{R}$ finito o infinito (ovvero $-\infty \leq a < b \leq \infty$) e siano $x(t)$ e $y(t)$ funzioni definite su (a, b) , a valori in $\mathbb{R}$ e "a quadrato sommabile" ovvero tali che¹

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty, \quad \int_a^b |y(t)|^2 dt < \infty,$$

allora la funzione $t \rightarrow |x(t)y(t)|$ è integrabile su (a, b) e si ha

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (0.4)$$

Da queste tre disuguaglianze di Cauchy, seguono facilmente le seguenti **disuguaglianze triangolari**: se x_k e y_k sono numeri reali ($k = 1, \dots, n$), allora

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (0.5)$$

¹Qui "integrale" sta per "integrale di Riemann" (si veda 0.1).

se $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ sono successioni di numeri reali, allora

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}; \quad (0.6)$$

se $x(t)$ e $y(t)$ sono due funzioni continue su (a, b) (stesse ipotesi fatte prima), allora

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (0.7)$$

Il nome “disuguaglianze triangolari” deriva dalla geometria euclidea. Si consideri, ad esempio, il caso di (0.5) nel caso reale e con $n = 2$ e si identifichino punti $x \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ con vettori con il primo estremo nell'origine $(0, 0)$ e con il secondo estremo nel punto di coordinate cartesiane (x_1, x_2) . Dal teorema di Pitagora segue che la lunghezza (euclidea) del vettore $x = (x_1, x_2)$ è data da $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Ricordando la “regola del parallelogramma”, risulta quindi evidente che la relazione (0.5) non asserisce altro che “in un triangolo, la lunghezza di ogni lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due”.

Dimostrazione di (0.2). Nel caso in cui $x = 0$ (cioè $x_k = 0$ per ogni k) o $y = 0$, la (0.2) è ovviamente verificata (con il segno $=$). Assumiamo dunque che sia x che y siano diversi da zero (ovvero che abbiano almeno una componente non nulla); ciò è equivalente a supporre che

$$a \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} > 0, \quad b \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} > 0. \quad (0.8)$$

Definiamo $\bar{x}_k \equiv \frac{|x_k|}{a}$ e $\bar{y}_k \equiv \frac{|y_k|}{b}$. Allora,

$$\sum_{k=1}^n \bar{x}_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n \bar{y}_k^2 = 1, \quad (0.9)$$

e la relazione (0.2) risulta essere equivalente a

$$\sum_{k=1}^n \bar{x}_k \bar{y}_k \leq 1. \quad (0.10)$$

D'altra parte, per ogni α e β in $\mathbb{R}$, si ha

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \quad (0.11)$$

(essendo tale relazione equivalente a $0 \leq (\alpha - \beta)^2$). Dunque

$$\sum_{k=1}^n \bar{x}_k \bar{y}_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{\bar{x}_k^2 + \bar{y}_k^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \bar{x}_k^2 + \sum_{k=1}^n \bar{y}_k^2 \right) = 1,$$

da cui segue (0.10) e quindi la validità di (0.2). ■

Dimostrazione di (0.3). Da (0.2) segue che, comunque si fissi un $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (0.12)$$

Prendendo ora il limite per n che tende ad infinito in tale relazione si ottiene la (0.3). ■

Dimostrazione di (0.4). Evidentemente è sufficiente dimostrare la (0.4) per funzioni non negative. Dividiamo la dimostrazione in tre parti.

(1) Assumiamo che $x(t)$ e $y(t)$ siano due funzioni (non negative e) a scalini su $[a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$. Senza perdita di generalità possiamo assumere che x e y siano costanti sugli stessi intervalli²: $x = \sum_{k=1}^N x_k \chi_{I_k}$, $y = \sum_{k=1}^N y_k \chi_{I_k}$. Notando che³ $xy = \sum_{k=1}^N x_k y_k \chi_{I_k}$, da (0.2) segue che⁴

$$\begin{aligned} \int_a^b x(t)y(t)dt &= \int_a^b \sum_{k=1}^N x_k y_k \chi_{I_k}(t)dt = \sum_{k=1}^N x_k y_k |I_k| \\ &= \sum_{k=1}^N (x_k \sqrt{|I_k|})(y_k \sqrt{|I_k|}) \leq \left(\sum_{k=1}^N x_k^2 |I_k| \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N y_k^2 |I_k| \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b y(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(2) Assumiamo ora che $x(t)$ e $y(t)$ siano (non negative e) integrabili secondo Riemann su $[a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$. Sia $\varepsilon > 0$ un numero positivo arbitrario. Dalla teoria dell'integrazione secondo Riemann⁵ segue che esistono quattro funzioni a scalini su $[a, b]$, $\underline{x}$, $\bar{x}$, $\underline{y}$, $\bar{y}$ tali che: $0 \leq \underline{x} \leq x \leq \bar{x}$, $0 \leq \underline{y} \leq y \leq \bar{y}$;

$$\sup_{[a,b]} x(t) = \sup_{[a,b]} \bar{x}(t), \quad \sup_{[a,b]} y(t) = \sup_{[a,b]} \bar{y}(t); \quad \int_a^b (\bar{x}(t) - \underline{x}(t))dt \leq \varepsilon,$$

$$\int_a^b (\bar{y}(t) - \underline{y}(t))dt \leq \varepsilon. \quad \text{Da quest'ultime proprietà segue che, se } M \text{ denota un}$$

²Si ricorda che la funzione caratteristica di un insieme E , denotata $x \rightarrow \chi_E(x)$, è la funzione che vale 1 se $x \in E$ e 0 altrimenti.

³Poiché gli insiemi I_k sono a due a due disgiunti si ha che $\chi_{I_k \cap I_j} = \delta_{jk} \chi_{I_k}$ (dove δ_{jk} denota il delta di Kronecker che vale 1 se $k = j$ e 0 altrimenti); dunque: $xy = (\sum_{k=1}^N x_k \chi_{I_k})(\sum_{j=1}^N y_j \chi_{I_j}) = \sum_{k,j=1}^N x_k y_j \chi_{I_k \cap I_j} = \sum_{k,j=1}^N x_k y_j \chi_{I_k} \delta_{jk} = \sum_{k=1}^N x_k y_k \chi_{I_k}$.

⁴Si usi la (0.2) con x_k e y_k sostituiti da $x_k \sqrt{|I_k|}$ e da $y_k \sqrt{|I_k|}$ dove $|I_k|$ denota la lunghezza dell'intervallo I_k .

⁵Si veda, per esempio, 0.1.

maggiorante per l'estremo superiore di x e di y su $[a, b]$,

$$\begin{aligned}\int_a^b (\bar{x}(t)^2 - \underline{x}(t)^2) dt &= \int_a^b (\bar{x}(t) - \underline{x}(t))(\bar{x}(t) + \underline{x}(t)) dt \\ &\leq 2M \int_a^b (\bar{x}(t) - \underline{x}(t)) dt \leq 2M\varepsilon, \\ \int_a^b (\bar{y}(t)^2 - \underline{y}(t)^2) dt &= \int_a^b (\bar{y}(t) - \underline{y}(t))(\bar{y}(t) + \underline{y}(t)) dt \\ &\leq 2M \int_a^b (\bar{y}(t) - \underline{y}(t)) dt \leq 2M\varepsilon.\end{aligned}$$

Dunque, per il punto (1),

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b x(t)y(t) dt\right)^2 &\leq \left(\int_a^b \bar{x}(t)\bar{y}(t) dt\right)^2 \\ &\leq \left(\int_a^b \bar{x}(t)^2 dt\right) \left(\int_a^b \bar{y}(t)^2 dt\right) \\ &\leq \left(\int_a^b x(t)^2 dt + 2M\varepsilon\right) \left(\int_a^b y(t)^2 dt + 2M\varepsilon\right) \\ &\leq \left(\int_a^b x(t)^2 dt\right) \left(\int_a^b y(t)^2 dt\right) + \varepsilon(4M^3(b-a) + 4M^2\varepsilon).\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la (0.4) sotto le presenti ipotesi.

(3) Sia ora $-\infty < a < b < \infty$. Per il punto (2) la (0.4) vale con a e b sostituiti da $\bar{a}$ e $\bar{b}$ con $a < \bar{a} < \bar{b} < b$. Prendendo in tale relazione l'estremo superiore su $\bar{a} > a$ e su $\bar{b} < b$ si ottiene (0.4). ■

Dimostrazione di (0.5) e di (0.6). Da (0.1) segue immediatamente che per ogni coppia di numeri reali z e w si ha

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \quad (0.13)$$

(basta elevare al quadrato la relazione (0.1)). Dunque la relazione

$$\left(\sum_{k=1}^n \{|x_k|^2 + |y_k|^2 + 2|x_k||y_k|\}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (0.14)$$

implica la (0.5). Elevando al quadrato la (0.14), si verifica immediatamente che tale relazione è equivalente a (0.2) e che quindi (0.5) è vera.

La (0.6) segue da (0.5) prendendo il limite per $n \rightarrow \infty$. ■

Dimostrazione di (0.7). Basta ripetere l'argomento usato per dimostrare (0.5), osservando che

$$\int_a^b |x(t) + y(t)|^2 dt \leq \int_a^b (|x(t)|^2 + |y(t)|^2 + 2|x(t)||y(t)|) dt. \quad \blacksquare$$

Osservazione 0.1 (i) La (0.5) con $n = 2$ è equivalente alla disuguaglianza (0.1) con x e y complessi ovvero con⁶ $x \equiv x_1 + ix_2$ e $y \equiv y_1 + iy_2$.

(ii) Anche le (0.2), (0.3), (0.5) e (0.6) valgono per x_k e y_k in $\mathbb{C}$ e le dimostrazioni di tale disuguaglianze nel caso complesso sono identiche a quelle date nel caso reale (basta sostituire le parole “reale/i” con “complesso/i”).

(iii) In effetti, anche le disuguaglianze integrali valgono per *funzioni complesse di variabile reale* (ovvero funzioni da $E \subset \mathbb{R}$ con valori in $\mathbb{C}$; tali funzioni verranno discusse in 1.25).

Esercizi e complementi

R 0.1 (Richiami sull'integrazione di Riemann di funzioni di una variabile)

Si ricorda che una funzione f definita su di un intervallo limitato $I \subset \mathbb{R}$ si dice **integrabile secondo Riemann** su I se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a_0 \equiv \inf I < a_1 < \dots < a_N \equiv \sup I$ tali che

$$\sum_{i=1}^N \left[\sup_{a_{i-1} < x < a_i} f(x) - \inf_{a_{i-1} < x < a_i} f(x) \right] (a_i - a_{i-1}) \leq \varepsilon; \quad (0.15)$$

in tal caso si ha che

$$\begin{aligned} & \sup_{a_0 < a_1 < \dots < a_N} \sum_{i=1}^N \left(\inf_{a_{i-1} < x < a_i} f(x) \right) (a_i - a_{i-1}) \\ &= \inf_{a_0 < a_1 < \dots < a_N} \sum_{i=1}^N \left(\sup_{a_{i-1} < x < a_i} f(x) \right) (a_i - a_{i-1}) \end{aligned} \quad (0.16)$$

(dove gli estremi superiori ed inferiori prima delle somme sono fatti su tutte le possibili scelte dei punti $a_0 \equiv \inf I < a_1 < \dots < a_N \equiv \sup I$ con N arbitrario) e tale comune valore è per definizione l'integrale di Riemann di f su I e si denota con i simboli $\int_I f(x)dx$, $\int_I f(t)dt$, $\int_I f$, $\int_a^b f(x)dx$ (dove $a \equiv \inf I$, $b \equiv \sup I$), etc.

Da tale definizione segue facilmente che l'integrale di Riemann gode delle seguenti proprietà: se f e g sono funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo limitato I di estremi a e b e se α e β sono numeri reali, allora si ha

$$\begin{aligned} \int_I (\alpha f + \beta g) &= \left(\alpha \int_I f \right) + \left(\beta \int_I g \right), & (\text{linearità}), \\ f \geq 0 \text{ su } I &\implies \int_I f \geq 0, & (\text{positività}), \\ \int_a^b f &= \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \forall c \in (a, b), & (\text{additività}), \end{aligned}$$

⁶ Come d'uso comune i denota l'unità immaginaria pura del campo complesso (ovvero $\sqrt{-1}$); il “modulo” o “valore assoluto” di un numero complesso $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con x e y numeri reali (e rispettivamente parte reale ed immaginaria del numero complesso z) è definito come $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$, dove $\bar{z}$ denota il “complesso coniugato” di z ovvero il numero complesso $x - iy$.

(è implicito nella formulazione dell'ultima proprietà che f è integrabile secondo Riemann su qualunque intervallo $J \subset I$); inoltre dall'integrabilità secondo Riemann di f segue anche che la parte positiva di f , $f_+ \equiv \max\{f, 0\}$, la parte negativa di f , $f_- \equiv -\min\{f, 0\}$, ed il modulo di f , $|f| \equiv f_+ + f_-$, sono anch'essi integrabili secondo Riemann su I .

Proposizione 0.2 Sia $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua sull'intervallo limitato I . Allora f è integrabile secondo Riemann su I e comunque si fissi $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni scelta di punti $a_0 \equiv \inf I < a_1 < \dots < a_N \equiv \sup I$ con $\sup_i |a_i - a_{i-1}| \leq \delta$ e per ogni $x_i \in [a_{i-1}, a_i] \cap I$ si ha

$$\left| \int_I f(x) dx - \sum_{i=1}^N f(x_i) (a_i - a_{i-1}) \right| \leq \varepsilon. \quad (0.17)$$

Dimostrazione Sia $a \equiv \inf I$ e $b \equiv \sup I$ (essendo I limitato $(b - a) < \infty$). Dato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a)$ per ogni $x, y \in I$ con $|x - y| < \delta$. Allora, per ogni scelta di punti $a_0 \equiv \inf I < a_1 < \dots < a_N \equiv \sup I$ con $\sup_i |a_i - a_{i-1}| \leq \delta$ la (0.15) è chiaramente soddisfatta⁷. Inoltre, poiché

$$\begin{aligned} \left| \int_I f(x) dx - \sum_{i=1}^N f(x_i) (a_i - a_{i-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^N \int_{a_{i-1}}^{a_i} [f(x) - f(x_i)] dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(x) - f(x_i)| dx, \end{aligned}$$

anche la (0.17) è soddisfatta. ■

Da questa proposizione segue immediatamente che se $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione uniformemente continua sull'intervallo limitato I , comunque si prendano, per $N \geq 1$, punti $a_0^{(N)} \equiv \inf I < a_1^{(N)} < \dots < a_N^{(N)} \equiv \sup I$ con $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq i \leq N} |a_i^{(N)} - a_{i-1}^{(N)}| = 0$ e comunque si scelgano, per $1 \leq i \leq N$, $x_i^{(N)} \in [a_{i-1}^{(N)}, a_i^{(N)}] \cap I$ si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i^{(N)}) (a_i^{(N)} - a_{i-1}^{(N)}) = \int_I f(x) dx. \quad (0.19)$$

Integrale di Riemann e funzioni a scalini Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, con I intervallo di $\mathbb{R}$, si dice a scalini (o anche “costante a tratti”) su I se esistono N intervalli a due a due disgiunti $I_k \subset I$ ed N numeri reali α_k tali che $f(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{I_k}(x)$. Se, in (0.15)

⁷Si noti che per ogni intervallo J ,

$$\sup_{x, y \in J} |f(x) - f(y)| = \sup_J f - \inf_J f, \quad (0.18)$$

infatti: $\forall x, y \in J$, $f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x', y' \in J} |f(x') - f(y')|$ e prendendo l'estremo superiore su $x \in J$ e poi l'estremo inferiore su $y \in J$ si ottiene che $\sup_J f - \inf_J f \leq \sup_{x, y \in J} |f(x) - f(y)|$; d'altra parte dati $x, y \in J$, se (per fissare le idee) $f(x) \geq f(y)$, si ha che $|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) \leq \sup_J f - \inf_J f$ e prendendo l'estremo superiore su $x, y \in J$ si ottiene $\sup_{x, y \in J} |f(x) - f(y)| \leq \sup_J f - \inf_J f$.

con $I \equiv [a, b]$, prendiamo $I_k \equiv [a_{k-1}, a_k]$ per $1 \leq k \leq N-1$, $I_N \equiv [a_{N-1}, b]$, $\alpha_k \equiv \inf_{I_k} f$, $\beta_k \equiv \sup_{I_k} f$, la (0.15) diviene

$$\int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \leq \varepsilon \quad (0.20)$$

dove $f_2 \equiv \sum_{k=1}^N \beta_k \chi_{I_k}$ e $f_1 \equiv \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{I_k}$ sono due funzioni a scalini su $[a, b]$ tali che $f_1 \leq f \leq f_2$. Tale relazione può dunque essere presa a definizione dell'integrabilità di f secondo Riemann.

Alcune estensioni dell'integrale di Riemann Nella definizione di integrabilità secondo Riemann data sopra vengono presi in considerazione solo insiemi limitati; inoltre da (0.15) segue anche che f è limitata su⁸ I . E' naturale estendere la nozione di integrabilità secondo Riemann ai casi in cui o l'intervallo I è illimitato (ad esempio $I = [0, \infty)$) o $I = \mathbb{R}$ e/o al caso in cui f non sia limitata su I (cioè $\sup_{x \in I} |f(x)| = \infty$).

Cominciamo col definire l'integrale di f su $[x_0, b)$ con $-\infty < x_0 < b \leq \infty$: sia $f: [x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ed assumiamo che

(i) $\forall x_0 < y < b$ f sia integrabile secondo Riemann su $[x_0, y]$;

(ii) $\sup_{x_0 < y < b} \int_{x_0}^y |f(x)| dx < \infty$.

In tal caso esiste il limite⁹ $\lim_{y \rightarrow b} \int_{x_0}^y f(x) dx$ e tale limite è per definizione l'integrale di Riemann di f su $[x_0, b)$.

Esempi: (a) $x_0 = 0$, $b = 1$, $f = 1/(\sqrt{1-x})$. In tal caso per ogni $0 < y < 1$

$$\int_{x_0}^y f(x) dx = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2(1-\sqrt{1-y}) \implies \sup_{0 < y < 1} \int_{x_0}^y f = \lim_{y \rightarrow 1} \int_{x_0}^y f \equiv \int_{x_0}^b f = 2.$$

(b) $x_0 = 1$, $b = \infty$, $f(x) = 1/x^2$. In tal caso per ogni $0 < y < 1$

$$\int_{x_0}^y f(x) dx = \int_0^y \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{y} \implies \sup_{0 < y < 1} \int_{x_0}^y f = \lim_{y \rightarrow 1} \int_{x_0}^y f \equiv \int_{x_0}^b f = 1.$$

In modo del tutto analogo si definisce l'integrale di Riemann di f su intervalli della forma $(a, x_0]$ con¹⁰ $-\infty \leq a < x_0 < \infty$. Per intervalli della forma (a, b) con $-\infty \leq a < b \leq \infty$ si sceglie un punto arbitrario $x_0 \in (a, b)$ e si dice che f è integrabile secondo Riemann su (a, b) se f è integrabile secondo Riemann su $(a, x_0]$ e su $[x_0, b)$ ed in tal caso l'integrale di Riemann di f su (a, b) è definito come $\int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f$; chiaramente tale definizione non dipende dalla scelta di¹¹ x_0 . Infine si può estendere immediatamente per *additività* la nozione di integrale secondo Riemann ad insiemi che siano un'unione finita e disgiunta di

⁸Esercizio 0.2.

⁹Esercizio 0.3.

¹⁰Naturalmente la (ii) si sostituirà con: (iii) $\sup_{a < y < x_0} |f| < \infty$.

¹¹Esercizio 0.4.

intervalli (limitati o illimitati): ad esempio la funzione $1/\sqrt{|x|}$ si dirà integrabile secondo Riemann su $E \equiv [-1, 0) \cup (0, 1]$ ed il valore del suo integrale sarà dato da

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

Integrale di Riemann in senso improprio È possibile estendere ulteriormente la nozione di integrale di Riemann così da dar senso, in alcuni casi, a $\int_a^b f$ anche qualora (ii) o (iii) non valgano. Consideriamo dapprima il caso di $f : [x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (con $-\infty < x_0 < b \leq \infty$): se vale (i) ed al posto di (ii) vale solo

$$(ii)' \exists \lim_{y \rightarrow b} \int_{x_0}^y f(x) dx$$

si dirà che f è integrabile secondo Riemann in senso improprio su $[x_0, b)$ ed il valore dell'integrale di f su $[x_0, b)$ sarà dato dal limite in (ii)'. Analogamente si definisce l'integrale improprio secondo Riemann di f su $(a, x_0]$ o su (a, b) .

Esempio Sia $x_0 = 1$, $b = \infty$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. In tal caso f non è integrabile secondo Riemann su $[1, \infty)$ mentre è integrabile in senso improprio: per ogni $1 < y < \infty$, integrando per parti,

$$\int_1^y \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \frac{\cos y}{y} - \int_1^y \frac{\cos x}{x^2} dx \quad (0.21)$$

e dunque, poiché $(\cos x)/x^2$ è integrabile secondo Riemann su $[1, \infty)$, prendendo il limite per y che tende ad infinito in (0.21) si ottiene che

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Integrale secondo Cauchy in senso improprio Concludiamo menzionando una nozione di integrale su $\mathbb{R}$ in un senso ancora più debole del precedente: una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Cauchy in senso improprio se per ogni $y > 0$ f è integrabile secondo Riemann su $[-y, y]$ e se esiste il limite

$$(iv) \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^y f(x) dx$$

ed il valore di tale limite definisce $\int_{\mathbb{R}} f$. Ad esempio la funzione $f(x) = x$ è integrabile secondo Cauchy in senso improprio su $\mathbb{R}$ e $\int_{\mathbb{R}} x dx = 0$.

E 0.2 Si dimostri che da (0.15) segue che f è limitata su I (ovvero che $\sup_I |f| < \infty$).

E 0.3 Si dimostri che da (i) e (ii) di 0.1 segue l'esistenza del limite $\lim_{y \rightarrow b} \int_{x_0}^y f(x) dx$.

E 0.4 Si dimostri che la definizione data in 0.1 di integrale di f su (a, b) non dipende dalla scelta di x_0 .

¹²Esercizio 0.5.

E 0.5 (i) Si dimostri che la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ non è integrabile secondo Riemann su $[1, \infty)$.

(ii) Si dimostri che la funzione f definita da $f(0) = 1$ e, per $x \neq 0$ da $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è integrabile secondo Riemann in senso improprio su $\mathbb{R}$ e che $\int_{\mathbb{R}} f > 0$;

(iii) si dimostri che f non è integrabile secondo Riemann su alcun intervallo illimitato.

E 0.6 Determinare gli insiemi su cui è integrabile secondo Riemann la funzione $\frac{1}{\sqrt{|x| \cdot |x-1|}}$.

E 0.7 Dimostrare che ogni funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e dispari è integrabile secondo Cauchy in senso improprio e $\int_{\mathbb{R}} f = 0$.

E 0.8 Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che non sia integrabile secondo Riemann in senso improprio, che sia integrabile secondo Cauchy in senso improprio e tale che $\int_{\mathbb{R}} f > 0$.

E 0.9 (i) Si trovino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione x^α sia integrabile secondo Riemann su $(0, 1)$.

(ii) Si trovino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ sia integrabile secondo Riemann su $[1, \infty)$.

E 0.10 Si dia un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che: f sia integrabile secondo Riemann su $\mathbb{R}$, $f \geq 0$ e $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

1 Serie e successioni di funzioni

Sia $\{u_n\}_{n \geq 0}$ una successione di funzioni definite su un insieme $E \subset \mathbb{R}$ ed a valori reali. Vogliamo studiare il comportamento della serie¹ $\sum u_n(x)$ al variare di $x \in E$. Se, per ogni $x \in E$, la serie numerica $\sum u_n(x)$ converge, diremo che la serie $\sum u_n$ converge puntualmente. Una nozione più interessante è contenuta nella seguente definizione:

Definizione 1.1 (Convergenza uniforme) Si dice che la serie $\sum u_n$ converge uniformemente in E se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero N_0 tale che comunque si prendano $M \geq N \geq N_0$ ed $x \in E$ si abbia

$$\left| \sum_{n=N}^M u_n(x) \right| < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Cioè la successione delle somme parziali² $\sum_{n \leq N} u_n(x)$ è una successione di Cauchy per ogni $x \in E$ e la scelta del numero N_0 per cui vale (1.1) è indipendente da x ovvero è uniforme in x . In tal caso esiste, per ogni $x \in E$, il $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N u_n(x)$ e se denotiamo con $u(x)$ tale limite diremo che la serie $\sum u_n$ converge uniformemente in E a u . Prendendo in (1.1) il limite per $M \rightarrow \infty$ e l'estremo superiore per $x \in E$ otteniamo che la nozione di convergenza uniforme è equivalente a richiedere che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_E \left| \sum_{n \geq N} u_n \right| = 0. \quad (1.2)$$

Esempio 1.2 La serie $\sum_{n \geq 0} x^n \operatorname{sen} \frac{n}{x}$ converge uniformemente in ogni insieme E che non contenga lo zero e tale che $b \equiv \sup\{|x| : x \in E\} < 1$. Infatti, in tale insieme E , $|\operatorname{sen}(n/x)| \leq 1$, e

$$\left| \sum_{n=N}^M x^n \operatorname{sen} \frac{n}{x} \right| \leq \sum_{n=N}^M |x|^n \leq \sum_{n=N}^M b^n \leq \sum_{n=N}^{\infty} b^n = \frac{b^N}{1-b},$$

e poiché quest'ultima quantità tende a zero quando N tende ad infinito vediamo che (1.2) è soddisfatta.

¹Si ricorda che, data una successione $\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, il termine “serie $\sum a_n$ ” (o “ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ” o “ $\sum_{n \geq 0} a_n$ ”) è usato normalmente con un duplice significato ed indica o “la successione delle ridotte $\{\sum_{k=0}^n a_k\}$ ” ovvero (qualora la successione delle ridotte ammetta un limite) il “limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_n$ ”. Ad esempio, espressioni quali “comportamento della serie $\sum a_n$ ” o “la convergenza della serie $\sum a_n$ ” si riferiscono al comportamento o la convergenza della successione delle ridotte $\{\sum_{k=0}^n a_k\}$, mentre “il valore della serie $\sum a_n$ ” significa “il valore del limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_n$ ”.

²Data una successione $\{a_n\} = \{a_0, a_1, \dots\}$ e dato un numero intero $N \geq 0$, il simbolo $\sum_{n \leq N} a_n$ significa $\sum_{n=0}^N a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_N$; analogamente il simbolo $\sum_{n \geq N} a_n$ denota la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$; più in generale, se M denota un numero intero non inferiore a N oppure denota ∞ , il simbolo $\sum_{N \leq n \leq M} a_n$ ha lo stesso significato di $\sum_{n=N}^M a_n$.

In generale la somma $\sum u_n(x)$, anche se le funzioni u_n sono regolari (ad esempio derivabili un numero infinito di volte) ed anche se la serie converge assolutamente per ogni x , non è una funzione continua di x . Consideriamo infatti il seguente

Esempio 1.3 Sia $u_0 = x$ e, per $n \geq 1$, $u_n = (x-1)x^n$. Chiaramente la serie

$$u(x) \equiv \sum_{n \geq 0} u_n(x)$$

converge per $x = 1$ e $u(1) = 1$. Inoltre, ricordando il valore della somma della serie geometrica di ragione minore di uno, vediamo che, per $0 \leq x < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} u_n(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(x + \sum_{n=1}^N (x-1)x^n \right) = x + (x-1) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x^n \\ &= x + (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + (x-1) \frac{x}{1-x} = 0. \end{aligned}$$

Quindi la serie $\sum u_n$ converge assolutamente per ogni x ma la sua somma è la funzione che vale 0 per $0 \leq x < 1$ e 1 per $x = 1$ ed è quindi discontinua.

L'uniforme convergenza garantisce invece la continuità della somma:

Teorema 1.4 (Continuità del limite) Se $u_n \in C(E)$ e la serie $\sum u_n$ converge uniformemente in E , allora $\sum u_n$ è una funzione continua su E .

Dimostrazione Sia $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ e siano x e x_0 due punti in E . Allora comunque si scelga un intero N

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_0)| &= \left| \sum_{n \leq N} \{u_n(x) - u_n(x_0)\} + \sum_{n > N} u_n(x) - \sum_{n > N} u_n(x_0) \right| \\ &\leq \sum_{n \leq N} |u_n(x) - u_n(x_0)| + 2 \sup_E \left| \sum_{n > N} u_n \right|. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo N tale che $\sup_E \left| \sum_{n > N} u_n \right| < \varepsilon/4$ e δ tale che $|u_n(x) - u_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2N}$ per ogni $|x - x_0| < \delta$ e per ogni $1 \leq n \leq N$. Allora, da (1.3) segue che $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$, se $|x - x_0| < \delta$. ■

Vediamo ora quando sia possibile derivare o integrare una serie di funzioni.

Teorema 1.5 (Integrazione di serie) Se $u_n \in C(E)$ e la serie $\sum u_n$ converge uniformemente in E , allora per ogni intervallo finito $(a, b) \subset E$ si ha che $\int_a^b \sum u_n = \sum \int_a^b u_n$.

Dimostrazione Per ogni $\varepsilon > 0$ sia N tale che, per ogni $M \geq N$,

$$\sup_E \left| \sum_{n=N}^M u_n \right| \leq \varepsilon / (b - a) ; \quad (1.4)$$

si noti che tale disuguaglianza vale anche per $M = \infty$ (si veda la (1.2)). Allora

$$\left| \sum_{n=N}^M \int_a^b u_n \right| \leq \int_a^b \left| \sum_{n=N}^M u_n \right| \leq \varepsilon . \quad (1.5)$$

Quindi la serie numerica $\sum \int_a^b u_n$ converge e da (1.5) segue che

$$\left| \sum_{n \geq N} \int_a^b u_n \right| \leq \varepsilon . \quad (1.6)$$

Ora, da (1.4) (con $M = \infty$) e da (1.6) segue che

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \sum u_n - \sum \int_a^b u_n \right| &= \left| \int_a^b \sum_{n \geq N} u_n - \sum_{n \geq N} \int_a^b u_n \right| \\ &\leq \int_a^b \sup_E \left| \sum_{n \geq N} u_n \right| + \left| \sum_{n \geq N} \int_a^b u_n \right| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di ε segue l'asserto del teorema. ■

Teorema 1.6 (Derivazione di serie) Sia E un insieme aperto e $u_n \in C^1(E)$, $n \geq 1$. Se $\sum u_n$ converge puntualmente e $\sum u'_n$ converge uniformemente in E , allora $u = \sum u_n \in C^1(E)$ e $u' = \sum u'_n$.

Dimostrazione Sia $x \in E$, $x + h \in E$ e definiamo

$$\Delta_n(x; h) \equiv \frac{u_n(x + h) - u_n(x)}{h} - u'_n(x) . \quad (1.7)$$

Si fissi $\varepsilon > 0$ e sia N tale che $\sup_E \left| \sum_{n \geq N} u'_n(x) \right| < \varepsilon/4$ (tale N esiste poiché $\sum u'_n$ converge uniformemente); infine sia $\delta > 0$ tale che $|\Delta_n(x; h)| < \frac{\varepsilon}{2N}$ per ogni $|h| < \delta$ e per ogni $1 \leq n \leq N$ (tale δ esiste poiché $h \rightarrow \Delta_n(x; h)$ è una funzione continua in $h = 0$). Allora, dal teorema fondamentale del calcolo e dal Teorema 1.5 segue che

$$\begin{aligned} \left| \frac{u(x + h) - u(x)}{h} - \sum u'_n(x) \right| &= \left| \sum \Delta_n(x; h) \right| \\ &= \left| \sum_{n \leq N} \Delta_n(x; h) + \sum_{n > N} \Delta_n(x; h) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n \leq N} |\Delta_n(x; h)| + \left| \sum_{n > N} \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} \right| + \left| \sum_{n > N} u'_n(x) \right| \\
&= \sum_{n \leq N} |\Delta_n(x; h)| + \left| \sum_{n > N} \int_0^1 u'_n(x+th) dt \right| + \left| \sum_{n > N} u'_n(x) \right| \\
&= \sum_{n \leq N} |\Delta_n(x; h)| + \left| \int_0^1 \sum_{n > N} u'_n(x+th) dt \right| + \left| \sum_{n > N} u'_n(x) \right| \\
&\leq \sum_{n \leq N} |\Delta_n(x; h)| + \int_0^1 \left| \sum_{n > N} u'_n(x+th) \right| dt + \left| \sum_{n > N} u'_n(x) \right| \leq \varepsilon . \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Dunque il limite del rapporto incrementale di u in x esiste e coincide con $\sum u'_n(x)$.

Le ipotesi di quest'ultimo teorema possono essere indebolite; si veda **1.15** a fine paragrafo.

La seguente nozione di convergenza, assai utile in pratica, implica la convergenza uniforme.

Definizione 1.7 (Convergenza totale) *Si dice che la serie $\sum u_n$ converge totalmente in E se converge la serie numerica $\sum \sup_E |u_n|$.*

Quindi, la nozione di convergenza totale è equivalente a richiedere che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n \geq N} \sup_E |u_n| = 0$$

e si confronti tale relazione con (1.2). La nozione di convergenza totale è, come ci si aspetta, più forte della nozione di convergenza uniforme: in **1.6** viene prodotto un esempio di una serie $\sum u_n$ che converge uniformemente in $[0, 1]$ ma non totalmente.

Alla successione, $\{f_n\}$, di funzioni definite su E ed a valori reali, associamo la seguente serie di funzioni

$$u_0 \equiv f_0, \quad u_k \equiv f_k - f_{k-1}, (k \geq 1), \quad \text{cosicché} \quad f_n = \sum_{k=0}^n u_k. \quad (1.9)$$

E' chiaro quindi che è possibile tradurre tutti i risultati di questa sezione al caso di **successioni di funzioni**. In particolare, si ponga

Definizione 1.8 (Convergenza uniforme) *Si dice che la successione f_n converge uniformemente in E se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero N_0 tale che comunque si prendano $M, N \geq N_0$ ed $x \in E$ si abbia*

$$|f_M(x) - f_N(x)| < \varepsilon. \quad (1.10)$$

Dunque f_n converge uniformemente su E se e solo se la serie $\sum u_k$, con u_k definita in (1.9), converge uniformemente e dai Teoremi 1.4, 1.6 e 1.5 seguono immediatamente i seguenti risultati:

Teorema 1.9 (Continuità del limite) *Se $f_n \in C(E)$ e la successione f_n converge uniformemente in E , allora $f(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ è una funzione continua su E .*

Teorema 1.10 (Integrazione di successioni di funzioni) *Se $f_n \in C(E)$ e la successione f_n converge uniformemente in E , allora per ogni intervallo finito $(a, b) \subset E$ si ha che $\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$.*

Teorema 1.11 (Derivazione di successioni di funzioni) *Sia E un insieme aperto e $f_n \in C^1(E)$. Se f_n converge puntualmente e f'_n converge uniformemente, allora $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in C^1(E)$ e $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$.*

Osservazione 1.12 (i) Se E è un insieme compatto e $f_n \in C(E)$, le funzioni f_n sono uniformemente continue su E . Se le f_n formano una successione uniformemente convergente, segue dal Teorema 1.9 che il limite $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ è una funzione continua su E e quindi ivi uniformemente continua.

(ii) Grazie al Teorema 1.9 possiamo dire che $f_n \in C(E)$ converge uniformemente su E se e solo se esiste una funzione continua $f \in C(E)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (1.11)$$

Tale condizione è equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N, \forall x \in E \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (1.12)$$

Se vale (1.11) diremo che f_n converge uniformemente a f (in simboli: $f_n \rightarrow f$ uniformemente).

Esercizi e complementi

E 1.1 Dimostrare che valgono le seguenti due affermazioni: (i) Se $u_n \in C([a, b])$ e $\sum u_n$ converge uniformemente in (a, b) , allora $\sum u_n$ converge uniformemente in $[a, b]$. (ii) Se $u_n \in C([a, b])$, $\sum u_n$ converge in (a, b) ma $\sum u_n(a)$ non converge, allora $\sum u_n$ non converge uniformemente in (a, b) .

E 1.2 Studiare la convergenza delle seguenti serie di funzioni di x , (ossia si trovino i più grandi insiemi dove le serie convergono puntualmente, uniformemente e totalmente) al variare, qualora appaia, del parametro reale α :

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} x^n, & (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha n}}{n^x}, & (3) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x \operatorname{sen} n)^n}{1+n^2 x}, \\
(4) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xn)^n}{x+n!}, & (5) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ con } u_n(x) \equiv \left(\sum_{j=1}^n j^x \right)^{-1}, \\
(6) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^x}{(\log n)^\alpha}, & (7) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \log \left[1 + \arctan \left(\frac{x}{n} \right)^\alpha \right], \\
(8) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}, & (9) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 nx}, & (10) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(\log n)^x}.
\end{aligned}$$

E 1.3 Si considerino le serie dell'esercizio precedente e si dia, per ogni x nell'insieme di convergenza, una stima superiore semplice di $|\sum u_n(x)|$ in termini di x .

Esempio: la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos x^n}{1+x^n}$ ha come insieme di convergenza $E \equiv \{x : |x| > 1\}$. La convergenza è puntuale ed assoluta in E mentre è totale in ogni insieme della forma $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$ con $a < -1$, $b > 1$. Per $x \in E$ si ha

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{1+x^n} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|1+x^n|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|x|^n - 1} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|x|^n} \frac{1}{1 - \frac{1}{|x|}} = \frac{|x|}{(|x| - 1)^2}.
\end{aligned}$$

E 1.4 (i) Siano $\sum u_n$ e $\sum v_n$ due serie di funzioni convergenti uniformemente in E . Si dimostri che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la serie $\sum (au_n + bv_n)$ converge uniformemente in E a $a \sum u_n + b \sum v_n$.

(ii) Siano f_n e g_n due successioni uniformemente convergenti in $[a, b]$ a, rispettivamente, f e g . Si dimostri che $f_n g_n$ converge uniformemente a fg .

E 1.5 Sia $u_0 = x$, e, per $n \geq 1$, $u_n = (x-1)x^n$, $x \in [0, 1]$. Dimostrare *direttamente* che la serie $\sum u_n$ non converge né totalmente, né uniformemente.

E 1.6 Sia $u_0 \equiv u_1 \equiv 0$ e, per $n \geq 2$, si definisca la funzione $u_n(x)$ come segue: sia

$$I_n \equiv \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4} \right], \quad I'_n \equiv \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}, \frac{1}{n} \right], \quad I''_n \equiv \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4} \right].$$

Sia ora $u_n = 0$ se $x \notin I_n$; in I'_n , u_n coincide con la retta passante per $(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}, 0)$ e per $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ mentre nell'intervallo I''_n u_n coincide con la retta passante per $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}, 0)$ e per $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.

Si dimostri che $u_n \in C(\mathbb{R})$ e che la serie $\sum u_n$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$ ma non vi converge totalmente.

E 1.7 Sia f_n la funzione continua che vale 0 se $x \notin (0, \frac{1}{n})$, per $x = \frac{1}{2n}$ vale 1 e coincide con una retta negli intervalli $(0, \frac{1}{2n})$ e $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$.

Dimostrare le seguenti affermazioni:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ per ogni x ; (ii) f_n non converge uniformemente su $[0, 1]$; (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim f_n = 0$.

E 1.8 Trovare una successione di funzioni continue $f_n \in C([0, 1])$ convergente puntualmente ad una funzione continua $f \in C([0, 1])$ ma tale che $\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 f$.

E 1.9 Usando le proprietà di derivazione delle serie uniformemente convergenti, si calcoli il valore delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

E 1.10 Trovare delle formule ricorsive per calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n.$$

E 1.11 Per ogni intero $N \geq 2$, calcolare

$$\sum_{k=1}^{N-1} (N-k) 2^{k-1}.$$

E 1.12 Si dimostrino le seguenti identità

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) (1-x)^{k-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \quad \forall 0 < x < 1, \forall n \geq 1. \quad (1.13)$$

E 1.13 Si costruisca una successione di funzioni continue $\delta_n \in C(\mathbb{R})$ che verifichino le seguenti proprietà: (i) $\delta_n \geq 0$; (ii) $\delta_n(x) = 0$ se $x \notin [a_n, b_n]$ dove a_n e b_n sono successioni monotone che convergono a 0 rispettivamente da sinistra e da destra; (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n \equiv \int_{a_n}^{b_n} \delta_n = 1$.

E 1.14 (“Delta approssimata”) Una successione di funzioni $\{\delta_n(x)\}$ che verifichi le proprietà (i), (ii), (iii) di 1.13 prende il nome di *delta approssimata*. Dimostrare che se $\{\delta_n\}$ è una delta approssimata allora, per ogni funzione continua $f \in C([a_0, b_0])$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = f(0). \quad (1.14)$$

E 1.15 Dimostrare la seguente generalizzazione del Teorema 1.6

Teorema 1.13 (Derivazione di serie II) Sia E un intervallo aperto e $u_n \in C^1(E)$. Se $\sum u'_n$ converge uniformemente in E e se esiste un punto $x_0 \in E$ tale che la serie $\sum u_n(x_0)$ converge, allora $u = \sum u_n \in C^1(E)$ e $u' = \sum u'_n$.

E 1.16 Dall'esercizio precedente si deduca la seguente generalizzazione del Teorema 1.11:

Teorema 1.14 (Derivazione di successioni di funzioni II) Sia E un intervallo aperto e $f_n \in C^1(E)$. Se f'_n converge uniformemente in E e se esiste $x_0 \in E$ tale che $f_n(x_0)$ converge, allora $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in C^1(E)$ e $f' = \lim f'_n$.

E 1.17 Si dia un esempio di una serie di funzioni C^∞ tale che $\sum u'_n$ converga uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ ma tale che $\sum u_n(x)$ non converga per nessun $x \in \mathbb{R}$.

C 1.18 (Convergenza monotona e convergenza uniforme)

Proposizione 1.15 Sia $K \subset \mathbb{R}$ un insieme compatto, siano f_n (per $n \geq 0$) e f funzioni continue su K e tali che³ $f_n \uparrow f$ [oppure $f_n \downarrow f$]. Allora $f_n \rightarrow f$ uniformemente su K .

Dimostrazione Per assurdo: la negazione di “ f_n converge a f uniformemente” è:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \geq 0 \exists x_n \text{ tale che } |f(x_n) - f_n(x_n)| \geq \varepsilon. \quad (1.15)$$

Poiché K è compatto esiste $x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \in K$. Dalla convergenza puntuale di f_n segue che

$$\exists N : |f(\bar{x}) - f_n(\bar{x})| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall n \geq N. \quad (1.16)$$

Per l'uniforme continuità di f e f_N segue che esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{e} \quad |f_N(x) - f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall x, y \in K \text{ con } |x - y| \leq \delta. \quad (1.17)$$

Dalla convergenza monotona di f_n a f , da (1.16) e (1.17) segue che, per ogni $x, y \in K$ con $|x - y| \leq \delta$ e per ogni $n \geq N$,

$$f_n(x) - f_n(y) \leq f(x) - f_N(y) \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Analogamente

$$f_n(x) - f_n(y) \geq f_N(x) - f(y) \geq -|f_N(x) - f_N(y)| - |f_N(y) - f(y)| \geq -\frac{\varepsilon}{4},$$

e quindi

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall x, y \in K \text{ con } |x - y| \leq \delta, \quad \forall n \geq N. \quad (1.18)$$

Sia ora k_0 tale che $\bar{n} \equiv n_{k_0} \geq N$ e $|\bar{x} - x_{\bar{n}}| \leq \delta$. Allora, da (1.17), (1.16) ed (1.18) segue che

$$|f(x_{\bar{n}}) - f_{\bar{n}}(x_{\bar{n}})| \leq |f(x_{\bar{n}}) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - f_{\bar{n}}(\bar{x})| + |f_{\bar{n}}(\bar{x}) - f_{\bar{n}}(x_{\bar{n}})| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

relazione che contraddice (1.15). Per il caso $f_n \downarrow f$ basta applicare quanto dimostrato a $-f_n$ e $-f$. ■

C 1.19 (Convergenza uniforme di funzioni monotone)

³ Si ricorda che una successione $\{a_n\}$ si dice monotona crescente [decrescente] se $\forall n, a_{n+1} \geq a_n$ [$a_{n+1} \leq a_n$]; $\{a_n\}$ si dice strettamente monotona crescente [decrescente] se $\forall n, a_{n+1} > a_n$ [$a_{n+1} < a_n$]; $a_n \uparrow a$ significa che la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente e che $\lim a_n = a$; $a_n \downarrow a$ significa che la successione $\{a_n\}$ è monotona decrescente e che $\lim a_n = a$; $f_n \uparrow f$ significa $f_n(x) \uparrow f(x)$ per ogni x ed analogamente per $f_n \downarrow f$; una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice monotona crescente [decrescente] se $\forall x < y$ in $E, f(x) \leq f(y)$ [$f(x) \geq f(y)$]; una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice monotona strettamente crescente [decrescente] se $\forall x < y$ in $E, f(x) < f(y)$ [$f(x) > f(y)$].

Proposizione 1.16 Sia $K \subset \mathbb{R}$ un insieme compatto, siano f_n (per $n \geq 0$) e f funzioni continue su K e tali che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni $x \in K$. Se le f_n sono funzioni monotone crescenti per ogni n [o monotone decrescenti per ogni n] allora $f_n \rightarrow f$ uniformemente su K .

Dimostrazione Poiché $f \in C(K)$, f è uniformemente continua su K e dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ se $x, y \in K$ e $|x - y| \leq \delta$. Essendo K compatto è possibile trovare insieme a due a due disgiunti $K_1, \dots, K_M$ tali che $K_1 \cup \dots \cup K_M = K$ e $\text{diam } K_i \equiv \sup_{x, y \in K_i} |x - y| \leq \delta$; chiamiamo $a_i \equiv \inf K_i$, $b_i \equiv \sup K_i$ (poiché $K_i \subset K$ e K è chiuso, $a_i, b_i \in K$ per ogni i). Poiché $f_n \rightarrow f$ puntualmente, esiste N tale che per ogni $1 \leq i \leq M$ e per ogni $n \geq N$ si ha

$$|f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon, \quad |f_n(b_i) - f(b_i)| \leq \varepsilon.$$

Si osservi che dalla monotonia delle f_n segue la monotonia di f . Sia $x \in K$ e sia j tale che $x \in K_j$ e per ogni $n \geq N$ si ha

$$f(x) - f_n(x) \leq f(b_j) - f_n(a_j) \leq |f(b_j) - f_n(b_j)| + |f_n(b_j) - f_n(a_j)| \leq 2\varepsilon,$$

ed analogamente

$$f(x) - f_n(x) \geq f(a_j) - f_n(b_j) \geq -|f(a_j) - f_n(a_j)| - |f_n(a_j) - f_n(b_j)| \geq -2\varepsilon,$$

ovvero $|f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon$ per ogni $n \geq N$ e per ogni $x \in K$ il che prova l'asserto. Per il caso in cui le f_n sono monotone decrescenti basta applicare quanto dimostrato a $-f_n$ e $-f$. ■

C 1.20 (Equicontinuità e Teorema di Ascoli-Arzelà)

Definizione 1.17 Una successione $\{f_n\}$ di funzioni $f_n : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **equicontinua** (su E) se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$, $\forall n$, $\forall x, y \in E$ con $|x - y| < \delta$.

Alcune proprietà elementari di successioni equicontinue sono raccolte nella seguente

Proposizione 1.18 Sia $\{f_n\}$ una successione equicontinua su $E \subset \mathbb{R}$.

- (i) Se $f_n(x)$ converge $\forall x \in D$, con D denso in E , allora $f_n(x)$ converge $\forall x \in E$;
- (ii) se E è compatto e $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in E$ allora f_n converge uniformemente a f in E ;
- (iii) se E è compatto e $\sup_n \sup_x |f_n(x)| < \infty$ per ogni $x \in E$, allora $\sup_n \sup_x |f_n(x)| < \infty$.

Dimostrazione (i): Sia $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$. Dalla definizione di equicontinuità segue che

$$\exists \delta > 0 : |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \quad \forall x, y \in E \text{ con } |x - y| < \delta. \quad (1.19)$$

Poiché D è denso in E esiste $\bar{x} \in D$ tale che $|\bar{x} - x_0| < \delta$. Sia $N \geq 1$ tale che $|f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| < \varepsilon/3$ per ogni $n, m \geq N$ (criterio di Cauchy per la successione convergente $\{f_n(\bar{x})\}$). Allora, per ogni $n, m \geq N$,

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq |f_n(x_0) - f_n(\bar{x})| + |f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| + |f_m(\bar{x}) - f_m(x_0)| < \varepsilon,$$

il che significa che $\{f_n(x_0)\}$ è una successione di Cauchy e quindi convergente.

(ii): Dato $\varepsilon > 0$ sia δ come in (1.19) e si osservi che prendendo il limite per $n \rightarrow \infty$ si ha anche che $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3$. Poiché E è compatto si possono trovare k intervalli aperti B_i di centro $x^{(i)} \in E$ di lunghezza 2δ tali che $E \subset B_1 \cup \dots \cup B_k$. Poiché f_n converge puntualmente su E , esiste N tale che $|f_n(x^{(i)}) - f(x^{(i)})| < \varepsilon/3$ per ogni $n \geq N$ e per ogni $1 \leq i \leq k$. Dato un qualunque punto $x \in E$ esiste un $1 \leq j \leq k$ tale che $x \in B_j$ e quindi $|x - x^{(j)}| < \delta$. Dunque, per ogni $n \geq N$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x^{(j)})| + |f_n(x^{(j)}) - f(x^{(j)})| + |f(x^{(j)}) - f(x)| < \varepsilon.$$

(iii): Dato ε siano $\delta, B_1, \dots, B_k$ come qui sopra. Sia $M \equiv \sup_{1 \leq i \leq k} \sup_n |f_n(x^{(i)})|$. Sia x un qualunque punto in E e sia (come sopra) j tale che $|x - x^{(j)}| < \delta$. Allora per ogni n

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x^{(j)})| + |f_n(x^{(j)})| \leq \frac{\varepsilon}{3} + M,$$

da cui segue anche (iii). ■

Teorema 1.19 (Ascoli, Arzelà) Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme compatto e sia $\{f_n\}$ una successione equicontinua di funzioni su E tali che $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ per ogni $x \in E$. Allora esiste una successione $\{n_k\}$ di interi tali che f_{n_k} converge uniformemente su E .

Lemma 1.20 (Trucco diagonale di Cantor) Siano $a_n^{(j)}$ numeri reali (con $n, j \in \mathbb{N}$) tali che $\sup_{n,j} |a_n^{(j)}| < \infty$. Allora esiste una successione di interi n_k tale che le successioni $\{a_{n_k}^{(j)}\}_{k \geq 0}$ convergono per ogni j .

Dimostrazione Poiché $\{a_n^{(1)}\}$ è limitata esiste una successione $\{n_k^{(1)}\}$ tale che $a_{n_k^{(1)}}^{(1)}$ converge; analogamente essendo $\{a_{n_k^{(1)}}^{(2)}\}$ limitata esiste una sottosuccessione $\{n_k^{(2)}\}$ di $\{n_k^{(1)}\}$ tale che $a_{n_k^{(2)}}^{(2)}$ converge; proseguendo indefinitivamente in tal modo si ottengono successioni di interi $\{n_k^{(i)}\}$ tali che: (a) $\{n_k^{(i+1)}\}_{k \geq 0}$ è una sottosuccessione di $\{n_k^{(i)}\}_{k \geq 0}$; (b) $a_{n_k^{(i)}}^{(j)}$ converge (per $k \rightarrow \infty$) per ogni $1 \leq j \leq i$. Definendo $n_k \equiv n_k^{(k)}$ si ha l'asserto (infatti, per ogni j , $\{n_j, n_{j+1}, \dots\}$ è una sottosuccessione di $\{n_k^{(j)}\}$). ■

Dimostrazione (del Teorema di Ascoli-Arzelà) Sia $D \equiv \{r_j : j \in \mathbb{N}\}$ una numerazione dei razionali in E (cosicché D è denso in E). Dal punto (iii) della Proposizione 1.18 segue che esiste M tale che $|f_n(x)| \leq M$ per ogni n e per ogni $x \in E$. Applicando il Lemma 1.20 con $a_n^{(j)} \equiv f_n(r_j)$ si ha che esiste una successione $\{n_k\}$ tale che $f_{n_k}(r_j)$ converge (per $k \rightarrow \infty$) per ogni $r_j \in D$. Dal punto (i) della Proposizione segue che $f_{n_k}(x)$ converge per ogni $x \in E$ e per il punto (ii) della Proposizione la convergenza è uniforme in E . ■

E 1.21 Sia E la chiusura di un aperto limitato A e sia, per $n \geq 0$, $f_n \in C(E) \cap C^1(A)$. Si dimostri che se $\sup_{\substack{x \in (a,b) \\ n \geq 0}} |f'_n(x)| < \infty$ allora $\{f_n\}$ è una successione equicontinua su E .

E 1.22 Sia $f_n(x) \equiv \cos(x \operatorname{sen} n)$.

- (i) Dimostrare che $\{f_n\}$ è equicontinua su $[-a, a]$ per ogni $a > 0$.
(ii) Trovare infinite successioni $\{n_k^{(i)}\}_{k \geq 0}$ tali che $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k^{(i)}} = f^{(i)}$ uniformemente in $[-a, a]$ con $f^{(i)} \neq f^{(j)}$ se $i \neq j$.

C 1.23 (Operatori alle differenze finite) Sia E un aperto di $\mathbb{R}$ e sia $u \in C^1(E)$.

- (i) Dimostrare che per ogni x, a, b tali che $[a+x, b+x] \subset E$ si ha

$$\frac{d}{dx} \int_a^b u(x+t) dt = \int_a^b u'(x+t) dt. \quad (1.20)$$

- (ii) Fissiamo tre numeri α, β, r tali che $0 < r < \beta - \alpha$ e tali che $[\alpha - r, \beta + r] \subset E$. Definiamo ora un "operatore" D_h che, dato un numero $h \neq 0$ con $|h| \leq r$, associi alla funzione u la funzione $D_h u$ che assume in $x \in [\alpha, \beta]$ il valore

$$D_h u(x) \equiv \frac{u(x+h) - u(x)}{h}. \quad (1.21)$$

L'operatore D_h si chiama **operatore alle differenze finite**. L'analogia con l'operatore di derivata, $D \equiv \frac{d}{dx}$, è evidente: dalla definizione di derivata e dalle ipotesi su u segue che

$$\lim_{h \rightarrow 0} D_h u(x) = u'(x) \equiv Du(x), \quad \forall x \in [\alpha, \beta]. \quad (1.22)$$

- (iii) L'osservazione fatta al punto (ii) si generalizza ad ordine n come segue. Assumiamo $u \in C^n(E)$ e definiamo iterativamente l'operatore alle differenze finite di ordine p , per $1 \leq p \leq n$ e per $|h| \leq \frac{r}{n}$, come

$$D_h^p u(x) \equiv D_h(D_h^{p-1} u)(x); \quad (1.23)$$

cioè

$$\begin{aligned} D_h^2 u(x) &= \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)}{h^2}, \\ D_h^3 u(x) &= \frac{u(x+3h) - 3u(x+2h) + 3u(x+h) - u(x)}{h^3}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

e così via. Dimostrare che

$$\lim_{h \rightarrow 0} D_h^p u(x) = u^{(p)}(x), \quad \forall 1 \leq p \leq n, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]. \quad (1.25)$$

- (iv) Si dimostri che

$$D_h^p u(x) = \frac{1}{h^p} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} (-1)^j u(x + (p-j)h). \quad (1.26)$$

E 1.24* (Una funzione $C(\mathbb{R})$ mai derivabile) Diamo un esempio (dovuto a van der Waerden) di una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ (periodica di periodo 1) ma che non ammette derivata in alcun punto. Sia $\rho(x) \equiv \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ la funzione che ad un numero reale x associa la sua distanza minima dagli interi. La funzione di van der Waerden è definita come

$$f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(10^n x)}{10^n}. \quad (1.27)$$

Chiaramente, poichè $0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}$, la serie in (1.27) converge totalmente e quindi il suo limite f è una funzione continua. Facciamo ora vedere che f non è derivabile in alcun punto. Poiché f è periodica di periodo 1, cioè $f(x+1) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$, (lo si dimostri), basterà far vedere che f non è derivabile per un qualunque $x \in [0, 1)$. Fissiamo dunque un tale x e sia $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ il suo sviluppo decimale, cioè a_i sono numeri interi tra 0 e 9 e $x = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{10^n}$. Per ogni intero n definiamo le seguenti quantità

$$\begin{aligned} x_n &\equiv 0, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots, & \varepsilon_n &\equiv \begin{cases} -1 & \text{se } a_n = 4 \text{ oppure } a_n = 9 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}, \\ h_n &\equiv \varepsilon_n 10^{-n}, & \bar{\varepsilon}_n &\equiv \begin{cases} 1 & \text{se } a_{n+1} \leq 4 \\ -1 & \text{se } a_{n+1} \geq 5 \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Si ha allora (lo si dimostri!)

$$\rho(10^n(x+h_m)) - \rho(10^n x) = \rho(x_n + \varepsilon_m 10^{n-m}) - \rho(x_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \geq m \\ \bar{\varepsilon}_n \varepsilon_m 10^{n-m} & \text{se } n < m \end{cases}. \quad (1.29)$$

[Per la prima uguaglianza, si noti che $10^n x = p + x_n$ per un qualche intero p e si ricordi che ρ è periodica di periodo 1. Per la seconda uguaglianza si noti che se $a_{n+1} \leq 4$ allora x_n e $x_n + \varepsilon_m 10^{n-m}$ appartengono all'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$, mentre se $a_{n+1} \geq 5$ allora x_n e $x_n + \varepsilon_m 10^{n-m}$ appartengono all'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$.] Quindi

$$\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} = \frac{1}{h_m} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\bar{\varepsilon}_n \varepsilon_m 10^{n-m}}{10^n} = \sum_{n=0}^{m-1} \bar{\varepsilon}_n \quad (1.30)$$

e poichè $\sum_{n=0}^{m-1} \bar{\varepsilon}_n$ non converge per $m \rightarrow \infty$ si ha l'asserto. ■

C 1.25 (Funzioni complesse di variabile reale)

Una funzione complessa di variabile reale è una funzione $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Se per ogni $x \in E$ poniamo $u(x) \equiv \operatorname{Re} f(x)$ e $v(x) \equiv \operatorname{Im} f(x)$ si che

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad (1.31)$$

dove u e v sono due funzioni da $E \subset \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$. Un esempio è dato dalla funzione

$$E(x) \equiv \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.32)$$

in tal caso $E = \mathbb{R}$, $u(x) = \cos x$ e $v(x) = \sin x$.

Le definizioni di continuità e di derivabilità di funzioni complesse di variabile reale si danno esattamente come nel caso di valori reali. Sia $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $u(x) \equiv \operatorname{Re} f(x)$ e $v(x) \equiv \operatorname{Im} f(x)$, allora:

(i) f si dice **continua** in $x_0 \in E$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E \text{ con } |x - x_0| < \delta; \quad (1.33)$$

dove $|f(x) - f(x_0)| \equiv \sqrt{(u(x) - u(x_0))^2 + (v(x) - v(x_0))^2}$; f è continua in E , $f \in C(E, \mathbb{C})$, se f è continua in ogni punto $x_0 \in E$; f è **uniformemente continua** in E se (1.33) vale per ogni $x_0 \in E$ (e la scelta di δ è indipendente da x_0);

(ii) $\alpha \in \mathbb{C}$ è il **limite** di f per x che tende a $x_0 \in E$, $\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon, \quad \forall x \in E \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta; \quad (1.34)$$

(iii) f si dice **derivabile** in x_0 punto interno di⁴ E se esiste il limite del rapporto incrementale $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$ (si noti che il rapporto incrementale è un numero complesso), tale limite, se esiste, è la **derivata** di f in x_0 e si denota con $f'(x_0)$ o con $\frac{df}{dx}(x_0)$; se $E \subset \mathbb{R}$ è aperto, $f \in C^1(E, \mathbb{C})$ significa che f è derivabile in ogni punto di E e la sua derivata $f'(x)$ è una funzione continua su E ; $f \in C^k(E, \mathbb{C})$ si definisce induttivamente come la classe delle funzioni tali che $f^{(k-1)}$ (la $(k-1)$ -esima derivata) appartiene a $C^1(E, \mathbb{C})$.

Infine, anche se non servirà direttamente in questa discussione, è opportuno dare (o ricordare) qui le definizioni relative a successioni e serie di numeri complessi:

(iv) Una successione $\{z_k\}_{k \geq 1}$ di numeri complessi si dice di **Cauchy** (o **fondamentale**) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0: \quad |z_n - z_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N. \quad (1.35)$$

Una successione $\{z_k\}_{k \geq 1}$ di numeri complessi **converge** a $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0: \quad |z_n - z_0| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N. \quad (1.36)$$

Per serie di numeri complessi $\sum_{k \geq 1} z_k$ si danno definizioni analoghe definendo una serie di Cauchy o convergente se tale è la "successione delle ridotte" $\{\sum_{j=1}^k z_j\}_{k \geq 1}$ e denotando il limite, qualora esista con $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ o anche con $\sum_{k \geq 1} z_k$.

Osservando che

$$\max\{|\alpha|, |\beta|\} \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \sqrt{2} \max\{|\alpha|, |\beta|\}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (1.37)$$

si ha che se $\{z_k\}$ è una successione di Cauchy di numeri complessi $z_k \equiv x_k + iy_k \in \mathbb{C}$ tali sono le successioni reali $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ e dunque, per la completezza di $\mathbb{R}$ esistono due numeri reali x e y tali che $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$. Sempre da (1.37) e dalle definizioni date segue allora che $z_k \rightarrow z \equiv x + iy$ e dunque $\mathbb{C}$ è uno spazio completo.

Lo studio delle funzioni complesse di variabile reale equivale sostanzialmente allo studio simultaneo di due funzioni reali di variabile reale; ad esempio si ha la seguente

Proposizione 1.21 Sia $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e sia $u(x) \equiv \operatorname{Re} f(x)$ e $v(x) \equiv \operatorname{Im} f(x)$; f è continua/derivabile in $x_0 \in E$ se e solo se u e v sono continue/derivabili in $x_0 \in E$.

⁴ x_0 è interno ad E se esiste un $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E$.

Dimostrazione Se f è continua in x_0 dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per cui vale (1.33). Da (1.37) segue allora che, per $|x - x_0| < \delta$, $\max\{|u(x) - u(x_0)|, |v(x) - v(x_0)|\} \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ e dunque u e v sono continue in x_0 . Viceversa se u e v sono continue in x_0 , dato $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere $\delta > 0$ cosicché sia $|u(x) - u(x_0)|$ che $|v(x) - v(x_0)|$ siano minori di $\varepsilon/\sqrt{2}$ qualora $x \in E$ con $|x - x_0| < \delta$. Per (1.37) si ha allora che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. L'affermazione relativa alla derivabilità si dimostra in maniera del tutto analoga. ■

In vista di tale risultato la seguente definizione non dovrebbe sorprendere:

(v) Una funzione $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **integrabile secondo Riemann** su $[a, b] \subset E$ se tali sono le funzioni reali $u \equiv \operatorname{Re} f$ e $v \equiv \operatorname{Im} f$; in tal caso si definisce l'integrale di f su $[a, b]$ come

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx . \quad (1.38)$$

Proposizione 1.22 Sia $f \in C([a, b], \mathbb{C})$. Allora comunque si scelgano, per ogni $N \geq 1$, numeri $a_0^{(N)} \equiv a < a_1^{(N)} < \dots < a_N^{(N)} \equiv b$ tali che $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_j (a_j^{(N)} - a_{j-1}^{(N)}) = 0$ e comunque si scelgano, per $1 \leq j \leq N$, numeri $x_j^{(N)} \in [a_{j-1}^{(N)}, a_j^{(N)}]$, si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N f(x_j^{(N)}) (a_j^{(N)} - a_{j-1}^{(N)}) = \int_a^b f(x) dx . \quad (1.39)$$

Si confronti tale risultato con la Proposizione 0.2 e la (0.19).

Dimostrazione Da (0.19) segue che (1.39) vale se f è sostituita da u e da v e quindi:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\equiv \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^N u(x_j^{(N)}) (a_j^{(N)} - a_{j-1}^{(N)}) + i \sum_{j=1}^N v(x_j^{(N)}) (a_j^{(N)} - a_{j-1}^{(N)}) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \left(u(x_j^{(N)}) + i v(x_j^{(N)}) \right) (a_j^{(N)} - a_{j-1}^{(N)}) \\ &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N f(x_j^{(N)}) (a_j^{(N)} - a_{j-1}^{(N)}) . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Un corollario importante di tale proposizione è:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx , \quad \forall f \in C([a, b], \mathbb{C}) . \quad (1.40)$$

Dimostrazione di (1.40). Scegliendo $a_j^{(N)}$ e $x_j^{(N)}$ come nella Proposizione 1.22 ed usando la versione complessa di (0.1) (ovvero con $x, y \in \mathbb{C}$; si veda l'Osservazione 0.1) si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^N f(x_j^{(N)}) (a_j^{(N)} - a_{j-1}^{(N)}) \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \left| f(x_j^{(N)}) \right| (a_j^{(N)} - a_{j-1}^{(N)}) \\ &= \int_a^b |f(x)| dx . \end{aligned}$$

Osservazione 1.23 Dalle definizioni e dai risultati sopra esposti segue che il Teorema fondamentale del calcolo e (quindi) l'integrazione per parti si estendono immediatamente a funzioni complesse di variabili reali:

Se $f \in C((a, b), \mathbb{C})$ e $a < x_0 < b$, allora la funzione $F(x) \equiv \int_{x_0}^x f(x) dx$ è di classe $C^1((a, b), \mathbb{C})$ e $F'(x) = f(x)$; se $f, g \in C^1([a, b], \mathbb{C})$ allora

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg' \equiv f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'dx. \quad (1.41)$$

Ad esempio, se $E(x)$ è la funzione definita in (1.32) e $n \in \mathbb{Z}$, la funzione $E(nx)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e si ha $E'(nx) = (\cos nx)' + i(\sin nx)' = inE(nx)$ da cui, se $n \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} E(nx) dx = \left[\frac{E(nx)}{in} \right]_0^{2\pi} = \frac{E(n2\pi) - 1}{in} = 0. \quad (1.42)$$

C 1.26 (Serie e successioni di funzioni complesse di variabile reale)

Grazie alla discussione fatta in 1.25 si può rileggere tutto il § 1 assumendo che le funzioni, serie di funzioni e successioni di funzioni ivi trattate siano funzioni complesse di variabile reale: le definizioni, gli enunciati dei teoremi *assieme alle loro dimostrazioni* continuano a valere nel caso di funzioni a valori complessi.

Come esempio si consideri la funzione $E(x)$ definita in (1.32) e si consideri la successione di funzioni $\{u_n\}$ con $u_n(x) \equiv \frac{i^n}{n^3} E(nx)$, per $n \geq 1$. Poiché $|E(nx)| = 1$ per ogni n , $\sum_{n \geq 1} \sup_{\mathbb{R}} |u_n| \leq \sum_{n \geq 1} 1/n^3 < \infty$ e quindi $\sum u_n$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ (Definizione 1.7 nel caso complesso) e quindi la serie converge uniformemente e, per il Teorema 1.4, la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$ ad una funzione $u \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; infatti, poiché $\sum \sup_{\mathbb{R}} |u'_n| \leq \sum 1/n^2 < \infty$, la funzione $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (Teorema 1.6).

2 Serie di potenze

2.1 Raggio di convergenza e proprietà elementari

Si consideri la “serie di potenze” $\sum_{n \geq 0} a_n(x-x_0)^n$ dove x è una variabile reale e x_0 e a_n sono numeri reali dati. Il problema è studiare la convergenza della successione $\sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n$ per $N \rightarrow \infty$ per valori di x in un intorno di x_0 .

Teorema 2.1 (Del raggio di convergenza)

Sia $R^{-1} \equiv \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ (con la convenzione che R si definisce 0 se il limite superiore è $+\infty$ ed R si definisce $+\infty$ se il limite superiore è 0). La serie $\sum a_n(x-x_0)^n$ converge assolutamente se $|x-x_0| < R$ e non converge se $|x-x_0| > R$.

Dimostrazione Si ha:

$$\limsup (|a_n| |x-x_0|^n)^{\frac{1}{n}} = |x-x_0| \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = |x-x_0| \frac{1}{R}$$

e il teorema segue dal criterio della radice per serie numeriche¹. ■

Definizione 2.2 Data una serie di potenze $f = \sum a_n(x-x_0)^n$, indicheremo con $\rho(f)$ il suo raggio di convergenza.

Esempio 2.3 E' immediato verificare che²

$$(1) \quad \rho\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}\right) = \infty, \quad (2) \quad \rho\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n\right) = 0, \quad (3) \quad \rho\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha x^n\right) = 1$$

e, nel caso (3), per $\alpha = 0$ la serie non converge per $|x| = 1$, per $\alpha < -1$ la serie converge per ogni $|x| = 1$, e per $-1 \leq \alpha < 0$ la serie diverge per $x = 1$ e converge per $x = -1$ (criterio di Leibnitz). Quindi, la convergenza per $|x-x_0|$ uguale al raggio di convergenza va discussa di volta in volta.

Osservazione 2.4 Per ogni $r < \rho(f)$ la serie $\sum a_n(x-x_0)^n$ converge totalmente per $|x-x_0| \leq r$.

¹Si ricorda il criterio della radice per serie numeriche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: se $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente; se $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge.

²Qui $x_0 = 0$.

Possiamo quindi applicare i risultati del Capitolo 1. Consideriamo le serie ottenute derivando termine a termine la serie f :

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((x - x_0)^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x - x_0)^n, \\ f_k &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((x - x_0)^n)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) (x - x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} (x - x_0)^n, \quad (k \geq 2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Poiché $\limsup_{n \rightarrow \infty} (n+h)^{\frac{1}{n}} = 1$ per ogni h , si vede immediatamente che $\rho(f_k) = \rho(f)$ per ogni $k \geq 1$. Analogamente se consideriamo le serie ottenute integrando termine a termine la serie f :

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^x (t - x_0)^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x - x_0)^n, \\ F_k &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_{n-k}}{n(n-1) \cdots (n-k+1)} (x - x_0)^n, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

si vede subito che $\rho(F_k) = \rho(f)$ per ogni $k \geq 1$. Quindi dai Teoremi 1.6 e 1.5 e dall'osservazione 2.4 segue immediatamente il seguente risultato.

Teorema 2.5 *Sia $f = \sum a_n (x - x_0)^n$ e siano f_k e F_k le serie di potenze definite in (2.1) e (2.2). Se R è il raggio di convergenza della serie f , si ha $\rho(f_k) = R = \rho(F_k)$ (per ogni $k \geq 1$) ed inoltre f è una funzione $C^\infty(\{x : |x - x_0| < R\})$ e valgono le relazioni*

$$f^{(k)} = f_k, \quad (k \geq 1), \quad \int_{x_0}^x f(t) dt = F_1(x), \dots, \int_{x_0}^x F_{k-1}(t) dt = F_k(x), \quad (k \geq 2).$$

Come applicazione consideriamo il seguente

Esempio 2.6 Sappiamo che la serie geometrica di ragione x con $|x| < 1$ ha somma $(1 - x)^{-1}$ cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}. \quad (2.3)$$

Derivando k volte la funzione $(1 - x)^{-1}$ si ottiene

$$\frac{d^k}{dx^k} \frac{1}{1 - x} = \frac{k!}{(1 - x)^{k+1}}. \quad (2.4)$$

Dunque, da (2.1), da (2.4) e dal Teorema 2.5 otteniamo la relazione

$$\frac{k!}{(1 - x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n \quad (2.5)$$

ovvero

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n, \quad (2.6)$$

che dunque rappresenta l'espansione in serie della funzione $(1-x)^{-(k+1)}$.

Osservazione 2.7 (i) Sia $f(x) \equiv \sum_{n \geq 0} a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Dal Teorema 2.5 sappiamo che $f \in C^\infty(\{x : |x-x_0| < R\})$ e calcolando la k -esima derivata in $x = x_0$ otteniamo

$$f^{(k)}(x_0) = a_k k!, \quad \text{cioè} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (n \geq 0). \quad (2.7)$$

(ii) Se $f = \sum a_n(x-x_0)^n$ e $g = \sum b_n(x-x_0)^n$ sono due serie di potenze convergenti per $|x-x_0| < r$ e se $f(x) = g(x)$ per ogni $|x-x_0| < r$, chiaramente $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$ per ogni $n \geq 0$. Quindi da (2.7) segue che $a_n = b_n$ per ogni $n \geq 0$. Riassumendo: *due serie di potenze hanno la stessa somma nell'intorno di un punto se e solo se hanno tutti i coefficienti coincidenti.*

La convergenza di una serie di potenze si caratterizza facilmente in termini del tasso di crescita dei suoi coefficienti:

Teorema 2.8 *Se la serie di potenze $\sum a_n(x-x_0)^n$ ha raggio di convergenza R positivo allora, per ogni $r < R$ esiste $M > 0$ tale che*

$$|a_n| \leq M r^{-n}, \quad \forall n \geq 0. \quad (2.8)$$

Viceversa se vale (2.8), allora la serie di potenze $\sum a_n(x-x_0)^n$ ha raggio di convergenza $R \geq r$.

Dimostrazione Assumiamo che $\sum a_n(x-x_0)^n$ abbia raggio di convergenza $R > 0$. Dalla definizione di R (e dalla definizione di estremo superiore) segue che per ogni $r < R$ esiste $N > 0$ tale che se $n \geq N$ allora $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq r^{-1}$ ovvero $|a_n| \leq r^{-n}$. Quindi (2.8) vale se scegliamo

$$M_0 \equiv \max_{0 \leq n \leq N} |a_n| r^n, \quad \text{e} \quad M \equiv \max\{M_0, 1\}. \quad (2.9)$$

Assumiamo ora che valga (2.8) ovvero (prendendo la radice n -esima) $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}} r^{-1}$. Prendendo il limite superiore per n che tende ad ∞ di tale relazione otteniamo immediatamente che $R^{-1} \leq r^{-1}$ ovvero che il raggio di convergenza R di $\sum a_n(x-x_0)^n$ verifica $R \geq r > 0$. ■

Il "comportamento" di una serie di potenze $\sum a_n(x-x_0)^n$ attorno a x_0 è legato al primo coefficiente non nullo.

Proposizione 2.9 Sia $m \geq 0$, sia $u = \sum_{n \geq m} a_n (x - x_0)^n$ con $a_m \neq 0$ una serie di potenze con raggio di convergenza positivo. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r_0 > 0$ tale che

$$(1 - \varepsilon)|a_m||x - x_0|^m \leq \left| \sum_{n \geq m} a_n (x - x_0)^n \right| \leq (1 + \varepsilon)|a_m||x - x_0|^m, \quad \forall |x - x_0| \leq r_0. \quad (2.10)$$

Dimostrazione Poniamo $y \equiv x - x_0$. Per il Teorema 2.8 esistono M, r tali che (2.8) vale. Allora, per ogni $|y| < r$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq m} a_n y^n - a_m y^m \right| &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| |y|^n \leq M \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{|y|}{r} \right)^n \\ &= |a_m| |y|^m \left(\frac{M}{|a_m| r^m} \frac{|y|}{r - |y|} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se ora imponiamo che $|y|$ sia così piccolo che la quantità in parentesi nell'ultima riga di (2.11) sia minore o uguale ad ε otteniamo l'asserto. E' immediato verificare che ciò si ottiene richiedendo che $|y| \leq r_0$ con

$$r_0 \equiv \frac{\varepsilon r^{m+1} |a_m|}{M + \varepsilon r^m |a_m|}. \quad \blacksquare \quad (2.12)$$

2.2 Principio di identità

Il "principio di identità" per serie di potenze asserisce che una serie di potenze è univocamente determinata dai valori che essa assume su di una successione convergente (costituita da un numero infinito di punti). Per dimostrare tale risultato, è utile capire come varia la forma di una serie di potenze al variare del "centro di espansione" x_0 .

Proposizione 2.10 Sia $u(x) \equiv \sum a_n (x - x_0)^n$ una serie di potenze tale che $|a_n| \leq M R^{-n}$ (e quindi convergente per $|x - x_0| < R$). Sia x'_0 un punto tale che $\delta \equiv |x'_0 - x_0| < R$, sia $R' \equiv R - \delta$ e si consideri la serie di potenze $v(x) \equiv \sum a'_n (x - x'_0)^n$ con

$$a'_n \equiv \frac{u^{(n)}(x'_0)}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n+m} \binom{n+m}{n} (x'_0 - x_0)^m. \quad (2.13)$$

Allora, v converge su $\{x : |x - x'_0| < R'\}$ e su tale insieme $v(x) = u(x)$.

In altri termini v è l'espansione attorno al centro x'_0 della serie di potenze u (data in termini della sua espansione attorno al punto x_0). Nella dimostrazione di tale proposizione faremo uso del seguente risultato interessante di per sé.

Proposizione 2.11 (Serie bidimensionali) Siano a_{nk} numeri complessi dati (con $n = 0, 1, 2, \dots$ e $k = 0, 1, 2, \dots$) e assumiamo che esista $S > 0$ tale che, per ogni intero positivo K ed N ,

$$\sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N |a_{nk}| \equiv \sum_{k=0}^K \left(\sum_{n=0}^N |a_{nk}| \right) \leq S . \quad (2.14)$$

Si ha allora³

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \right) . \quad (2.15)$$

Inoltre, se $s \in \mathbb{C}$ denota uno dei valori delle due somme doppie in (2.15) si ha anche che, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, esiste un intero positivo N_0 tale che, per ogni K ed N maggiori di N_0 ,

$$\left| \sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N a_{nk} - s \right| \leq \varepsilon . \quad (2.16)$$

Dimostrazione Si osservi che la (2.14) è chiaramente equivalente a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| \equiv \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N |a_{nk}| \right) \leq S , \quad (2.17)$$

ed inoltre, poiché

$$\sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N |a_{nk}| = \sum_{k=0}^N \sum_{n=0}^K |a_{nk}| , \quad (2.18)$$

la (2.14) è anche equivalente a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \left(\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K |a_{nk}| \right) \leq S . \quad (2.19)$$

Dimostriamo ora la (2.16) da cui seguirà immediatamente la (2.15). Da quanto appena osservato segue che esiste $s \in \mathbb{C}$ tale che

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \equiv \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_{nk} \right) . \quad (2.20)$$

Inoltre (sempre per la stessa osservazione) si ha che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste N_0 tale che

$$\sum_{k=K}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq \varepsilon , \quad \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq \varepsilon , \quad \forall K, N \geq N_0 . \quad (2.21)$$

³La (2.15) significa che per ogni k la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}$ converge ad un numero α_k , che per ogni n la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ converge ad un numero β_n ed infine che le serie $\sum \alpha_k$ e $\sum \beta_n$ convergono allo stesso numero (per la definizione di convergenza di successioni e serie di numeri complessi si veda 1.25 punto (iv).)

Dunque⁴

$$\sum_{k=K}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq \varepsilon, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} |a_{nk}| \leq \varepsilon, \quad \forall K, N \geq N_0. \quad (2.22)$$

Quindi, se K e N sono due interi maggiori di N_0 , dalla (2.22) otteniamo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N a_{nk} - s \right| &= \left| \sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N a_{nk} - \sum_{k \leq K} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k > K} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \right| \\ &= \left| \sum_{k \leq K} \sum_{n > N} a_{nk} + \sum_{k > K} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n > N} |a_{nk}| + \sum_{k > K} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Questo dimostra la (2.16). Naturalmente, in maniera del tutto analoga, usando la (2.19) al posto della (2.17) si ottiene la (2.16) con $s' \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ al posto di s ; scambiando le somme in (2.16) e prendendo prima il limite per $K \rightarrow \infty$ e poi quello per $N \rightarrow \infty$ si ha che $|s - s'| \leq \varepsilon$ e dunque (essendo ε arbitrario) $s = s'$, il che equivale alla validità della (2.15). ■

Dimostrazione (della Proposizione 2.10) Facciamo innanzitutto vedere che vale la seguente stima sui coefficienti a'_n :

$$|a'_n| \leq M' (R')^{-n}, \quad \text{con } M' \equiv M \frac{R}{R'}, \quad (2.24)$$

dalla quale stima (e dal Teorema 2.8) segue che v converge per $|x - x'_0| < R'$. Per dimostrare (2.24) osserviamo che da (2.6), dalle definizioni di a'_n e δ segue che

$$\begin{aligned} |a'_n| &\leq \frac{M}{R^n} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} \left(\frac{\delta}{R} \right)^m \\ &= \frac{M}{R^n} \left(\frac{R}{R - \delta} \right)^{n+1} \equiv \frac{M'}{R'^n}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ora, se $|x - x'_0| < R'$ (e quindi $|x - x_0| < R$), abbiamo

$$\begin{aligned} \sum a_n (x - x_0)^n &= \sum a_n (x - x'_0 + x'_0 - x_0)^n \\ &= \sum a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x - x'_0)^k (x'_0 - x_0)^{n-k} \end{aligned}$$

⁴Infatti, per ogni $N_1 > N$ e $K \geq 0$, $\sum_{k=0}^K \sum_{n=N}^{N_1} |a_{nk}| = \sum_{n=N}^{N_1} \sum_{k=0}^K |a_{nk}| \leq \varepsilon$ e la seconda delle (2.22) si ottiene prendendo prima il limite per $N_1 \rightarrow \infty$ e poi per $K \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^N a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x - x'_0)^k (x'_0 - x_0)^{n-k} \right] \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \left(\sum_{n=k}^N a_n \binom{n}{k} (x'_0 - x_0)^{n-k} \right) (x - x'_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a'_k (x - x'_0)^k \tag{2.26}
\end{aligned}$$

che è quanto si voleva dimostrare; nella ultima uguaglianza abbiamo usato il Lemma 2.11 (ed esattamente la seconda parte del lemma con $K = N$). ■

Teorema 2.12 (Principio di identità per serie di potenze)

Si considerino due serie di potenze, $u = \sum a_n(x - x_0)^n$ e $v = \sum b_n(x - x_0)^n$, convergenti per $x \in E \equiv \{x : |x - x_0| < R\}$; sia $x'_0 \in E$ e sia $\{x_k\}$ una successione in E convergente a x'_0 con $x_k \neq x'_0$ per ogni k . Se $u(x_k) = v(x_k)$ per un numero infinito di k , allora $u(x) = v(x)$ per ogni $x \in E$.

Dimostrazione Consideriamo l'espansione di u e v in serie di potenze attorno a x'_0 (si veda la Proposizione 2.10): $u = \sum a'_n(x - x'_0)^n$, $v = \sum b'_n(x - x'_0)^n$. Poniamo $y = x - x'_0$, $y_k \equiv x_k - x'_0$ e $w \equiv u(x'_0 + y) - v(x'_0 + y)$. Allora, $y_k \neq 0$ per ogni k e $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$ e w ha l'espansione in serie (attorno a $y = 0$ e convergente per $|y| < \delta \equiv R - |x_0 - x'_0|$) data da $w(y) = \sum c_n y^n$ con $c_n \equiv a'_n - b'_n$. Da queste definizioni e dalle ipotesi segue che $w(y_k) = 0$ per infiniti k . In base all'Osservazione 2.7, dimostrare che $u \equiv v$ su E è equivalente a dimostrare che $a_n = b_n$ per ogni n . Cominciamo col dimostrare che $c_n = 0$ per ogni n . Procediamo per assurdo assumendo che $w = \sum_{n \geq m} c_n y^n$ con $c_m \neq 0$ (per un qualche $m \geq 0$). Dalla Proposizione 2.9 (con $\varepsilon = 1/2$) segue che esiste $r > 0$ tale che $|w(y)| \geq \frac{1}{2}|c_m||y|^m$ per ogni $|y| < r$. Siano k_j gli infiniti k per cui $w(y_k) = 0$; poiché $y_k \rightarrow 0$ anche $y_{k_j} \rightarrow 0$ ed esisterà un j_0 tale che per ogni $j \geq j_0$, $|y_{k_j}| < r$. Ma allora, per $j \geq j_0$ avremmo

$$0 = |w(y_{k_j})| \geq \frac{1}{2}|c_m||y_{k_j}|^m$$

e quest'ultima quantità sarebbe diversa da zero poiché per ipotesi $y_k \neq 0$ per ogni k e questa sarebbe una contraddizione. Dunque $c_n \equiv 0$ per ogni n , il che significa che $a'_n = b'_n$ per ogni n e quindi $u(x) = v(x)$ per ogni $x \in E' \equiv \{x : |x - x'_0| < \delta\}$. Se $x_0 \in E'$, ancora per l'Osservazione 2.7, si ha che $a_n = b_n$ per ogni n e cioè $u \equiv v$ su tutto l'insieme E ; se $x_0 \notin E'$ procediamo come segue. Sia x_1 tale che $|x_1 - x'_0| = \frac{\delta}{2}$ e $|x_1 - x_0| = |x_0 - x'_0| - \frac{\delta}{2}$. Per gli argomenti già usati, essendo tutte le derivate di u e v uguali in x_1 , gli sviluppi in serie di u e v nell'intorno di x_1 convergono in $E'' \equiv \{x : |x - x_1| < \frac{3}{2}\delta\}$ e sono ivi coincidenti. Iterando eventualmente tale procedimento è quindi chiaro che si otterrà un insieme $\tilde{E}$ su cui u e v coincidono e che contiene x_0 e dunque u e v coincidono su tutto E . ■

2.3 Operazioni elementari con serie di potenze

In questo paragrafo stabiliremo che la somma, il prodotto, il reciproco e la composizione di serie di potenze sono ancora serie di potenze. Per semplicità di notazione discuteremo il caso in cui $x_0 = 0$.

Proposizione 2.13 *Siano $u = \sum a_n x^n$ e $v = \sum b_n x^n$ due serie di potenze con raggio di convergenza, (rispettivamente) $\rho(u)$ e $\rho(v)$, positivo. Allora la serie $\sum (a_n + b_n) x^n$ è una serie di potenze convergente per $|x| < r$ con $r \equiv \min\{\rho(u), \rho(v)\}$ ed inoltre $u(x) + v(x) = \sum (a_n + b_n) x^n$ per $|x| < r$.*

Dimostrazione Denotiamo con w la serie di potenze $\sum (a_n + b_n) x^n$. Fissiamo $0 < \varepsilon < r$. Dal Teorema 2.8 segue che esiste $M > 0$ tale che

$$|a_n| \leq M(r - \varepsilon)^{-n}, |b_n| \leq M(r - \varepsilon)^{-n}, \quad (\forall n), \quad (2.27)$$

e da tale relazione segue che

$$\frac{1}{\rho(w)} = \limsup |a_n + b_n|^{\frac{1}{n}} \leq (r - \varepsilon)^{-1} \quad (2.28)$$

ovvero $\rho(w) \geq r$. Quindi le serie di potenze u, v e w convergono tutte assolutamente per $|x| < r$ e dal risultato analogo per serie numeriche⁵ segue l'asserto. ■

Si osservi che il raggio di convergenza di $\sum (a_n + b_n) x^n$ può essere strettamente maggiore sia di $\rho(u)$ che di $\rho(v)$; basti pensare al caso $a_n \equiv 1$ e $b_n \equiv -1$: $\rho(u) = \rho(v) = 1$ ma la serie $\sum (a_n + b_n) x^n$ essendo la serie banale (tutti i coefficienti uguali a zero) ha raggio di convergenza infinito.

Proposizione 2.14 *Siano $u = \sum a_n x^n$ e $v = \sum b_n x^n$ due serie di potenze (con raggio di convergenza positivo) e si consideri la serie di potenze*

$$w \equiv \sum c_n x^n, \quad \text{dove} \quad c_n \equiv a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (2.29)$$

Allora w è una serie di potenze convergente per $|x| < r$ con $r \equiv \min\{\rho(u), \rho(v)\}$ ed inoltre $u(x)v(x) = w(x)$ per $|x| < r$.

Dimostrazione Come nella Proposizione 2.13, vale (2.27); quindi dalla definizione di c_n segue immediatamente che

$$|c_n| \leq M^2(n+1)r^{-n}. \quad (2.30)$$

Dunque

$$\frac{1}{\rho(w)} = \limsup |c_n|^{\frac{1}{n}} \leq r^{-1} \limsup [M^2(n+1)]^{\frac{1}{n}} = r^{-1}$$

⁵Cioè: Se $\sum \alpha_n$ e $\sum \beta_n$ sono due serie assolutamente convergenti allora $\sum (\alpha_n + \beta_n) = \sum \alpha_n + \sum \beta_n$.

ovvero $\rho(w) \geq r > 0$. Poniamo

$$U_N(x) \equiv \sum_{n=0}^N a_n x^n, \quad V_N(x) \equiv \sum_{n=0}^N b_n x^n.$$

Allora,

$$\begin{aligned} U_N(x)V_N(x) &\equiv \left(\sum_{k=0}^N a_k x^k \right) \left(\sum_{m=0}^N b_m x^m \right) \\ &= \sum_{0 \leq k, m \leq N} a_k b_m x^{k+m} \\ &= \sum_{n=0}^{2N} x^n \left(\sum_{\substack{0 \leq k, m \leq N \\ k+m=n}} a_k b_m \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

dove la somma nella seconda riga va intesa fatta su tutte le coppie di interi k ed m non negativi e non superiori a N ; nella terza riga abbiamo espresso la somma in termini di potenze crescenti di x e la specifica sotto il secondo segno di sommatoria si legge: “su tutti gli (interi) k ed m compresi tra 0 e N e tali che la loro somma è n ”. Consideriamo più attentamente l’insieme appena descritto su cui variano gli indici di sommatoria k, m . Naturalmente possiamo esprimere m in funzione di k ponendo $m = n - k$ (cosicché il vincolo che la somma di k ed m faccia n è automaticamente verificato); bisogna però fare attenzione all’insieme su cui varia k infatti tale insieme deve essere tale che $0 \leq k \leq N$ ma anche $0 \leq n - k \equiv m \leq N$ cioè k deve essere simultaneamente maggiore di 0 e $n - N$ e deve essere minore di N ed n :

$$\max\{0, n - N\} \leq k \leq \min\{n, N\}.$$

Dunque da (2.31) segue che

$$\begin{aligned} U_N(x)V_N(x) &= \sum_{n=0}^{2N} x^n \left(\sum_{k=\max\{0, n-N\}}^{\min\{n, N\}} a_k b_{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^N c_n x^n + S_N(x), \quad \text{con} \quad S_N(x) \equiv \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k=n-N}^N a_k b_{n-k} x^n. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ripetendo il ragionamento che ha portato a (2.30), vediamo che, per ogni n compreso tra $N + 1$ e $2N$, si ha

$$\left| \sum_{k=n-N}^N a_k b_{n-k} \right| \leq M^2(N+1)r^{-n}, \quad (2.33)$$

e quindi, se $|x| < r$, si ha che $|S_N(x)| \rightarrow 0$ (quando $N \rightarrow \infty$). Ed allora (per $|x| < r$)

$$u(x)v(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} U_N(x)V_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \equiv w(x). \quad \blacksquare$$

Corollario 2.15 Sia $v = \sum a_n x^n$ una serie di potenze tale che $|a_n| \leq Mr^{-n}$ (cosicché $\rho(v) \geq r$). Allora v^m è una serie di potenze convergente per $|x| < r$ e se denotiamo con $a_n^{(m)}$ i suoi coefficienti, cioè

$$v^m(x) \equiv v(x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n, \quad (2.34)$$

allora, per ogni $\alpha > 1$ si ha

$$|a_n^{(m)}| \leq \left(\frac{M\alpha}{\alpha-1} \right)^m \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{-n}. \quad (2.35)$$

Dimostrazione Dalla proposizione precedente segue che $\rho(v^2) \geq \rho(v) \geq r$ e iterando $\rho(v^m) \geq r$. Inoltre, poiché $v^m = v^{m-1}v$, dalla Proposizione 2.14, vediamo che i coefficienti di v^m sono legati a quelli di v^{m-1} da

$$a_n^{(m)} = \sum_{k=0}^n a_k^{(m-1)} a_{n-k}. \quad (2.36)$$

Dimostriamo (2.35) per induzione su m . Per $m = 1$ l'asserto è chiaramente vero. Supponiamo ora che l'asserto sia vero per $1, \dots, m-1$. Da (2.36) segue che

$$\begin{aligned} |a_n^{(m)}| &\leq \left(\frac{M\alpha}{\alpha-1} \right)^{m-1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{-k} Mr^{-(n-k)} \\ &= \left(\frac{M\alpha}{\alpha-1} \right)^{m-1} \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{-n} \frac{M}{\alpha^n} \sum_{k=0}^n \alpha^k \\ &= \left(\frac{M\alpha}{\alpha-1} \right)^{m-1} \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{-n} \frac{M}{\alpha^n} \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} \\ &\leq \left(\frac{M\alpha}{\alpha-1} \right)^{m-1} \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{-n} \frac{M\alpha}{\alpha-1} = \left(\frac{M\alpha}{\alpha-1} \right)^m \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{-n}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposizione 2.16 Sia $u = \sum a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza positivo e tale che $u(0) \neq 0$ (cioè $a_0 \neq 0$). Allora $\frac{1}{u} = \sum b_n x^n$ è una serie di potenze con raggio di convergenza positivo. Inoltre, i coefficienti b_n si possono determinare ricorsivamente dalle seguenti formule:

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}. \quad (2.37)$$

Dimostrazione Cominciamo col calcolare formalmente i coefficienti b_n ossia supponendo che il reciproco di u ammetta un'espansione in serie di potenze della forma $\sum b_n x^n$ determiniamo i b_n dalla relazione di reciprocità

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) = 1. \quad (2.38)$$

Ricordando dalla Proposizione 2.14 la regola che determina i coefficienti c_n della serie di potenze prodotto, ossia $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, e ricordando che due serie di potenze hanno la stessa somma se e solo se hanno tutti i coefficienti uguali (notando anche che 1 è la serie di potenze banale che ha il primo coefficiente uguale ad 1 e tutti gli altri uguali a 0) otteniamo immediatamente le relazioni (2.37). Cambiamo ora punto di vista e *definiamo* i numeri b_n ricorsivamente tramite (2.37) e dimostriamo per induzione che esistono $\bar{M}, \bar{r} > 0$ tali che $|b_n| \leq \bar{M} \bar{r}^{-n}$. Poiché u è una serie di potenze con $\rho(u) > 0$ esistono $M, r > 0$ tali che $|a_n| \leq M r^{-n}$. Definiamo

$$\bar{M} \equiv \frac{1}{|a_0|}, \quad \bar{r} \equiv r \frac{|a_0|}{M + |a_0|}. \quad (2.39)$$

Chiaramente $|b_0| \leq \bar{M}$ (infatti vale il segno di uguaglianza). Assumiamo ora l'asserto vero per $0, \dots, n-1$. Allora, usando (2.37) e l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq \frac{1}{|a_0|} \sum_{k=1}^n M r^{-k} \bar{M} \bar{r}^{-n+k} \\ &= \frac{\bar{M} M}{|a_0|} \bar{r}^{-n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^k \\ &\leq \bar{M} \bar{r}^{-n} \left(\frac{M}{|a_0|} \frac{\bar{r}}{r} \frac{1}{1 - \frac{\bar{r}}{r}} \right), \end{aligned} \quad (2.40)$$

ma dalla definizione di $\bar{r}$ segue che la quantità tra parentesi nell'ultima riga di (2.40) è uguale ad 1 e quindi l'asserto vale anche per n . Quindi $\sum b_n x^n$ è una serie di potenze con raggio di convergenza superiore a $\bar{r}$. Dunque possiamo ripetere gli argomenti dell'inizio della dimostrazione e verificare che vale (2.38) e quindi che la serie di potenze $\sum b_n x^n$ è effettivamente il reciproco di $u(x)$. ■

Proposizione 2.17 *Siano $u = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ e $v = \sum_{n \geq 1} b_n x^n$ due serie di potenze con raggio di convergenza positivo. Allora la funzione composta $u \circ v$ è una serie di potenze, $\sum c_n x^n$, con raggio di convergenza positivo. Infatti, se $|a_n|$ e $|b_n|$ sono minori o uguali di $M r^{-n}$ (per qualche $M, r > 0$) allora la serie di potenze $\sum c_n x^n$ converge per $|x| < r'$ con*

$$r' \equiv \frac{r}{2} \min\left\{1, \frac{r}{2M}\right\}. \quad (2.41)$$

Infine se $b_k^{(n)}$ denota il k -esimo coefficiente della serie di potenze v^n , allora i coefficienti c_k sono dati da:

$$c_0 \equiv a_0, \quad c_k \equiv \sum_{n=1}^k a_n b_k^{(n)}, \quad (\forall k \geq 1). \quad (2.42)$$

Dimostrazione Poiché $v(0) = 0$, se $|x|$ è sufficientemente piccolo, $|v(x)| < r$ e quindi

$$u \circ v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v(x)^n = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n v(x)^n. \quad (2.43)$$

Ricordando il Corollario 2.15, scriviamo

$$v^n(x) = \sum_{k \geq n} b_k^{(n)} x^k \quad (2.44)$$

(si noti che ora la somma parte da n poiché $b_0 = 0$). Scegliendo $\alpha = 2$, segue da (2.35) che⁶

$$|b_k^{(n)}| \leq (2M)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{-k}. \quad (2.45)$$

Ora se $|x| < r'$ si ha che

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n \sum_{k \geq n} b_k^{(n)} x^k &\leq \sum_{n \geq 1} M r^{-n} \sum_{k \geq n} (2M)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{-k} |x|^k \\ &= \frac{M}{1 - \frac{2|x|}{r}} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{4M|x|}{r^2}\right)^n < \infty. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Dunque per il Lemma 2.11 si ha che (per $|x| < r'$)

$$\begin{aligned} u \circ v(x) &= a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \sum_{k \geq n} b_k^{(n)} x^k \\ &= a_0 + \sum_{k \geq 1} x^k \sum_{n=1}^k a_n b_k^{(n)} \equiv \sum_{n \geq 0} c_n x^n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 2.18 (i) Nel caso di sviluppi in serie attorno ad un punto generico x_0 , basterà sostituire, in generale, x con $x - x_0$ e 0 (quando è argomento di funzioni) con x_0 . Il caso della Proposizione 2.17 è leggermente più complesso: supponiamo che $u = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ e $v = \sum_{n \geq 0} b_n (x - x_1)^n$. Affinché abbia senso la composizione $u \circ v$ si dovrà avere che $v(x_1) = x_0$ cioè che $b_0 = x_0$. Per ridurci al caso trattato nella Proposizione 2.17 basta porre $\tilde{u}(x) \equiv u(x_0 + x)$, $\tilde{v} \equiv v(x_1 + x) - x_0$ cosicché $\tilde{u} \circ \tilde{v}(x) = u \circ v(x_1 + x)$ (si veda anche l'Esercizio 2.1).

(ii) **(Inversione funzionale di serie di potenze)** Consideriamo la funzione $u(x) = \frac{x}{1-x}$: tale funzione soddisfa $u(0) = 0$ e $u'(0) = 1$ e quindi u è invertibile in un intorno di 0. Chiamiamo $x = v(y)$ la funzione inversa di u . Dalla somma della serie geometrica di ragione x con $|x| < 1$ sappiamo che $u = \sum_{n \geq 1} x^n$ ovvero che u è una serie di potenze con raggio di convergenza 1. Invertendo la relazione $y = \frac{x}{1-x}$ otteniamo immediatamente $x = \frac{y}{1+y} \equiv v(y)$. Quindi anche la funzione inversa v è espandibile in serie di potenze di centro 0 essendo $v(y) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} y^k$. Quello che accade in quest'esempio non è un accidente, vale, infatti, la seguente affermazione:

“Se $u = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ è una serie di potenze con raggio di convergenza positivo e $u'(x_0) = a_1 \neq 0$ allora la funzione inversa $v(y)$ tale che $u \circ v(y) = y$ è una serie di potenze con centro in a_0 e raggio di convergenza positivo”.

⁶Naturalmente le a vanno sostituite con b , m con n e n con k .

Sebbene non sia difficile⁷ calcolare i coefficienti b_n dello sviluppo in serie di $v = \sum b_n(y - a_0)^n$, la dimostrazione che tali coefficienti non crescano più che esponenzialmente (ossia che $|b_n| \leq Mr^{-n}$ per qualche $M, r > 0$) non è del tutto immediata: la difficoltà è dovuta al fatto che nella regola che lega b_n con $b_{n-1}, \dots, b_1$ e con gli a_n bisogna tener conto dei segni⁸.

2.4 Serie di potenze complesse. Funzione esponenziale. Funzioni trigonometriche

Consideriamo ora serie di potenze in campo complesso, ovvero consideriamo serie della forma $\sum a_n(x - x_0)^n$ con a_n, x_0 e la variabile x numeri complessi⁹. Poiché il criterio della radice vale anche per serie numeriche a coefficienti in $\mathbb{C}$, si verifica immediatamente che il Teorema 2.1 e la sua dimostrazione valgono parola per parola anche nel caso complesso. Naturalmente ora l'insieme delle x tali che $|x - x_0| < 1$ coincide con il disco aperto nel piano complesso di centro x_0 e raggio 1 (e quindi si spiega anche il nome "raggio di convergenza"). In questo paragrafo estenderemo i risultati dei paragrafi precedenti (quelli legati alla integrazione verranno discussi in seguito¹⁰).

Una serie di potenze complesse $f(z) \equiv \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ convergente nel disco complesso $D \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ definisce una funzione da $D \subset \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ ovvero una *funzione complessa di variabile complessa*. Molte delle nozioni introdotte nel caso di funzioni reali o complesse di variabile reale (quali continuità, limiti e derivate¹¹) si estendono nella maniera ovvia. Sia $f : E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

(i) f si dice **continua** in $z_0 \in E$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \quad \forall z \in E \text{ con } |z - z_0| < \delta; \quad (2.47)$$

f è continua in E , $f \in C(E, \mathbb{C})$, se f è continua in ogni punto $z_0 \in E$; f è **uniformemente continua** in E se (2.47) vale per ogni $z_0 \in E$ (e la scelta di δ è indipendente da z_0);

(ii) $\alpha \in \mathbb{C}$ è il **limite** di f per z che tende a $z_0 \in E$, $\alpha = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |f(z) - \alpha| < \varepsilon, \quad \forall z \in E \text{ con } 0 < |z - z_0| < \delta; \quad (2.48)$$

(iii) f si dice **derivabile** in z_0 punto interno¹² di E se esiste il limite del rapporto incrementale $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ per $z \rightarrow z_0$, tale limite, se esiste, è la **derivata**

⁷Esercizio 2.4.

⁸Esercizio 2.6.

⁹Di solito, per indicare serie nel campo complesso la variabile indipendente viene indicata con z e la serie ha la forma $\sum a_n(z - z_0)^n$. In questo paragrafo useremo entrambe le notazioni specificando, quando fosse necessario, se la variabile x è da intendersi reale o complessa.

¹⁰Si veda 2.9, 2.10 e 2.11.

¹¹Per l'integrazione si vedano 2.9 e 2.10.

¹² z_0 è **interno** a E se esiste un $\delta > 0$ tale che il disco aperto $\{z : |z - z_0| < \delta\} \subset E$; un insieme $E \subset \mathbb{C}$ è **aperto** se ogni suo punto è interno; un insieme $E \subset \mathbb{C}$ è **chiuso** se è il complementare di un aperto.

di f in z_0 e si denota con $f'(z_0)$ o con $\frac{df}{dz}(z_0)$:

$$f'(z_0) \equiv \frac{df}{dz}(z_0) \equiv \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} ; \quad (2.49)$$

se $E \subset \mathbb{R}$ è aperto, $f \in C^1(E, \mathbb{C})$ significa che f è derivabile in ogni punto di E e la sua derivata $f'(z)$ è una funzione continua su E (le classi $C^k(E, \mathbb{C})$ si definiscono come al solito per induzione, ma, come vedremo tra poco [Osservazione 2.22], tale definizione non è molto significativa).

Esempio 2.19 Consideriamo il caso $f(z) = z^n$ (e $E = \mathbb{C}$). Per $n = 0, 1$ si ha, ovviamente, $f'(z) = 0, 1$. Sia $n \geq 2$. Esattamente come nel caso reale, chiamando h il numero complesso $z - z_0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} z_0^j h^{n-j}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} z_0^j h^{n-j-1} = n z_0^{n-1} . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Quindi z^n è derivabile (in senso complesso) e la sua derivata (nel punto generico z) è (come nel caso reale) $n z^{n-1}$.

Esempio 2.20 Diamo ora un esempio di funzione complessa di variabile complessa non derivabile. Sia $f(z) = \bar{z}$ dove la barra, come d'uso comune, denota complesso coniugato, ossia se $z = x + iy$ con x e y rispettivamente parte reale ed immaginaria di z , allora $\bar{z} = x - iy$. Osserviamo che se f è derivabile in z_0 , allora comunque si scelga una successione di numeri complessi $z_n \rightarrow z_0$ (ovvero tali che $|z_n - z_0| \rightarrow 0$) si ha $\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \rightarrow f'(z_0)$. Fissiamo z_0 e consideriamo le successioni $z_n \equiv z_0 + \frac{1}{n}$ e $w_n \equiv z_0 + i \frac{1}{n}$. Si verifica immediatamente che $z_n \rightarrow z_0$, $w_n \rightarrow z_0$ e che

$$\frac{\bar{z}_n - \bar{z}_0}{z_n - z_0} = 1 , \quad \frac{\bar{w}_n - \bar{z}_0}{w_n - z_0} = -1 ,$$

da questo segue che la funzione $z \rightarrow \bar{z}$ non è derivabile in alcun punto.

Osservazione 2.21 (i) Grazie alle definizioni sopra elencate, le Definizioni 1.1, 1.7 e 1.8 si intenderanno valide anche per funzioni complesse di variabile complessa¹³. Dopodiché i Teoremi 1.4, 1.6, 1.9 e 1.11, con le loro dimostrazioni, valgono anche per funzioni complesse di variabile complessa. Allo stesso modo, le definizioni e i risultati dei primi tre paragrafi del presente capitolo si estendono *verbatim* al caso di funzioni complesse di variabile complessa (per i risultati relativi all'integrazione si vedano 2.9, 2.10 e 2.11).

(ii) Consideriamo una funzione complessa $z \in D \subset \mathbb{C} \rightarrow f(z) \in \mathbb{C}$ dove D è un aperto di $\mathbb{C}$ tale che $D \cap \mathbb{R}$ sia un aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ e supponiamo che $f(x) \in \mathbb{R}$

¹³Ossia con $E \subset \mathbb{C}$, $x, x_0 \in \mathbb{C}$ e u_n e u funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$.

se $x \in D \cap \mathbb{R}$. Se f è derivabile in senso complesso su D allora f è derivabile, nel senso delle funzioni reali di variabile reale, su $D \cap \mathbb{R}$ e (naturalmente) la derivata complessa e quella reale coincidono su $D \cap \mathbb{R}$.

Osservazione 2.22 Sebbene la discussione appena fatta possa far pensare che l'analisi delle funzioni complesse di variabile complessa sia analoga a quella delle funzioni complesse di variabile reale, nello studio delle funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ appaiono nuovi e straordinari fenomeni. Ad esempio in seguito verrà provato che

Se $E \subset \mathbb{C}$ è un insieme aperto e $f \in C^1(E, \mathbb{C})$ allora f è rappresentabile come serie di potenze nell'intorno di ogni punto di E .

Si noti che dal Teorema 2.5 (versione complessa) segue, in particolare, che la classe $C^1(E, \mathbb{C})$ coincide con la classe $C^\infty(E, \mathbb{C})$!

Concludiamo questo paragrafo discutendo la **funzione esponenziale** nel campo complesso. Definiamo per $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} . \quad (2.51)$$

Poiché $\limsup \left(\frac{1}{k!} \right)^{\frac{1}{k}} = 0$ si ha che il raggio di convergenza della serie esponenziale (2.51) è infinito. In effetti, possiamo stimare l'errore che si commette approssimando e^z con la somma parziale di ordine N come segue. Dato z , sia N un intero tale che $N + 2 > |z|$, allora

$$\begin{aligned} \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \right| &= \left| \sum_{k>N} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k>N} \frac{|z|^k}{k!} \\ &= \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|z|}{N+2} + \frac{|z|^2}{(N+3)(N+2)} + \cdots \right) \\ &\leq \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{N+2} \right)^k \\ &= \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \frac{N+2}{N+2-|z|} . \end{aligned} \quad (2.52)$$

In particolare se $|z| \leq 1$ si ha, per ogni $N > 0$,

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(N+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{N+2}} = \frac{1}{(N+1)!} \frac{N+2}{N+1} < \frac{1}{N!} \frac{1}{N} . \quad (2.53)$$

Poniamo ora in relazione la funzione esponenziale con il numero di Nepero e . Dalla formula del binomio di Newton, si ha che

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! n^k} \frac{1}{k!} . \quad (2.54)$$

Osservando che $\frac{n!}{(n-k)!n^k} \leq 1$ per ogni $0 \leq k \leq n$, otteniamo che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \equiv \exp(1) , \quad (2.55)$$

e prendendo il limite superiore per $n \rightarrow \infty$ si ha che $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \exp(1)$.

D'altra parte, per ogni $n_0 \leq n$ si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{n_0} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{1}{k!} . \quad (2.56)$$

Ora, poiché, per k fissato, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)!n^k} = 1$, prendendo il limite inferiore per $n \rightarrow \infty$ in (2.56), otteniamo che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} \quad (2.57)$$

e prendendo il limite per $n_0 \rightarrow \infty$ si ottiene $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \exp(1)$ che insieme alla disuguaglianza sopra dimostrata implica che

$$\exp(1) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \exp(1) . \quad (2.58)$$

In particolare il $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ esiste e, come è noto, prende il nome di *numero di Nepero* e si denota spesso con e .

Dimostriamo ora *la regola di addizione per la funzione esponenziale complessa* ovvero:

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w) \quad \forall \quad z, w \in \mathbb{C} . \quad (2.59)$$

Per la formula binomiale di Newton e per la Proposizione 2.11 si ha che

$$\begin{aligned} \exp(z + w) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z + w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{w^h}{h!} \equiv \exp(z) \exp(w) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Da tale regola e dal fatto che $\exp(0) = 1$ segue immediatamente che $\exp(-z) \exp(z) = 1$ ovvero che

$$[\exp(z)]^{-1} = \exp(-z) , \quad \forall \quad z \in \mathbb{C} . \quad (2.61)$$

Notiamo anche che¹⁴

$$\overline{\exp(z)} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\overline{z^k}}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\overline{z}^k}{k!} \equiv \exp(\overline{z}) . \quad (2.62)$$

Un'altra proprietà fondamentale della funzione esponenziale è che la sua derivata complessa coincide con sé stessa: per il Teorema 2.5 (caso complesso), $\exp(z)$ è derivabile e la sua derivata si ottiene derivando termine a termine la serie che la rappresenta, dunque

$$\frac{d}{dz} \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \equiv \exp(z) . \quad (2.63)$$

Prima di passare a discutere le funzioni trigonometriche consideriamo brevemente la funzione $\exp(x)$ per x reali. Innanzitutto facciamo vedere che

$$\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} . \quad (2.64)$$

Da (2.59) si ha, per ogni numero intero positivo q , che

$$\underbrace{\exp\left(\frac{1}{q}\right) \cdots \exp\left(\frac{1}{q}\right)}_{q \text{ volte}} = \exp(1) \equiv e , \quad (2.65)$$

ovvero

$$\exp\left(\frac{1}{q}\right) = e^{\frac{1}{q}} . \quad (2.66)$$

Da (2.65) e da (2.59), se p e q sono numeri interi positivi,

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{q}\right) \cdots \exp\left(\frac{1}{q}\right)}_{p \text{ volte}} = e^{\frac{p}{q}} . \quad (2.67)$$

Essendo la funzione $\exp(z)$ continua su $\mathbb{C}$ (Teorema 1.4 versione complessa), se p_k e q_k sono numeri interi positivi tali che p_k/q_k tende al numero reale x , si ha che $e^{\frac{p_k}{q_k}} = \exp\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \rightarrow \exp(x)$; tale relazione mostra la validità di (2.64) nel caso in cui x sia un numero reale positivo. Se $x < 0$, da (2.61) segue che $e^{-x} = \exp(-x) = \exp(x)^{-1} = 1/e^x$ e dunque $\exp(x) = \exp(-x)^{-1} = (e^{-x})^{-1} = e^x$, il che mostra la validità di (2.64) per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Possiamo ora facilmente ridimostrare le proprietà fondamentali della funzione $x \in \mathbb{R} \rightarrow e^x = \exp(x)$: dalla definizione di $\exp(x)$ segue che $e^x > 0$ per $x \geq 0$ e poiché, per $x < 0$, $\exp(x) = 1/\exp(-x) = 1/\exp(|x|)$ si ha che

$$\exp(x) = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} . \quad (2.68)$$

¹⁴Si ricorda che il complesso coniugato di una somma di numeri complessi è uguale alla somma dei complessi coniugati; inoltre l'operazione di complesso coniugato è continua sul campo dei complessi ovvero se $z_n \rightarrow z$ allora $\overline{z_n} \rightarrow \overline{z}$.

Per ogni intero positivo k e per ogni $x > 0$, $e^x > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, dunque $e^x/x^k > x/(k+1)!$ e quindi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.69)$$

Poiché la derivata reale coincide con quella complessa per $x \in \mathbb{R}$ si ha che $(e^x)' = e^x$ e dunque la funzione $x \in \mathbb{R} \rightarrow e^x \in \mathbb{R}$ è una funzione strettamente positiva, strettamente crescente e strettamente convessa che manda la retta $\mathbb{R}$ sulla semiretta $(0, \infty)$ in maniera biunivoca. Le ben note proprietà del logaritmo, ovvero (per definizione) della funzione inversa di $x \rightarrow e^x$ derivano da quanto appena detto.

In vista della (2.64) è uso comune definire e^z , per ogni $z \in \mathbb{C}$, come $\exp(z)$.

Funzioni trigonometriche¹⁵

Definizione 2.23 Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si pone

$$\cos z \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (2.70)$$

Come per l'esponenziale si verifica immediatamente che il raggio di convergenza di tali serie è infinito. Inoltre è immediato verificare che¹⁶, per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x \in \mathbb{R}, \sin x \in \mathbb{R}, \quad (2.71)$$

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, \quad (2.72)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (2.73)$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (\text{formula di Eulero}), \quad (2.74)$$

$$\operatorname{Re} e^{ix} = \cos x, \operatorname{Im} e^{ix} = \sin x; \quad (2.75)$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \quad (2.76)$$

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \quad (2.77)$$

$$|e^{ix}| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad (2.78)$$

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z. \quad (2.79)$$

Possiamo ora dare una definizione "analitica" del famosissimo "pi greco" π : sia A l'insieme degli zeri positivi del coseno ovvero $A \equiv \{x > 0 : \cos x = 0\}$. Tale

¹⁵Nella nostra esposizione seguiremo W. Rudin *Principle of Mathematical Analysis*, McGraw Hill.

¹⁶Le (2.71) e (2.72) seguono immediatamente dalla definizione 2.23; la (2.73) segue aggiungendo le serie esponenziali (cosa possibile essendo tali serie assolutamente convergenti); la (2.74) segue da (2.73); la (2.75) segue da (2.74) e da (2.71); le (2.76) e (2.77) seguono da (2.73), (2.59) e (2.74); da (2.62) e (2.59) segue che $|e^{ix}| = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = e^0 = 1$ ovvero la (2.78); la (2.79) segue dalla definizione 2.23 e dalla versione complessa del Teorema 1.6.

insieme è non vuoto. Infatti il coseno è una funzione continua tale che $\cos 0 = 1$ mentre

$$\cos 2 \equiv 1 - 2 + \frac{2}{3} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!} \right) - \dots < -\frac{1}{3}.$$

Definizione 2.24 $\pi = 2\alpha_1$ dove $\alpha_1 \equiv \inf A$.

Da tale definizione seguono le seguenti ben note (?) proprietà di periodicità e di simmetria delle funzioni seno e coseno: per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha¹⁷:

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i2\pi k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (2.80)$$

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad \cos(z+2\pi) = \cos z, \quad \sin(z+2\pi) = \sin z, \quad (2.81)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \quad (2.82)$$

$$\sin(\pi + z) = -\sin(\pi - z), \quad \cos(\pi + z) = \cos(\pi - z). \quad (2.83)$$

Si noti che da tali proprietà di periodicità e simmetria e dalle regole di derivazione del seno e coseno (si veda anche la discussione nella nota 17) seguono i ben noti grafici di $\sin x$ e $\cos x$ (per $x \in \mathbb{R}$). Infine dimostriamo alcune proprietà di iniettività della funzione esponenziale complessa ovvero:

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| = 1 \quad \exists! \quad t \in [0, 2\pi) \quad \text{tale che} \quad z = e^{it}, \quad (2.84)$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \exists! \quad w \in \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad z = e^w, \quad (2.85)$$

$$e^z = e^w \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad z = w + 2k\pi i. \quad (2.86)$$

Cominciamo col dimostrare che $e^{it} \neq 1$ se $t \in (0, 2\pi)$. Infatti, dato $t \in (0, 2\pi)$ sia $\tau \equiv t/4 \in (0, \pi/2)$ e poniamo $e^{i\tau} = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$). I numeri x e y appartengono all'intervallo aperto $(0, 1)$ e $e^{it} = (x + iy)^4 = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 + i4xy(x^2 - y^2)$. Se e^{it} fosse reale allora si avrebbe che $x^2 = y^2$ e da (2.78) seguirebbe che $x^2 = y^2 = 1/2$ ovvero $e^{it} = -1$. Da questa proprietà segue immediatamente l'unicità in (2.84): se fosse $e^{it_1} = e^{it_2}$ con $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$ allora $e^{i(t_2-t_1)} = 1$ con $0 < t_2 - t_1 < 2\pi$ il che contraddirebbe quanto appena dimostrato. Rimane da dimostrare l'esistenza in (2.84): dato $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, poniamo $z = x + iy$ (con $x, y \in [-1, 1]$). Se x e y appartengono a $[0, 1]$, essendo $\cos t$ strettamente decrescente per $t \in [0, \pi/2]$, si avrebbe che esiste un unico $t_0 \in [0, \pi/2]$ tale che $\cos t_0 = x$ e dunque (essendo $y \geq 0$) $e^{it_0} = z$. Se $x < 0$ e $y \geq 0$, allora $-iz = e^{it_0}$ e quindi $z = ie^{it_0} = e^{i(t_0+\pi/2)}$. Se $y < 0$, allora $-z = e^{it_0}$ e quindi $z = -e^{it_0} = e^{i(t_0+\pi)}$, il che conclude la dimostrazione di (2.84). La (2.85) segue ora facilmente: sia $x = \log|z|$. Allora $z/|z| = ze^{-x} = e^{iy}$ per un unico $y \in [0, 2\pi)$ e dunque

¹⁷ Essendo $\pi/2 = \alpha_1$ uno zero del coseno, da (2.78) segue che $\sin(\pi/2) = \pm 1$, d'altra parte essendo $\cos x > 0$ per $x \in [0, \pi/2)$ (come segue di nuovo dalla definizione di π e da $\cos 0 = 1$) ed essendo $(\sin x)' = \cos x$, la funzione $\sin x$, che vale 0 in 0 risulta strettamente crescente tra 0 e $\pi/2$ quindi $\sin(\pi/2) = 1$; dunque $e^{i\pi/2} = 1$; da (2.59) segue che $e^{i\pi} = e^{i\pi/2}e^{i\pi/2} = i^2 = -1$, $e^{2\pi i} = e^{i\pi}e^{i\pi} = 1$, $e^{2\pi ik} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1$ con il che abbiamo dimostrato la validità di (2.80). Le (2.81), (2.82) e (2.83) seguono ora immediatamente da (2.80) e da (2.59) o da (2.76) e (2.77).

$z = e^w$ con $w \equiv x + iy$. Infine se $z \equiv x + iy$, $w \equiv x' + iy'$ (con $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ e) con $y \geq y'$ e se $e^z = e^w$ allora $e^x = e^{x'}$ e quindi $x = x'$ e $e^{i(y-y')} = 1$. Se poniamo $k \equiv [(y - y')/(2\pi)]$, allora $y - y' - 2\pi k \in [0, 2\pi)$ e la (2.86) segue da (2.84). ■

Esempio 2.25 Come esempio discutiamo la funzione g definita come $g(z) \equiv \frac{e^{iz}-1}{z}$ se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $g(0) = i$. Innanzitutto osserviamo che

$$g(z) \equiv \frac{e^{iz} - 1}{z} \equiv \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} - 1}{z} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}}{z} = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{(k+1)!} \quad (2.87)$$

e tale serie (esattamente come la serie che definisce l'esponenziale complesso) ha raggio di convergenza infinito. In particolare g è continua in $z = 0$. Studiamo ora gli zeri di g ovvero cerchiamo valori di z dove $g(z) = 0$. Abbiamo visto che $g(0) = i$ e, se $z \neq 0$, $g(z) = 0$ è equivalente a $e^{iz} - 1 = 0$. Usando le (2.74) troviamo che

$$\operatorname{Re}(e^{iz} - 1) = e^{-y} \cos x - 1, \quad \operatorname{Im}(e^{iz} - 1) = e^{-y} \sin x, \quad (\operatorname{Re} z \equiv x, \operatorname{Im} z \equiv y).$$

Dunque affinché $e^{iz} - 1 = 0$ deve essere $\cos x = e^y$ e $\sin x = 0$ il che equivale a dire $y = 0$ e $x = 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. Dunque gli zeri di $g(z)$ sono sull'asse reale e sono dati da $z = 2k\pi$ con k intero ma diverso da zero.

Esercizi e complementi

E 2.1 Siano u e v come nel punto (i) dell'Osservazione 2.18 e si calcolino i coefficienti c_n della serie di potenze di $u \circ v$.

E 2.2 Dimostrare che se u è una serie di potenze dispari [$u(x) = -u(-x)$], allora tutti i coefficienti pari sono nulli mentre se u è pari [$u(x) = u(-x)$], sono nulli tutti i coefficienti dispari.

E 2.3* Verificare la relazione $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ usando la serie di Taylor; cioè verificare:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

E 2.4 Si consideri una serie di potenze $u = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$ con $a_1 \neq 0$. Assumendo che la funzione inversa di u , u^{-1} sia espandibile in serie di potenze attorno a 0, e cioè che $u^{-1} \equiv v = \sum b_n x^n$, si determinino i coefficienti b_n .

E 2.5 Sia $u = \frac{x}{1-x}$ e si calcolino i coefficienti della serie di potenze di $u^n \equiv \sum_{k \geq n} a_k^{(n)} x^k$.

E 2.6 Sia $u = \frac{x}{1-x}$. La funzione inversa è data da $x = v(y) = \frac{y}{1+y} = \sum_{n \geq 1} b_n y^n$ con $b_n = (-1)^{n-1}$.

(i) Usando 2.4 e 2.5, si dimostri che

$$b_1 = 1, \quad b_k = - \sum_{n=1}^{k-1} b_n \binom{k-1}{n-1}, \quad (2.88)$$

ovvero che

$$(-1)^{k-1} = - \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^{n-1} \binom{k-1}{n-1}. \quad (2.89)$$

(ii) Si definiscano i numeri β_k come in (2.88) omettendo il segno meno, ossia si ponga

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_k = \sum_{n=1}^{k-1} \beta_n \binom{k-1}{n-1}. \quad (2.90)$$

Si dimostri che $\beta_k \geq (k-1)!$ e che quindi la serie di potenze $\sum \beta_k y^k$ ha raggio di convergenza nullo.

E 2.7 Dare un sempio di una serie di potenze u tale che $\rho(u) = 1$ e $\rho(\frac{1}{u}) = \infty$.

E 2.8 Tralasciando gli enunciati che coinvolgano l'integrazione di funzioni, si verifichi attentamente che tutti gli enunciati e relative dimostrazioni dei paragrafi 2.1, 2.2 e 2.3 valgono anche nel caso complesso.

E 2.9 (Integrazione complessa I) Per ogni $z, z_0 \in \mathbb{C}$ e per ogni intero $k \neq -1$ definiamo

$$\int_{z_0}^z (w - z_0)^k dw \equiv \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1}. \quad (2.91)$$

Si estenda, per linearità, tale definizione a qualunque polinomio in $(z - z_0)$ a coefficienti in $\mathbb{C}$. Se $f(z) \equiv \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$ è una serie di potenze con raggio di convergenza positivo, definiamo

$$\int_{z_0}^z f(w) dw \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (z - z_0)^n. \quad (2.92)$$

Si verifichi che per ogni serie di potenze di centro z_0 si ha

$$\frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(w) dw = f(z). \quad (2.93)$$

Si verifichi anche che vale l'enunciato completo del Teorema 2.5.

E 2.10 (Integrazione complessa II) C'è un'altra maniera, più generale, di definire l'integrazione nel campo complesso. Siano $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ due funzioni reali continue sull'intervallo $[a, b]$ e derivabili con continuità in (a, b) e si consideri la funzione $\gamma : t \in [a, b] \rightarrow \gamma(t) \equiv \alpha(t) + i\beta(t) \in \mathbb{C}$. Si dice che $\gamma(t)$ rappresenta una curva complessa regolare se $\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2 > 0$ per ogni $t \in (a, b)$. Sia ora $z \in \mathbb{C} \rightarrow f(z) \in \mathbb{C}$ una funzione complessa continua su di un insieme aperto $D \subset \mathbb{C}$ e sia γ una curva complessa regolare come sopra contenuta in D (cioè $\{\gamma(t) : t \in [a, b]\} \subset D$). Denotiamo con $u(z) \equiv \operatorname{Re}[f(z)]$ la

parte reale di $f(z)$ e con $v(z) \equiv \text{Im}[f(z)]$ la parte immaginaria di $f(z)$ cosicché $f(z) = u(z) + iv(z)$; si noti che $t \in [a, b] \rightarrow u \circ \gamma(t)$ e $t \in [a, b] \rightarrow v \circ \gamma(t)$ sono funzioni reali e continue della variabile reale t . Definiamo ora l'integrale di f lungo la curva γ come¹⁸

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &\equiv \int_a^b f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt \\ &\equiv \int_a^b \left[u \circ \gamma(t) \alpha'(t) - v \circ \gamma(t) \beta'(t) \right] dt \\ &\quad + i \int_a^b \left[u \circ \gamma(t) \beta'(t) + v \circ \gamma(t) \alpha'(t) \right] dt. \end{aligned}$$

(i) Si dimostri che se $f(z) = z^k$, e se γ è una curva complessa regolare, $\int_{\gamma} f(z) dz$ dipende solo dagli estremi di γ (ovvero dai punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ e non dalla particolare forma di γ).

E 2.11 Verificare che, grazie agli Esercizi 2.9 e 2.10, *tutti* i risultati di questo capitolo (inclusi i risultati relativi all'integrazione) valgono nel campo complesso.

E 2.12 Si dimostri il seguente “Teorema di Cauchy”:

Sia $f(z)$ una serie di potenze convergente in un disco complesso D . Allora per ogni curva complessa regolare e chiusa¹⁹ contenuta in²⁰ D si $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

E 2.13 Usare la (2.53) per dimostrare che il numero di Nepero e è un numero irrazionale.

¹⁸Si veda 1.25 per la definizione di integrale di una funzione complessa di variabile reale.

¹⁹Ovvero con $\gamma(a) = \gamma(b)$.

²⁰Ovvero $\gamma(t) \in D$ per ogni $a \leq t \leq b$.

3 Funzioni C^∞ , C_0^∞ e C^ω

In questo capitolo, salvo avviso contrario, considereremo funzioni reali di variabile reale (e serie di potenze a coefficienti reali) e le varie classi di funzioni qui considerate saranno classi di funzioni reali di variabile reale.

3.1 Definizioni ed esempi

Nel capitolo precedente abbiamo visto che una serie di potenze $u = \sum a_n x^n$ è derivabile infinite volte nell'intervallo aperto $\{x : |x| < R\}$ dove $R = \rho(u)$ denota il raggio di convergenza di u . Una domanda naturale è quindi: "Esistono funzioni C^∞ che non siano rappresentabili tramite serie di potenze?" La risposta è affermativa e quindi le serie di potenze sono una classe funzionale più piccola delle funzioni indefinitamente differenziabili. Prima di motivare tale risposta, diamo due definizioni.

Definizione 3.1 Sia $E \subset \mathbb{R}$, k un intero positivo o $+\infty$ ed f una funzione definita su E . Diremo che $f \in C^k(E)$, se esiste un aperto $A \supset E$ tale che $f \in C^k(A)$.

Tale definizione generalizza la nozione di funzione C^k e permette di parlare di funzioni derivabili su insiemi chiusi¹.

Definizione 3.2 Sia $f \in C^\infty(\{x_0\})$, si chiama serie di Taylor di f la seguente serie di potenze

$$\sum a_n (x - x_0)^n, \quad \text{dove} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (3.1)$$

Per il teorema sulla formula di Taylor, i troncamenti all'ordine N della serie di Taylor di² $f \in C^\infty(\{x_0\})$ approssimano la funzione f a meno di una quantità di ordine $O(|x - x_0|^{N+1})$.

Esempio 3.3 Si consideri ora la seguente funzione di una variabile reale

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}) & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Dimostriamo che $g \in C^\infty$. Cominciamo col dimostrare che per $x > 0$, la derivata k -esima di g ha la forma

$$g^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \quad (3.3)$$

¹Per esempio, $f \in C^\infty(\{0\})$ significa che esiste $r > 0$ tale che $f \in C^\infty(-r, r)$. Si noti che tale definizione è data per $k > 0$ ma non per $k = 0$; infatti esistono funzioni continue in un punto ma che non sono continue su alcun intorno di tale punto (si veda 3.2).

²Ovvero i polinomi di ordine N $\sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n$ con $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.

dove $P_k(y)$ è un polinomio in y di grado $2k$. Infatti per $k = 1$, si ha che

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad (x > 0) \quad (3.4)$$

e quindi l'asserto è vero con $P_1(y) \equiv y^2$. Assumiamo l'asserto vero per $0, \dots, k-1$ e dimostriamolo per k .

$$\begin{aligned} g^{(k)}(x) &= \left(g^{(k-1)}(x) \right)' \\ &= \left[P'_{k-1} \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) + P_{k-1} \left(\frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x^2} \right) \right] e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &\equiv P_k \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

il che implica che l'asserto è vero anche per k . Poiché per ogni $k > 0$ si ha che

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^k \exp(-y) = 0,$$

da (3.3) segue che³, per ogni intero $k, p \geq 0$

$$\lim_{x \downarrow 0} g^{(k)}(x) x^{-p} = 0. \quad (3.5)$$

In particolare (poiché $g^{(k)}(x) \equiv 0$ per ogni $x < 0$) segue che $g^{(k)}(0+) = g^{(k)}(0-) = 0$, per ogni $k \geq 0$. Da tale relazione segue anche che $g^{(k)}(0) = 0$ per ogni k . Infatti per $k = 0$ è vero per definizione. Assumiamo che $k \geq 1$ e che $g^{(k-1)}(0) = 0$. Allora

$$g^{(k)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{(k-1)}(h)}{h} = 0.$$

Dunque poiché g è chiaramente $C^\infty(0, \infty)$ e $C^\infty(-\infty, 0)$ segue che $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ma allora (essendo $g^{(k)}(0) = 0$) la serie di Taylor di g è la serie banale ($a_n \equiv 0$) che ha raggio di convergenza infinito. D'altra parte non può esistere nessun intorno di 0 in cui la somma della serie di Taylor (e cioè 0) eguagli g poiché $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

Questa discussione motiva la seguente

Definizione 3.4 (Funzioni reali analitiche) Una funzione $f \in C^\infty(\{x_0\})$ a valori reali si dice (reale) analitica in x_0 se la sua serie di Taylor ha raggio di convergenza positivo e se $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ (con a_n definiti in (3.1)) in un intorno di x_0 . Una funzione $f \in C^\infty(E)$ si dice (reale) analitica su E se f è (reale) analitica in ogni punto x_0 di E ; la classe di tali funzione si denota con $C^\omega(E)$.

³ Si ricorda che $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 con $x > x_0$; analogamente $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 con $x < x_0$.

Osservazione 3.5 (i) Una funzione reale analitica è, dunque, una funzione che localmente si rappresenta come una serie di potenze coincidente con la sua serie di Taylor. Quindi la funzione g dell'Esempio 3.3 è $C^\infty(\mathbb{R})$ ma non $C^\omega(\mathbb{R})$ [più precisamente $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap C^\omega(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ma $f \notin C^\omega(\{0\})$].

(ii) Dal § 2 segue:

la somma e il prodotto di due funzioni $C^\omega(E)$ appartengono a $C^\omega(E)$; se $f \in C^\omega(E)$ e $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in E$ allora $1/f \in C^\omega(E)$; se $f \in C^\omega(\{x_0\})$ e $g \in C^\omega(\{y_0\})$ con $y_0 \equiv f(x_0)$ allora $g \circ f \in C^\omega(\{x_0\})$.

Dimostriamo, ad esempio, l'affermazione relativa al reciproco. Fissiamo $x_0 \in E$; dalla definizione di C^ω segue che $f = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ in un intorno di x_0 e $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$. Dalla Proposizione 2.16 segue che $1/f$ è una serie di potenze in un intorno di x_0 e dall'Osservazione 2.7 punto (i) si ha che tale serie coincide con la serie di Taylor di $1/f$ e questo significa che $1/f$ è analitica in intorno di x_0 . Ragionando in maniera analoga si dimostrano anche le altre affermazioni. ■

(iii) Dal Teorema 2.5, segue che una serie di potenze $f = \sum a_n (x - x_0)^n$ con $R \equiv \rho(f) > 0$ (e $a_n \in \mathbb{R}$) è di classe $C^\omega((x_0 - R, x_0 + R))$; il "viceversa" di tale affermazione, in generale, non è però vero: la funzione $f(x) \equiv 1/(1 + x^2)$, per il punto (ii), è $C^\omega(\mathbb{R})$ ma la serie di Taylor di f in 0 è data da

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

che, come si verifica immediatamente, ha raggio di convergenza 1.

In vista di queste osservazioni è naturale aspettarsi che vi sia una caratterizzazione delle funzioni analitiche simile a quella che si ha per le serie di potenze. Infatti vale il seguente

Teorema 3.6 (Caratterizzazione delle funzioni analitiche) *La funzione f è analitica in x_0 se e solo se $f \in C^\infty(\{x_0\})$ ed esistono due costanti positive M, r tali che*

$$\sup_{|x-x_0| < r} |f^{(n)}(x)| \leq M r^{-n} n!, \quad \forall n \geq 0. \quad (3.6)$$

Dimostrazione Cominciamo con il dimostrare il "se". Supponiamo, quindi, che valga (3.6) e sia $0 < R < r$, allora

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq M \sum_{n \geq 0} r^{-n} R^n < \infty. \quad (3.7)$$

Sia, ora, x tale che $|x - x_0| < r$. Per la formula di Taylor (con resto in forma di Lagrange) si ha, per un qualche $x^{(N)}$ tra x e x_0 ,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(N+1)}(x^{(N)})}{(N+1)!} \right| |x - x_0|^{N+1} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} M (|x - x_0| r^{-1})^{N+1} = 0. \end{aligned}$$

Quindi $f = \sum a_n(x - x_0)^n$ è analitica.

Viceversa, assumiamo che f sia analitica e che la sua serie di Taylor converga per $|x - x_0| < R$; fissiamo un r tale che $0 < r < R/2$. Allora, se a_n denotano i coefficienti della serie di Taylor di f , ricordando il Teorema 2.5 ed osservando che

$$\binom{m}{k} \leq \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} = 2^m \quad (3.8)$$

per ogni $0 \leq k \leq m$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \sup_{|x-x_0|<r} |f^{(n)}(x)| &= \sup_{|x-x_0|<r} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n}(n+k) \cdots (1+k)(x-x_0)^k \right| \\ &\leq \frac{1}{r^n} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+n}| \frac{(n+k)!}{k!} r^{k+n} = \frac{1}{r^n} n! \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+n}| \binom{n+k}{k} r^{k+n} \\ &\leq \frac{1}{r^n} n! \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+n}| (2r)^{k+n} \leq \frac{1}{r^n} n! \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| (2r)^k \\ &= r^{-n} n! M, \quad \text{con} \quad M \equiv \sum_{k \geq 0} |a_k| (2r)^k. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Una classe interessante di funzioni C^∞ ma non C^ω sono funzioni che sono identicamente nulle al di fuori di un intervallo limitato.

Definizione 3.7 Il supporto di una funzione f , denotato $\text{supp}(f)$, è la chiusura dell'insieme $\{x : f(x) \neq 0\}$. Una funzione f si dice "a supporto compatto" se il suo supporto è un insieme limitato (e quindi compatto). La classe delle funzioni $C^k(\mathbb{R})$ a supporto compatto si denota con $C_0^k(\mathbb{R})$.

E' immediato costruire funzioni $C_0 \equiv C_0^0$; ad esempio $f(x) \equiv 1 - |x|$ per $|x| < 1$ e $f(x) \equiv 0$ per $|x| \geq 1$. Più interessanti sono le funzioni C_0^∞ .

Esempio 3.8 Sia g la funzione dell'Esempio 3.3. La funzione $g_0(x) \equiv g(x)g(1-x)$ è una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$. Infatti g_0 è C^∞ essendo il prodotto di due funzioni C^∞ ed inoltre $g_0(x) = 0$ se $x < 0$ oppure se $x > 1$. D'altra parte $g_0(x) > 0$ se $x \in (0, 1)$. Quindi $\text{supp}(g_0) = [0, 1]$ e $g_0 \in C_0^\infty$.

Esempio 3.9 Un altro modo di costruire funzioni C_0^∞ (sempre legato alla funzione esponenziale) è il seguente. Se g è la funzione definita nell'Esempio 3.3, definiamo, per ogni $\varepsilon > 0$, la funzione

$$\varphi_\varepsilon(x) \equiv g(\varepsilon^2 - x^2) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2 - x^2}\right), & \text{se } |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{se } |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.9)$$

Tale funzione, essendo composizione di funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$, è $C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre è chiaro che $\varphi_\varepsilon \geq 0$, che $\varphi_\varepsilon(x) > 0$ se $|x| < \varepsilon$ e che $\varphi_\varepsilon(x) \equiv 0$ se $|x| \geq \varepsilon$. Quindi φ_ε è una funzione a supporto compatto e $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) = \{x : |x| \leq \varepsilon\}$.

Esempio 3.10 Siano $R > r > 0$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Costruiamo una funzione $\chi \in C_0^\infty$ che abbia le seguenti proprietà:

(i) $\chi(x) \geq 0$; (ii) $\chi(x) \equiv 1$ se $|x - x_0| < r$; (iii) $\text{supp}(\chi) = \{x : |x - x_0| \leq R\}$.

Sia $g_1(x) \equiv c \int_{-\infty}^x g_0(t) dt$ dove $c \equiv \left(\int_0^1 g_0(t) dt \right)^{-1}$ con g_0 definita nell'Esempio 3.8.

La funzione g_1 è chiaramente C^∞ , è monotona non decrescente (la sua derivata è $cg_0(x)$ che è una funzione non negativa), vale 0 se $x < 0$ e vale 1 se $x > 1$.

E' ora elementare controllare che la funzione cercata può essere definita come

$$\chi(x) \equiv g_1\left(\frac{x_0 - x + R}{\delta}\right) g_1\left(\frac{x - x_0 + R}{\delta}\right), \quad \delta \equiv R - r. \quad (3.10)$$

3.2 Convoluzione e regolarizzazione

Le funzioni C_0^∞ sono assai utili per *regolarizzare* ovvero per approssimare con accuratezza arbitraria una data funzione (magari discontinua o con derivate discontinue) con funzioni C^∞ . La regolarizzazione può essere fatta mediante l'operazione di convoluzione.

Definizione 3.11 Siano f e g due funzioni (reali) di cui una limitata e continua a tratti e l'altra integrabile su⁴ $\mathbb{R}$. Definiamo la convoluzione, $f * g$, di f con g come

$$f * g(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy. \quad (3.11)$$

E' innanzitutto chiaro che $f * g$ è una funzione ben definita, infatti, assumendo per fissare le idee che f sia limitata e che g sia integrabile si ha:

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R |f(x-y)| |g(y)| dy \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}} |f| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R |g(y)| dy \\ &= \sup_{\mathbb{R}} |f| \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Inoltre, il cambio di variabile $y' \equiv y - x$ mostra che il *prodotto di convoluzione* * è *commutativo*, ovvero che

$$f * g(x) = g * f(x). \quad (3.13)$$

Esempio 3.12 Calcoliamo $f * g$ con

$$f(x) \equiv \sin x, \quad g(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\rho x}, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

⁴Qui "integrabile" sta per "integrabile in senso di Riemann"; per l'integrabilità secondo Riemann su intervalli illimitati si veda 0.1; le ipotesi su f e g possono essere assai meno restrittive: ad esempio, nell'ambito della più generale teoria dell'integrazione di Lebesgue, che analizzeremo in seguito, basta assumere che f sia misurabile e limitata e g integrabile secondo Lebesgue.

dove $\rho > 0$ è un parametro assegnato. Allora

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \operatorname{sen} y dy = \int_{-\infty}^x e^{-\rho(x-y)} \operatorname{sen} y dy \\ &= e^{-\rho x} \int_{-\infty}^x e^{\rho y} \operatorname{sen} y dy \\ &= \frac{\rho \operatorname{sen} x - \cos x}{1 + \rho^2} . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Osservazione 3.13 L'operazione di convoluzione può essere definita anche per altre classi di funzioni. Ad esempio:

(i) Se g è una funzione continua a tratti con supporto in $[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) e f è una funzione continua a tratti, allora $f * g$ è ben definita essendo

$$f * g(x) = \int_a^b f(x-y)g(y)dy . \quad (3.15)$$

(ii) Vedremo più avanti che la convoluzione può essere definita se sia f che g sono integrabili ed in tal caso risulta essere integrabile anche $f * g$.

Sia φ_ε la funzione definita nell'Esempio 3.9 e sia

$$\psi_\varepsilon(x) \equiv \left(\int_{\{|y| \leq \varepsilon\}} \varphi_\varepsilon(y) dy \right)^{-1} \varphi_\varepsilon(x) . \quad (3.16)$$

La funzione ψ_ε ha le seguenti proprietà:

$$\psi_\varepsilon \in C_0^\infty ; \quad \psi_\varepsilon \geq 0 ; \quad \operatorname{supp}(\psi_\varepsilon) = \{x : |x| \leq \varepsilon\} ; \quad \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(y) dy = 1 .$$

Proposizione 3.14 (i) Sia $k \geq 0$, $f \in C^k$ e sia $f_\varepsilon \equiv f * \psi_\varepsilon$. Allora $f_\varepsilon \in C^\infty$ e per ogni $0 \leq p \leq k$

$$\left| D^p(f_\varepsilon - f)(x) \right| \leq \sup_{|y| \leq \varepsilon} \left| f^{(p)}(x-y) - f^{(p)}(x) \right| \rightarrow 0 , \quad (\text{per } \varepsilon \rightarrow 0) . \quad (3.17)$$

(ii) Se f è una funzione integrabile e f_ε è definita come sopra, $f_\varepsilon \in C^\infty$ e $f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$ (per $\varepsilon \rightarrow 0$) nei punti x di continuità per f .

La dimostrazione è basata sul seguente

Lemma 3.15 Sia $g \in C_0^\infty$ e f continua a tratti su $\mathbb{R}$. Allora $g * f \in C^\infty$ e, per ogni $k \geq 1$, si ha

$$(g * f)^{(k)} = g^{(k)} * f . \quad (3.18)$$

Dimostrazione Osserviamo che se $\varphi \in C_0^\infty$ allora anche la derivata φ' è in C_0^∞ . Quindi se (3.18) vale per $k = 1$ allora può essere iterata e dunque vale per k arbitrario. Basta quindi dimostrare (3.18) per $k = 1$. Sia h un numero diverso da 0 e in valore assoluto non superiore ad 1 e poniamo

$$\Delta(x, h) \equiv \frac{g * f(x + h) - g * f(x)}{h}. \quad (3.19)$$

Sia R tale che $\text{supp}(g) \subset [-R, R]$ e si osservi che $\text{supp}(g^{(k)}) \subset [-R, R]$, per ogni $k \geq 0$; quindi per ogni numero reale z con $|z| \leq 1$ la funzione $y \rightarrow g^{(k)}(x + z - y)$ vale identicamente 0 (per ogni $k \geq 0$) se $y < x - 1 - R$ oppure se $y > x + 1 + R$. Allora, usando due volte il teorema fondamentale del calcolo⁵, otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta(x, h) - \int_{\mathbb{R}} g'(x - y) f(y) dy &= \\ &= \int_{x-1-R}^{x+1+R} \left\{ \int_0^1 [g'(x + th - y) - g'(x - y)] dt \right\} f(y) dy \\ &= \int_{x-1-R}^{x+1+R} \left\{ \int_0^1 th \left[\int_0^1 g''(x + sth - y) ds \right] dt \right\} f(y) dy. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Da tale relazione otteniamo la maggiorazione

$$\begin{aligned} \left| \Delta(x, h) - \int_{\mathbb{R}} g'(x - y) f(y) dy \right| &\leq |h| \sup_{\mathbb{R}} |g''| \int_{x-1-R}^{x+1+R} |f(y)| dy \\ &\leq |h| \sup_{\mathbb{R}} |g''| \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \end{aligned} \quad (3.21)$$

e, poiché tale quantità tende a 0 quando $h \rightarrow 0$, si ottiene l'asserto. ■

Dimostrazione (della Proposizione 3.14) Dal lemma segue che $f_\varepsilon \in C^\infty$; inoltre, fissato $0 \leq p \leq k$, da (3.18), integrando per parti, segue che

$$\begin{aligned} D^p f_\varepsilon(x) &\equiv \int \psi_\varepsilon^{(p)}(x - y) f(y) dy = \int \psi_\varepsilon(x - y) f^{(p)}(y) dy \\ &= \int f^{(p)}(x - y) \psi_\varepsilon(y) dy. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ora, poichè $\psi_\varepsilon \geq 0$ e $\int \psi_\varepsilon = 1$, si ha

$$\left| D^{(p)}(f_\varepsilon - f)(x) \right| = \left| \int [f^{(p)}(x - y) - f^{(p)}(x)] \psi_\varepsilon(y) dy \right| \quad (3.23)$$

$$\leq \sup_{|y| \leq \varepsilon} \left| f^{(p)}(x - y) - f^{(p)}(x) \right| \int \psi_\varepsilon \quad (3.24)$$

$$= \sup_{|y| \leq \varepsilon} \left| f^{(p)}(x - y) - f^{(p)}(x) \right|, \quad (3.25)$$

⁵Usato nella forma $F(x + h) - F(x) = h \int_0^1 F'(x + th) dt$.

e dalla continuità di $f^{(p)}$ in x segue (i). Da (3.23) con $p = 0$ segue anche (ii). ■

3.3 Espansione di alcune funzioni elementari

Sono di *fondamentale importanza* i seguenti sviluppi in serie⁶:

$$\frac{x^m}{(1-x)^n} = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{n-1-m+k}{n-1} x^k, \quad (n, m \in \mathbb{N}, n \geq 1, |x| < 1) \quad (3.26)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad (\forall x) \quad (3.27)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad (|x| < 1), \quad (3.28)$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad (|x| < 1), \quad (3.29)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, |x| < 1), \quad (3.30)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (\forall x), \quad (3.31)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad (\forall x), \quad (3.32)$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad (|x| < 1), \quad (3.33)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad (|x| < 1), \quad (3.34)$$

$$\arctan x = - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad (|x| < 1), \quad (3.35)$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (\forall x), \quad (3.36)$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad (\forall x), \quad (3.37)$$

$$\operatorname{arcsinh} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad (|x| < 1), \quad (3.38)$$

⁶Nel seguente elenco la variabile x è reale; per l'interpretazione degli sviluppi per x complessa si veda l'Osservazione 3.16.

$$\operatorname{arctanh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad (|x| < 1), \quad (3.39)$$

dove per α numero reale non intero (e k intero non negativo)

$$\binom{\alpha}{0} \equiv 1, \quad \binom{\alpha}{1} \equiv \alpha, \quad \text{e per } k \geq 2 \quad \binom{\alpha}{k} \equiv \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}; \quad (3.40)$$

il doppio fattoriale $n!!$ (per n intero) è definito come

$$0!! = 1, \quad 1!! \equiv 1, \quad \text{e per } n \geq 2 \quad n!! \equiv n(n-2)!!; \quad (3.41)$$

si noti la scelta del “ramo” per le funzioni circolari inverse⁷.

Dimostrazione La (3.26) si ottiene immediatamente ricordando l'Esempio 2.6.

La (3.27) è ben nota.

La (3.28) si ottiene dalla relazione

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x)$$

espandendo in serie $(1+t)^{-1}$ ed usando il Teorema 2.5.

La (3.29) si ottiene dalla relazione precedente osservando che $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x)$.

La (3.30) si ottiene calcolando la serie di Taylor, osservando che $(1+x)^\alpha = \exp(\alpha \log(1+x))$ e ricordando che la composizione di funzioni analitiche è analitica [Osservazione 3.5 punto (iii)]; alternativamente si può usare il criterio del rapporto per serie⁸.

Le (3.31) e (3.32) sono note dal capitolo precedente.

La (3.33) si ottiene dalla relazione

$$\arcsen x = \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

usando la (3.30).

La (3.34) si ottiene dalla (3.33) osservando che $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsen x$.

La (3.35) si ottiene dalla relazione

$$\arctan x = \int_0^x (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

usando la (3.30).

⁷Ad esempio per l'arcoseno abbiamo scelto il ramo tale che $\arcsen 0 = 0$ etc.

⁸Applicando il criterio del rapporto per serie numeriche alla serie di potenze $\sum_{n \geq 0} a_n(x-x_0)^n$ si ottiene immediatamente che: Se esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, tale limite coincide con $1/R$ dove R è il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n \geq 0} a_n(x-x_0)^n$.

Le (3.36)÷(3.39) si ottengono notando che dalla formula di Eulero (2.74) seguono le relazioni

$$\begin{aligned}\sinh x &= -i \operatorname{sen} ix, & \operatorname{arsinh} x &= -i \operatorname{arsen} ix, \\ \cosh x &= \cos ix, & \operatorname{arctanh} x &= -i \operatorname{arctan} ix. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Le espansioni in serie delle funzioni $\tan x$, $\cotan x$, $\tanh x$, $\cotanh x$ sono date in termini dei cosiddetti **numeri di Bernoulli**. Per definizione i numeri di Bernoulli⁹ B_n ($n \geq 0$) sono i coefficienti dello sviluppo attorno a $x = 0$ della funzione $\frac{x}{e^x - 1}$ moltiplicati per $n!$:

$$\frac{x}{e^x - 1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}. \quad (3.42)$$

Valgono allora le seguenti identità per $|x|$ sufficientemente piccolo¹⁰:

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k)!} |B_{2k}| x^{2k-1}, \quad (3.43)$$

$$\cotan x = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} |B_{2k}| x^{2k-1}, \quad (3.44)$$

$$\tanh x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1}, \quad (3.45)$$

$$\cotanh x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1}. \quad (3.46)$$

Per la dimostrazione si vedano **3.11** e **3.12**.

Le identità sopra discusse mostrano che le funzioni considerate sono di classe $C^\omega(\{0\})$ (essendo gli sviluppi fatti attorno a $x = 0$). Ma, in effetti, dalla Proposizione 2.10 segue che *tutte le funzioni discusse sono reali analitiche su tutto l'insieme delle x descritto, per ciascuna identità, in parentesi*.

Un'altra funzione elementare trascendente che compare spesso nelle applicazioni è la cosiddetta *funzione di errore*

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (3.47)$$

Tale funzione è $C^\omega(\mathbb{R})$; infatti calcolando la serie esponenziale con $x = t^2$ e integrando da 0 a x si ottiene immediatamente lo sviluppo

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad (\forall x). \quad (3.48)$$

⁹Si veda anche **3.11**.

¹⁰La determinazione esatta dei domini su cui valgono le (3.43)÷(3.46) non è immediata: comunque le (3.43) e (3.45) valgono per $x^2 < \pi^2/4$ mentre (3.44) e (3.46) valgono per $x^2 < \pi^2$.

Osservazione 3.16 (i) Le espansioni per l'esponenziale, il seno ed il coseno erano già state discusse nella sezione § 2.4 ed inoltre abbiamo visto che tali identità valgono per $x \in \mathbb{C}$. Infatti non è difficile verificare che *tutte le identità* discusse valgono anche per $x \in \mathbb{C}$ con le specifiche su $|x|$ indicate fra parentesi¹¹.

(ii) Il fenomeno descritto nel punto (i) è un fatto in generale. Infatti se f è una funzione $C^\omega(E)$ con $E \subset \mathbb{R}$ allora per ogni $x_0 \in E$ esiste un $r > 0$ tale che, per ogni $|x - x_0| < r$, $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$, dove gli a_n sono i numeri reali dati da (3.1) e tali che $|a_n| \leq Mr^{-n}$. Ora, grazie a quest'ultima disuguaglianza, si può estendere la funzione f all'insieme aperto dei numeri complessi dato da

$$D \equiv \bigcup_{x_0 \in E} \{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < r\}$$

definendo su tale insieme $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - x_0)^n$. Per la (versione complessa della) Proposizione 2.10, la funzione $z \rightarrow f(z)$ è espandibile in serie di potenze attorno ad ogni punto $z_0 \in D$.

Esercizi e complementi

E 3.1 Si dimostri che $f \in C^k([a, b])$ nel senso della Definizione 3.1 se e solo se $f \in C^k((a, b))$ ed esistono, per ogni $0 \leq p \leq k$, i limiti, rispettivamente da destra e da sinistra, in a e b di $f^{(p)}(x)$ e che tali limiti sono uguali ai limiti dei rapporti incrementali (per $1 \leq p \leq k$)

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f^{(p-1)}(a+h) - f^{(p-1)}(a)}{h}, \quad \text{e} \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{f^{(p-1)}(b-h) - f^{(p-1)}(b)}{-h}. \quad (3.49)$$

E 3.2 Sia $f(x) = x^2$ se x è irrazionale e $f(x) = 0$ altrimenti. Dimostrare che f è continua in 0 ma che, per qualunque intervallo I contenente 0, $f \notin C(I)$.

E 3.3 Si dimostri che $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + x^5 g(x)$ con g analitica in $x = 0$.

E 3.4 Sia $f(x) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k^2} \sin(2^k x)$. Si dimostri che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma che $f \notin C^\omega(\{0\})$.

E 3.5 Si dimostri che la funzione f di 3.4 non è analitica in alcun punto di $\mathbb{R}$.

E 3.6* Si stimi inferiormente $\alpha_n \equiv \sup_{|x| < r} \frac{|g^{(n)}(x)|}{n!}$ dove g è la funzione dell'Esempio 3.3 e si faccia vedere che $\limsup \alpha_n r^n = \infty$ per ogni $r > 0$.

E 3.7 Se f è analitica in un intorno di 0, lo sono anche f' e $\int_0^x f(y) dy$.

¹¹Naturalmente, il logaritmo, come funzione complessa, è definito come l'inverso della funzione (complessa) esponenziale, ed analogamente le funzioni circolari inverse.

E 3.8 Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

è una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$. Si trovi una successione x_k con $x_k > 0$ e $\lim x_k = 0$ tale che $f(x_k) = 0$ e si concluda, grazie al § 2.2, che f non è analitica nell'intorno di 0.

E 3.9 Calcolare $\left(\pm \frac{1}{k}\right)$.

E 3.10 Dimostrare che $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \binom{\alpha}{k} \right|^{\frac{1}{k}} = 1$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

E 3.11 Sia

$$b(x) \equiv \frac{x}{e^x - 1}. \quad (3.51)$$

(i) Si dimostri che $b(x)$ è analitica in $x = 0$.
 (ii) Si definiscano i numeri di Bernoulli B_n come in (3.42) e si calcolino i primi cinque B_n .

(iii) Si dimostri l'identità

$$b(2x) + x = x \coth x. \quad (3.52)$$

(iv) Dimostrare che $B_{2k+1} = 0$ per ogni $k \geq 1$.

E 3.12 (i) Usando la (3.52) si dimostri la (3.46).

(ii) Si dimostrino le identità elementari

$$\begin{aligned} \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x, & \cosh 2x &= 2 \cosh^2 x - 1, \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, & 2 \coth 2x - \coth x &= \tanh x. \end{aligned}$$

(iii) Usando l'ultima relazione nel punto (ii) si dimostri la (3.45).

(iv) Si dimostrino le identità elementari

$$\tanh x = -i \tan ix, \quad \coth x = i \cotan ix. \quad (3.53)$$

Usando il punto (iv) si dimostrino (3.43) e (3.44).

E 3.13 (Stima di Cauchy) Sia u una funzione analitica in $\{x : |x - x_0| < r\}$.

Si dimostri che esiste una costante $C > 0$ tale, per ogni $\delta > 0$,

$$\sup_{|x - x_0| \leq r - \delta} |u^{(k)}(x)| \leq C \delta^{-(k+1)}, \quad \forall k \geq 0. \quad (3.54)$$

4 Serie di Fourier

4.1 Funzioni periodiche e polinomi trigonometrici

Una funzione f di variabile reale si dice **periodica di periodo** $T > 0$ se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se f è una funzione periodica di periodo T , la funzione $\tilde{f}$ definita da $\tilde{f}(x) \equiv f(x \frac{T}{2\pi})$ è periodica di periodo 2π ; pertanto considereremo solo funzioni di periodo¹ 2π .

Definizione 4.1 $C_{\text{per}}^p \equiv \{f \in C^p(\mathbb{R}) : f(x+2\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Esempi naturali di funzioni C_{per}^∞ (o meglio C_{per}^ω) sono le costanti, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x, \dots$ e loro combinazioni lineari:

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}; \quad (4.1)$$

(il ruolo, del tutto formale, del fattore $1/2$ davanti alla costante a_0 apparirà chiaro in seguito). Una tale espressione si chiama *polinomio trigonometrico (reale) di grado N* . Una classe assai più vasta di funzioni periodiche si ottiene considerando limiti, per N che tende ad infinito, di polinomi trigonometrici:

Proposizione 4.2 *Siano $\{a_n\}_{n \geq 0}, \{b_n\}_{n \geq 1}$ due successioni di numeri reali tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) n^p < \infty. \quad (4.2)$$

Allora, $s_N(x)$ (definito in (4.1)) converge, per N che tende ad infinito, uniformemente su $\mathbb{R}$ ad una funzione $f \in C_{\text{per}}^p$.

Il limite di polinomi trigonometrici ovvero un'espressione della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.3)$$

prende il nome di *serie di Fourier*; dunque il risultato appena esposto può essere riformulato dicendo: "se i numeri a_n e b_n soddisfano (4.2) allora la serie di Fourier (4.3) ad essi associata converge uniformemente su $\mathbb{R}$ e definisce una funzione di classe C_{per}^p ".

Dimostrazione (della Proposizione 4.2) Grazie a (4.2), per ogni $0 \leq k \leq p$, la serie delle derivate $\sum u_n^{(k)}$, con $u_0 \equiv a_0/2$ e (per $n \geq 1$) $u_n \equiv a_n \cos nx + b_n \sin nx$, converge totalmente in $\mathbb{R}$ e il Teorema 1.6 implica che $\sum u_n$ converge ad una funzione $f \in C^p(\mathbb{R})$. La periodicità di f deriva dalla periodicità di s_N :

$$f(x+2\pi) = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x+2\pi) = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x). \quad \blacksquare$$

¹Per le formule relative al caso generale si veda 4.11.

L'ipotesi (4.2) implica, in particolare, che $\max\{|a_n|, |b_n|\} \leq M/n^p$.

Più interessante è la questione inversa: *data una funzione $f \in C_{\text{per}}^p$, trovare una successione di polinomi trigonometrici che converga ad f .*

Prima di analizzare tale questione, si noti che $\cos nx$ e $\sin nx$ sono, rispettivamente, la parte reale ed immaginaria di e^{inx} : questa osservazione suggerisce una riscrittura più compatta, in forma complessa, dei polinomi trigonometrici (4.1). Ponendo

$$c_0 \equiv \frac{a_0}{2}, \quad c_{\pm n} \equiv \frac{a_n \mp ib_n}{2} \quad (\forall n \geq 1), \quad (4.4)$$

ed osservando che la “trasformazione inversa” di tale relazione (ovvero la relazione che dà gli a_n e b_n in termini dei $c_{\pm n}$) è data da

$$a_0 = 2c_0, \quad \text{e per } n \geq 1, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = ic_n - ic_{-n}, \quad (4.5)$$

si ha che²

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \leq N}} c_n e^{inx} &= c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n + c_{-n}) \cos nx + (ic_n - ic_{-n}) \sin nx \\ &\equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx \equiv s_N(x). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Osservazione 4.3 (i) Nel caso che stiamo considerando a_n e b_n sono numeri reali e quindi $c_{-n} = \bar{c}_n$ (dove, come al solito al barra denota “complesso coniugato”). Naturalmente avrebbe senso considerare il caso (apparentemente più generale) in cui a_n e b_n sono numeri complessi, nel qual caso i polinomi trigonometrici $s_N(x)$ sarebbero delle funzioni complesse di variabile reale. In questo capitolo considereremo *polinomi trigonometrici e serie di Fourier reali* anche se useremo spesso la notazione complessa che presenta dei vantaggi dal punto di vista algebrico³.

(ii) Si noti che per ogni coppia di numeri reali α e β si ha⁴

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq |\alpha| + |\beta| \leq \sqrt{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (4.8)$$

²Se z_n , per $n \in \mathbb{Z}$, sono numeri complessi, i simboli

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \leq N}} z_n, \quad \sum_{n=-N}^N z_n, \quad \sum_{-N}^N z_n \quad (4.6)$$

denotano, per N intero positivo, la somma $z_{-N} + z_{-N+1} + \cdots + z_{N-1} + z_N$; naturalmente il simbolo $\sum_{n=-N}^M z_n$ o (qualora non vi sia ambiguità) $\sum_{-N}^M z_n$, denoterà la somma $z_{-N} + z_{-N+1} + \cdots + z_{M-1} + z_M$; i simboli $\sum_{n \in \mathbb{Z}} z_n$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ o $\sum_{-\infty}^{\infty} z_n$ denotano il limite, qualora esista, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N z_n$ [per le definizioni sulla convergenza di successioni o serie complesse si veda 1.25, punto (iv)].

³Per le definizioni e proprietà fondamentali relative a funzioni complesse di variabile reale ovvero a funzioni $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si veda 1.25.

⁴La prima disuguaglianza si verifica elevando al quadrato e la seconda deriva dalla disuguaglianza di Cauchy (0.2) con $y_i = 1$.

Si noti anche che, se a_n , b_n e c_n sono legati da (4.4) (e $b_0 \equiv 0$), si ha

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \forall n \geq 0. \quad (4.9)$$

Dunque (se a_n , b_n e c_n sono legati da (4.4)) la condizione (4.2) è equivalente a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| |n|^p < \infty, \quad (4.10)$$

e la Proposizione 4.2 può essere riformulata come segue

se $\bar{c}_n = c_{-n}$ e $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| |n|^p < \infty$ allora $f(x) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \in C_{\text{per}}^p$.

4.2 Coefficienti di Fourier

Sia $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ una serie di Fourier con $\sum |c_n| < \infty$ [cosicché $f \in C_{\text{per}}$]. E' possibile calcolare i numeri c_n (o, equivalentemente, i numeri a_n e b_n) dalla sola conoscenza della funzione $f(x)$? La risposta (affermativa) è contenuta nella seguente

Proposizione 4.4 *Siano c_n , per $n \in \mathbb{Z}$, numeri complessi tali che $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ e sia $f(x) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Allora*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (4.11)$$

Dalle relazioni (4.4) ne consegue che i numeri a_n e b_n sono dati da

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n \geq 1). \quad (4.12)$$

Dimostrazione (della Proposizione 4.4) Dal Teorema 1.5 segue che⁵

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sum_{|m| \leq N} c_m e^{imx} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} c_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = c_n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Motivati da questa discussione (e cambiando punto di vista!) diamo la seguente

⁵ (i) Qui stiamo usando la versione del Teorema 1.5 per funzioni complesse di variabile reali: si veda 1.25. (ii) Si ricordi anche (1.42) per cui $\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx$ è nullo se $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ ed è uguale a 2π se $k = 0$. (iii) Qui ed in seguito espressioni quali $\sum_{|m| \leq N} z_m$ sono abbreviazioni per $\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ |m| \leq N}} z_m$.

Definizione 4.5 Sia f una funzione periodica di periodo 2π ed integrabile su⁶ $[0, 2\pi)$. Si chiamano coefficienti di Fourier di f i numeri complessi

$$\hat{f}_n \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.13)$$

Osservazione 4.6 (i) Anche i numeri a_n e b_n definiti in (4.12) (per f una funzione periodica di periodo 2π ed integrabile su $[0, 2\pi)$) vengono, a volte, chiamati coefficienti di Fourier di f (o coefficienti “reali” di Fourier di f).

(ii) Naturalmente il ruolo dell'intervallo $[0, 2\pi)$ può esser giocato da un qualunque intervallo lungo 2π poiché la conoscenza di f su di un qualunque intervallo lungo quanto il suo periodo permettere di ricostruire f su tutto $\mathbb{R}$. Ad esempio si ha: se $f(x)$ è una funzione periodica ed integrabile su $[0, 2\pi)$ allora l'integrale su un qualunque intervallo lungo 2π coincide con l'integrale tra 0 e 2π . Infatti, per ogni $a < b$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $\int_{a+2k\pi}^{b+2k\pi} f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ (si ponga $t = x + 2k\pi$), dunque, per ogni x_0 ,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) dx &= \int_{x_0}^{2\pi} f(x) dx + \int_{2\pi}^{x_0+2\pi} f(x) dx \\ &= \int_{x_0}^{2\pi} f(x) dx + \int_0^{x_0} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx. \end{aligned}$$

In particolare, se f è periodica ed integrabile su $[0, 2\pi)$ tale è $f(x)e^{-inx}$ e dunque il calcolo dei coefficienti di Fourier di f può essere fatto sostituendo $[0, 2\pi)$ con un qualunque intervallo lungo 2π . Ad esempio, è, a volte, utile usare la formula

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (4.14)$$

Alcune proprietà dei coefficienti di Fourier sono contenute nella seguente

Proposizione 4.7 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π “a quadrato sommabile” su⁷ $[0, 2\pi)$. Allora

- (i) $|\hat{f}_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$;
- (ii) $\bar{\hat{f}}_n = \hat{f}_{-n}$, $(\forall n \in \mathbb{Z})$;
- (iii) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} \right|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}_n|^2, (N \geq 1)$;

⁶Come nei paragrafi precedenti “integrabile” sta per “integrabile secondo Riemann” anche se tutti i risultati qui esposti valgono sotto l'ipotesi più debole di integrabilità secondo Lebesgue. Si potrebbe fin da ora generalizzare un po' i risultati di questo paragrafo sostituendo le ipotesi di integrabilità su $[0, 2\pi)$ con integrabilità su $[0, 2\pi) \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ dove gli x_i sono punti fissati in $[0, 2\pi)$.

⁷O più in generale f è “a quadrato sommabile” (cioè f^2 è integrabile) su $[0, 2\pi) \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$.

- (iv) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$;
- (v) $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |\hat{f}_n| = 0$;
- (vi) $(\widehat{f^{(k)}})_n = (in)^k \hat{f}_n$, (per $f \in C_{\text{per}}^p$, $\forall 0 \leq k \leq p$, $\forall n$);
- (vii) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 |n|^{2k} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(x)|^2 dx$, (per $f \in C_{\text{per}}^p$, $\forall 0 \leq k \leq p$, $\forall n$).

Dimostrazione (della Proposizione 4.7)

La (i) è conseguenza immediata di (1.40) e del fatto che $|e^{inx}| = 1$.

La (ii) è conseguenza immediata delle definizioni date.

(iii): Espandendo l'integrando si trovano, oltre $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$, i seguenti due termini⁸

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} \right|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} \right) \left(\sum_{|m| \leq N} \bar{\hat{f}}_m e^{-imx} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n \sum_{|m| \leq N} \bar{\hat{f}}_m \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx \\ &= \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}_n|^2 , \end{aligned}$$

e⁹

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{Re} \left(f(x) \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} \right) dx &= 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx \right) \\ &\equiv 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n \hat{f}_{-n} \right) = 2 \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}_n|^2 . \end{aligned}$$

Mettendo assieme tali termini si ottiene l'asserto.

(iv): La relazione in (iii) mostra, tra l'altro, che $\sum_{|n| \leq N} |\hat{f}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ per ogni N e prendendo il limite per $N \rightarrow \infty$ si ottiene la (iv).

La (v) è implicata dalla convergenza della serie in (iv).

(vi): Si noti che se $f \in C_{\text{per}}^1$ allora¹⁰ $f' \in C_{\text{per}}$. Dunque

$$(\widehat{f'})_0 \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) dx = \frac{1}{2\pi} [f(x)]_0^{2\pi} \equiv \frac{1}{2\pi} (f(2\pi) - f(0)) = 0 ,$$

⁸Si ricordi che, se z e w sono numeri complessi, allora $|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$; si usi il punto (ii) della nota 5.

⁹Si usi il punto (ii) e si osservi anche che se $u : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ è integrabile allora $\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} u(x) dx = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} u(x) dx$.

¹⁰ $f'(x+2\pi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2\pi+h) - f(x+2\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$.

che è la (vi) per $k = 1$ e $n = 0$; poiché tale relazione può essere iterata, la (vi) è vera per $n = 0$ e per ogni $k \leq p$. Sia ora $n \neq 0$. Essendo $f \in C_{\text{per}}^1$, integrando per parti (Osservazione 1.23) si ottiene:

$$\begin{aligned}\hat{f}_n &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \left(\frac{e^{-inx}}{-in} \right)' dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{f(x) e^{-inx}}{-in} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx \equiv \frac{1}{in} (\widehat{f'})_n,\end{aligned}$$

che è la (vi) per $k = 1$ e $n \neq 0$. Iterando tale relazione si ottiene l'asserto.

(vii): Applicando la (iv) a $f^{(k)}$ (che per le ipotesi è integrabile) ed usando la (vi) si ottiene la relazione (vii). ■

Osservazione 4.8 (i) La relazione in (iv) viene, a volte, chiamata la *disuguaglianza di Bessel*.

(ii) I vari asserti della Proposizione 4.7 possono essere letti in termini dei coefficienti di Fourier “reali” a_n e b_n (4.12) facendo uso delle relazioni (4.4) o (4.5) con $c_n \equiv \hat{f}_n$. Ad esempio, se denotiamo con $a_n^{(k)}$ e $b_n^{(k)}$ i coefficienti “reali” di Fourier di $f^{(k)}$, la (vi) diventa

$$\begin{aligned}a_n^{(k)} &= \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} n^k a_n, & \text{se } k \text{ è pari,} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} n^k b_n, & \text{se } k \text{ è dispari,} \end{cases} \\ b_n^{(k)} &= \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} n^k b_n, & \text{se } k \text{ è pari,} \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}} n^k a_n, & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}\end{aligned}\quad (4.15)$$

(iii) Dal punto (vii) segue che se $f \in C_{\text{per}}^p$, $|\hat{f}_n|^2 |n|^{2p} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(p)}(x)|^2 dx$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e quindi (maggiorando l'integrando con $\sup_{\mathbb{R}} |f^{(p)}(x)|^2$ e prendendo la radice quadrata) si ottiene

$$f \in C_{\text{per}}^p \implies |\hat{f}_n| \leq \frac{M_p}{|n|^p} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}), \quad \text{con } M_p \equiv \sup_{\mathbb{R}} |f^{(p)}(x)|. \quad (4.16)$$

(iv) Se f è integrabile su $[0, 2\pi)$ allora $\hat{f}_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ (“Lemma di Riemann–Lebesgue¹¹”). Infatti, sia $f_k(x)$ definita come $f(x)$ per $x \in [0, 2\pi - \frac{1}{k})$ e 0 altrimenti. Tale funzione f_k è chiaramente a quadrato sommabile (essendo limitata) ed inoltre dalla definizione di integrale di Riemann segue che $\int_0^{2\pi} |f - f_k| \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$. Dato $\varepsilon > 0$ sia k tale che $\int_0^{2\pi} |f - f_k| < \varepsilon/2$. Essendo f_k a quadrato sommabile, dalla Proposizione 4.7, punto (v) segue che esiste N tale che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $|n| > N$ si ha $|\hat{f}_{k,n}| < \varepsilon/2$. Allora, per ogni $|n| > N$ si ha: $|\hat{f}_n| \leq$

¹¹Naturalmente una funzione f può essere integrabile ma non a quadrato sommabile come, ad esempio, $1/\sqrt{2\pi - x}$ su $[0, 2\pi)$.

$$|\hat{f}_n - \hat{f}_{k,n}| + |\hat{f}_{k,n}| = \left| \int_0^{2\pi} (f(x) - f_k(x)) e^{-inx} dx \right| + |\hat{f}_{k,n}| \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - f_k(x)| dx + |\hat{f}_{k,n}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \text{ Dall'arbitrarietà di } \varepsilon \text{ segue l'asserto. } \blacksquare$$

(v) Discutiamo un po' più in dettaglio la relazione fondamentale che c'è tra regolarità di una funzione periodica ed il *decadimento* (per $|n| \rightarrow \infty$) dei suoi coefficienti di Fourier. Il punto (vii) della Proposizione 4.7 è un *parziale* "viceversa" della Proposizione 4.2. Infatti, come già osservato nell'Osservazione 4.3 punto (ii), la Proposizione 4.2 è equivalente a:

se $\bar{c}_n = c_{-n}$ e $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| |n|^p < \infty$ allora $f(x) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \in C_{\text{per}}^p$.

Mentre il punto (vii) implica

se $f \in C_{\text{per}}^p$ allora $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 |n|^{2p} < \infty$;

ma quest'ultima condizione è *più debole* della condizione $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n| |n|^p < \infty$. Quindi queste relazioni non ci permettono di *caratterizzare esattamente* le funzioni C_{per}^p (con $p < \infty$) in termini del decadimento dei loro coefficienti di Fourier. Invece dalla discussione fatta segue che

$f \in C_{\text{per}}^\infty$ se e solo se i coefficienti di Fourier $|\hat{f}_n|$ decadono più rapidamente (per $|n| \rightarrow \infty$) di ogni potenza inversa di¹² $|n|$.

Un'altra classe di funzioni che è possibile caratterizzare esattamente tramite una condizione sul decadimento dei coefficienti di Fourier è la classe C_{per}^ω ovvero le funzioni periodiche e reali analitiche su $\mathbb{R}$.

Proposizione 4.9 $f \in C_{\text{per}}^\omega$ se e solo se $f \in C_{\text{per}}^0$ e

$$\exists C, \sigma > 0 \text{ tali che } |\hat{f}_n| \leq C e^{-\sigma|n|} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.17)$$

Nel corso della dimostrazione faremo uso della seguente stima

Lemma 4.10 Sia $\alpha > 0$ e sia k un intero non negativo, allora

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\alpha j} j^k \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \alpha^{-k} k! \quad (4.18)$$

Dimostrazione Se $k = 0$, poiché $\alpha \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j / j!$, si ha

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\alpha j} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}} = 1 + \frac{1}{e^{\alpha} - 1} = 1 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1} \leq 1 + \frac{1}{\alpha},$$

che è (4.18) nel caso $k = 0$. Sia ora $k \geq 1$ e si consideri la funzione $f(t) \equiv e^{-\alpha t} t^k$ per $t \geq 0$. Tale funzione è positiva per $t > 0$, ha un unico massimo in $t_* \equiv k/\alpha$, è strettamente crescente per $0 \leq t \leq t_*$ e strettamente decrescente per $t \geq t_*$.

¹²Ovvero: $\forall p > 0 \exists C_p > 0$ tale che $|\hat{f}_n| \leq C_p |n|^{-p} \forall n \neq 0$.

Sia $N \equiv [t_*]$ ($[\cdot] \equiv$ "parte intera") cosicch  $N \leq t_* < N + 1$. Allora, poich  $\min_{N \leq t \leq N+1} f(t) = \min\{f(N), f(N+1)\}$, $\int_N^{N+1} f(t) dt \geq \min\{f(N), f(N+1)\}$ e quindi

$$f(N) + f(N+1) \equiv \min\{f(N), f(N+1)\} + \max\{f(N), f(N+1)\} \leq f(t_*) + \int_N^{N+1} f.$$

Dunque, essendo f crescente tra 0 e N e decrescente per $t \geq N + 1$ si ha

$$\sum_{j=1}^{N-1} f(j) \leq \int_0^N f(t) dt, \quad \sum_{j=N+2}^{\infty} f(j) \leq \int_{N+1}^{\infty} f(t) dt,$$

e quindi¹³

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} e^{\alpha j} j^k &= \sum_{j=1}^{\infty} f(j) \leq \int_0^{\infty} f(t) dt + f(k/\alpha) \\ &= \frac{k!}{\alpha^{k+1}} + \left(\frac{k}{\alpha e}\right)^k \leq k! \alpha^{-k} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dimostrazione (della Proposizione 4.9) Sia $f \in C_{\text{per}}^{\omega}$. Dal Teorema 3.6 segue che

$$\forall x_0 \in [0, 2\pi] \exists M_{x_0}, r_{x_0} > 0 \text{ tali che } \sup_{|x-x_0| < r_{x_0}} |f^{(k)}(x)| \leq M_{x_0} r_{x_0}^{-k} k! \quad \forall k \geq 0.$$

Gli intervalli I_{x_0} di centro x_0 e lunghezza $2r_{x_0}$ formano un ricoprimento aperto dell'insieme compatto $[0, 2\pi]$ ed   dunque possibile trovare $0 \leq x_1 < \dots < x_N \leq 2\pi$ tali che $[0, 2\pi] \subset I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_N}$. Definendo $M \equiv \max_{1 \leq j \leq N} M_{x_j}$ e $r \equiv \min_{1 \leq j \leq N} r_{x_j}$ si ha allora

$$|f^{(k)}(x)| \leq M r^{-k} k! \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \geq 0. \quad (4.19)$$

Dal punto (vi) della Proposizione 4.7 e dalla (4.19) segue dunque, per $n \neq 0$, che

$$|\hat{f}_n| = \frac{1}{2\pi |n|^p} \left| \int_0^{2\pi} f^{(p)}(x) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{|n|^p} M r^{-p} p! \leq M \left(\frac{p}{|n|r} \right)^p. \quad (4.20)$$

Quindi, se $|n| \geq 2/r$, scegliendo $p \equiv [n|r/2]$ si ha che

$$M \left(\frac{p}{|n|r} \right)^p \leq M 2^{-[n|r/2]} \leq M 2^{-\{(|n|r/2)-1\}} = (2M) e^{-\{(r|n|\log 2)/2\}}. \quad (4.21)$$

Da (4.20) ed (4.21) segue (4.17) se poniamo:

$$\sigma \equiv (r \log 2)/2, \quad C_* \equiv \max_{0 \leq |n| \leq 2/r} |\hat{f}_n| e^{\sigma|n|}, \quad C \equiv \max\{2M, C_*\}.$$

¹³Si usi la stima $k! \geq (k/e)^k$ che si ottiene facilmente per induzione su $k \geq 1$ (ricordando che $(1 + 1/k)^k < e$).

Assumiamo ora che valga (4.17). Poiché $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^p e^{-\sigma|n|} < \infty$ per ogni $p > 0$, dal punto (ii) dell'Osservazione 4.3 segue che $f \in C_{\text{per}}^\infty$. Il punto (vi) della Proposizione 4.7, la (4.17) ed il Lemma 4.10 implicano, per ogni $x \in [0, 2\pi)$ e per ogni intero $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n (in)^k e^{inx} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n| |n|^k \\ &\leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\sigma|n|} |n|^k = (2C) \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\sigma j} j^k \\ &\leq (2C) \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \sigma^{-k} k! . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Inoltre, sempre da (4.17), segue che¹⁴

$$|f(x)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n| \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\sigma|n|} = C \frac{1 + e^{-\sigma}}{1 - e^{-\sigma}} \leq (2C) \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) . \quad (4.23)$$

Quindi $|f^{(k)}(x)| \leq M r^{-k} k!$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $k \geq 0$ se scegliamo $r \equiv \sigma$ e $M \equiv (2C)(1 + \frac{1}{\sigma})$. Dal Teorema 3.6 segue dunque l'asserto. ■

4.3 Convergenza di serie di Fourier

Passiamo a rispondere alla domanda fatta all'inizio di questo capitolo che ora può essere così riformulata: *sotto quali condizioni f (periodica) coincide con la sua serie di Fourier?*

Cominciamo con un risultato preliminare che dà condizioni sufficienti affinché il troncamento di una serie di Fourier converga a f in un punto:

Lemma 4.11 (Dini) *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica ed integrabile su $[0, 2\pi)$. Fissato $x \in [0, 2\pi)$, se il rapporto incrementale $y \rightarrow F(y) \equiv (f(x+y) - f(x))/y$ è integrabile (come funzione di y) in un intorno di¹⁵ $y = 0$ allora*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} = f(x) . \quad (4.24)$$

Osservazione 4.12 Una ipotesi che implica la validità del “test di Dini” ($\equiv$ “integrabilità del rapporto incrementale”) è che f sia derivabile in x . Infatti se f è derivabile in x esiste $\delta > 0$ tale che $|F(y) - f'(x)| < 1$ per $|y| < \delta$. Dunque

$$|F(y)| \leq |F(y) - f'(x)| + |f'(x)| \leq 1 + |f'(x)| \equiv M . \quad (4.25)$$

¹⁴Se $\delta = \sum_{j=2}^{\infty} \sigma^j / j!$, $(1 + e^{-\sigma}) / (1 - e^{-\sigma}) = (e^{\sigma} + 1) / (e^{\sigma} - 1) = (2 + \sigma + \delta) / (\sigma + \delta) \leq (2 + \sigma) / \sigma \leq 2(1 + \frac{1}{\sigma})$.

¹⁵Più precisamente: se F è integrabile su $[-x, -x + 2\pi) \cap \{0 < |y| < r\}$ per r sufficientemente piccolo.

Dunque per ogni $0 < \rho < \delta$ si ha $\int_{\rho \leq |y| \leq \delta} |F(y)| dy \leq 2\delta M$ e quindi F è integrabile su $[-\delta, \delta]$.

Esempio 4.13 Sia f la funzione di periodo 2π che vale x^2 nell'intervallo $[-\pi, \pi)$. Si noti che la funzione f è di classe C_{per}^0 , è derivabile in ogni $x \neq \pi + 2k\pi$ ma non è C_{per}^1 . Calcolando i coefficienti di Fourier di f [usando (4.14) ed osservando che $e^{in\pi} = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$] si trova, per $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}\hat{f}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[x^2 \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{\pi in} \left[x \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\pi n^2} \left[x e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^n \frac{2}{n^2},\end{aligned}$$

mentre

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Dunque dal Lemma 4.11 segue che, per ogni $-\pi < x < \pi$,

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \in \mathbb{Z}}} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx. \quad (4.26)$$

La serie in tale relazione converge totalmente e dunque, come nella Proposizione 4.2, definisce una funzione C_{per} . Poiché, come già osservato, anche la funzione f è di classe C_{per} si ha che la relazione (4.26) vale sull'intervallo chiuso $[-\pi, \pi]$ e calcolando tale relazione in $x = \pi$ si perviene alla notevole identità

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (4.27)$$

Dimostrazione (del Lemma¹⁶ 4.11) Sia $G(y) \equiv \frac{f(x-y) - f(x)}{e^{-iy} - 1}$. Dalle ipotesi segue che tale funzione (complessa di variabile reale) è periodica di periodo 2π ed è integrabile su $[0, 2\pi)$: infatti, chiaramente $G(y)$ è integrabile su $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, per $\varepsilon > 0$ e sufficientemente piccolo¹⁷, e se $F(y) \equiv \left(f(x+y) - f(x) \right) / y$ e $g(y) \equiv (e^{iy} - 1) / y$ è la funzione definita nell'Esempio 2.25, si ha che $G(y) = F(-y) / g(-y)$ che è integrabile su¹⁸ $[0, \varepsilon) \cup [2\pi - \varepsilon, 2\pi)$. Dunque $f(x-y) - f(x) = G(y)e^{-iy} - G(y)$ ed

¹⁶L'idea della dimostrazione è tratta da "Appunti sulle serie di Fourier" di A. Figà-Talamanca.

¹⁷ $f(x-y) - f(x)$ è integrabile (in y) su $[0, 2\pi)$ per ipotesi (essendo f integrabile su $[0, 2\pi)$ e periodica) e si ricordi (Esempio 2.25) che gli zeri di $e^{iy} - 1$ sono dati da $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

¹⁸Essendo G periodica di periodo 2π , $\int_0^\varepsilon G(y) dy + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} G(y) dy = \int_{-\varepsilon}^\varepsilon G(y) dy$ e F è integrabile su di un intorno di 0 per ipotesi e $g(0) = i \neq 0$ ed è continua.

essendo ambo i membri di tale identità (come funzioni di y) periodici ed integrabili su $[0, 2\pi)$ possiamo calcolarne i coefficienti di Fourier (ovvero moltiplicare ambo i membri per $e^{-iny}/(2\pi)$ ed integrare da 0 a 2π) ottenendo le relazioni¹⁹

$$\hat{f}_0 = \hat{G}_1 - \hat{G}_0 + f(x), \quad \hat{f}_{-n}e^{-inx} = \hat{G}_{n+1} - \hat{G}_n \quad (\text{per } n \neq 0). \quad (4.28)$$

Dunque, per ogni $N \geq 1$,

$$\sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_{-n} e^{-inx} = f(x) + \sum_{|n| \leq N} (\hat{G}_{n+1} - \hat{G}_n) = \hat{G}_{N+1} - \hat{G}_{-N} + f(x). \quad (4.29)$$

Dal punto (iv) dell'Osservazione 4.8 (e da quanto sopra detto su G) segue che $\lim_{N \rightarrow \pm\infty} \hat{G}_N = 0$ e dunque, prendendo il limite per $N \rightarrow \infty$ nella (4.29), si ottiene la (4.24). ■

Teorema 4.14 *Assumiamo che $f \in C_{\text{per}}^p$ per un qualche $p \geq 1$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste N_0 tale che, se $N \geq N_0$, si ha*

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} \right| \leq \frac{\varepsilon}{N^{p-\frac{1}{2}}}. \quad (4.30)$$

Inoltre, vale la seguente "uguaglianza di Parseval"

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2. \quad (4.31)$$

In particolare, la (4.30) mostra che $\sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx}$, per $f \in C_{\text{per}}^1$ converge uniformemente a f .

Dimostrazione Dal Lemma 4.11 e dall'Osservazione 4.12 segue che

$$f(x) - \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{N < |n| \leq M} \hat{f}_n e^{inx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.32)$$

Dalla (vii) della Proposizione 4.7 (con $k = p$) segue che, dato $\varepsilon > 0$, esiste $N_0 > 1$ tale che, per ogni $N \geq N_0$, si ha

$$\sum_{n > N} |\hat{f}_n|^2 |n|^{2p} \leq \varepsilon^2 \left(p - \frac{1}{2}\right). \quad (4.33)$$

¹⁹Per il punto (ii) dell'Osservazione 4.6 si trova che $\int_0^{2\pi} f(x-y)dy = \int_{x-2\pi}^x f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt = 2\pi \hat{f}_0$.

Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (0.2) e la (4.33), si ottiene, per ogni $M > N \geq N_0$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{N < |n| \leq M} \hat{f}_n e^{inx} \right| &\leq \sum_{N < |n| \leq M} |\hat{f}_n| = \sum_{N < |n| \leq M} \left(|\hat{f}_n| |n|^p \right) |n|^{-p} \\ &\leq \left(\sum_{N < |n| \leq M} |\hat{f}_n|^2 |n|^{2p} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{N < |n| \leq M} |n|^{-2p} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{|n| > N} |\hat{f}_n|^2 |n|^{2p} \right)^{\frac{1}{2}} \left(2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-2p} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon \left(p - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(2 \int_N^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{N^{p-\frac{1}{2}}} . \end{aligned}$$

Prendendo, in tale relazione, il limite per $M \rightarrow \infty$, e ricordando la (4.32) si ottiene la (4.30).

In particolare, (4.30) mostra che la convergenza di $\sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx}$ a f è uniforme; quindi si può passare al limite, per $N \rightarrow \infty$, nella formula (iii) della Proposizione 4.7, ottenendo l'identità di Parseval. ■

Esercizi e complementi

E 4.1 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica e integrabile su $[0, 2\pi)$. Dimostrare che $\int_0^x f(t) dt$ è periodica se e solo se $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

E 4.2 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica e integrabile su $[0, 2\pi)$ e siano a_n e b_n i coefficienti di Fourier "reali" definiti in (4.12). Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (i) f è pari²⁰ $\implies \hat{f}_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} \iff b_n = 0, \forall n \geq 1$.
- (ii) f è dispari $\implies i\hat{f}_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} \iff a_n = 0, \forall n \geq 0$.
- (iii) Se f è C^1 allora (i) e (ii) valgono con " $\iff$ " al posto di " $\implies$ ".

E 4.3 Si calcolino i coefficienti di Fourier delle seguenti funzioni periodiche di periodo 2π i cui valori $f(x)$ per $x \in [-\pi, \pi)$ sono dati da:

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= x^k, \quad 1 \leq k \leq 4; & (2) f(x) &= |x|; & (3) f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k^2 x}{2^k}, \\ (4) f(x) &= e^x; & (5) f(x) &= e^x, \quad (0 < x \leq \pi) \text{ e } f \text{ dispari}; \\ (6) f(x) &= \sin^3 x; & (7) f(x) &= \cos^6 x; & (8) & \frac{\pi - x}{2}. \end{aligned}$$

E 4.4 Si calcolino i coefficienti di Fourier delle funzioni periodiche di periodo 2π i cui valori coincidono con i valori $f(x)$ elencati in (1)÷(8) dell'Esercizio 4.3 per $x \in [0, 2\pi)$.

²⁰Una funzione g definita su $\mathbb{R}^n$ si dice *pari* se $g(-x) = g(x)$, $\forall x$, e si dice *dispari* se $g(-x) = -g(x)$.

E 4.5 (i) Sia $u_n(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos n(t-x) dt$. Si studi la regolarità di $u \equiv \sum_{n \geq 1} u_n$ e se ne calcoli la serie di Fourier.

(ii) Come al punto (i) con $u_n(x) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos n(t-x) dt$.

C 4.6 Proposizione 4.15 Se $f \in C_{\text{per}}^0$ è C^1 a tratti²¹ allora $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n| < \infty$ e quindi la serie di Fourier di f converge totalmente a f .

Lemma 4.16 Se $f \in C_{\text{per}}^0$ è C^1 a tratti allora $(\widehat{f'})_n = in \hat{f}_n$.

Dimostrazione Siano $0 \leq a_1 < \dots < a_N < 2\pi$ i punti di salto di f' , e poniamo $a_0 \equiv 0$ e $a_{N+1} \equiv 2\pi$. Allora

$$\begin{aligned} (\widehat{f'})_n &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f' e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N+1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f' e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N+1} [f e^{-inx}]_{a_{k-1}}^{a_k} + \frac{in}{2\pi} \sum_{k=1}^{N+1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f e^{-inx} dx \\ &= \frac{in}{2\pi} \int_0^{2\pi} f e^{-inx} dx \equiv in \hat{f}_n, \end{aligned}$$

(si noti che poiché f è continua, la somma $\sum_{k=1}^{N+1} [f e^{-inx}]_{a_{k-1}}^{a_k}$ è una somma “telescopica” di cui resta la differenza tra l’ultimo ed il primo termine e tali termini si cancellano per la periodicità). ■

Dimostrazione (della Proposizione 4.15) Poiché f' è periodica e continua a tratti, f' è integrabile su $[0, 2\pi)$ e dunque dalla disuguaglianza di Bessel (punto (iv), Proposizione 4.7) segue che $\sum |(\widehat{f'})_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx < \infty$. Dunque dal Lemma e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per successioni segue che

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} |\hat{f}_n| &= \sum_{n \neq 0} (|\hat{f}_n| |n|) |n|^{-1} \leq \left(\sum_{n \neq 0} |\hat{f}_n|^2 |n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \neq 0} |n|^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{n \neq 0} |(\widehat{f'})_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \neq 0} |n|^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

E 4.7 Si dimostri che sotto le ipotesi del Lemma 4.11 di Dini si ha che

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^N \hat{f}_n e^{inx} = f(x)$$

ovvero che $\forall \varepsilon > 0$ esiste N_0 tale che per ogni $N, M \geq N_0$ si ha che $\left| \sum_{n=-M}^N \hat{f}_n e^{inx} - f(x) \right| < \varepsilon$.

²¹ Una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, con E intervallo di $\mathbb{R}$, è C^1 a tratti se esistono N punti in E $a_1 < \dots < a_N$ per cui $f \in C^1((a_{k-1}, a_k))$, per $2 \leq k \leq N$, ed esistono (finiti) i limiti, rispettivamente, da destra e da sinistra di f e f' in a_{k-1} ed a_k .

C 4.8 La seguente versione del Lemma 4.11 di Dini dà, sotto opportune ipotesi, informazioni sulla convergenza della serie di Fourier in punti dove $f(x)$ ha un salto. Ricordiamo prima le notazioni

$$f(x+) = \lim_{h \downarrow 0} f(x+h) \equiv \lim_{y \rightarrow x, y > x} f(y), \quad f(x-) = \lim_{h \uparrow 0} f(x+h) \equiv \lim_{y \rightarrow x, y < x} f(y).$$

Lemma 4.17 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π ed integrabile su $[0, 2\pi)$. Se $x \in [0, 2\pi)$ è tale che esistono i limiti $f(x\pm)$ e tale che la funzione

$$F(y) \equiv \begin{cases} \frac{f(x+y) - f(x+)}{y}, & \text{se } y > 0, \\ \frac{f(x+y) - f(x-)}{y}, & \text{se } y < 0, \\ 0, & \text{se } y = 0, \end{cases} \quad (4.34)$$

è integrabile in un intorno di zero, allora

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}. \quad (4.35)$$

Dimostrazione Sia

$$G(y) \equiv \begin{cases} \frac{f(x-y) - f(x-)}{e^{-iy} - 1}, & \text{se } y > 0, \\ \frac{f(x-y) - f(x+)}{e^{-iy} - 1}, & \text{se } y < 0, \\ 0, & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Dalle ipotesi fatte (ragionando in maniera analoga a quanto fatto nella dimostrazione del Lemma 4.11) segue che G è periodica ed integrabile su $[0, 2\pi)$. Seguendo lo schema della dimostrazione del Lemma 4.11 troviamo la relazione

$$f(x-y) - \chi_+(y)f(x-) - \chi_-(y)f(x+) = G(y)e^{-iy} - G(y) \quad (4.36)$$

dove

$$\chi_+(y) \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } y > 0, \\ 0, & \text{se } y \leq 0, \end{cases} \quad \chi_-(y) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } y \geq 0, \\ 1, & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Moltiplicando per $e^{-iny}/(2\pi)$ ed integrando tra $-\pi$ e π ambo i membri della (4.36), troviamo

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= \hat{G}_1 - \hat{G}_0 + \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, \\ \hat{f}_{-n} e^{-inx} &= \hat{G}_{n+1} - \hat{G}_n + f(x-) \frac{1 - e^{-in\pi}}{2\pi in} + f(x+) \frac{e^{in\pi} - 1}{-2\pi in} \quad (n \neq 0). \end{aligned}$$

Osservando che $e^{\pm in\pi} = (-1)^n$ si ha che

$$\sum_{0 < |n| \leq N} \frac{1 - e^{-in\pi}}{n} = \sum_{\substack{|n| \leq N \\ n \text{ dispari}}} \frac{2}{n} = 0, \quad \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{e^{in\pi} - 1}{n} = \sum_{\substack{|n| \leq N \\ n \text{ dispari}}} \frac{-2}{n} = 0.$$

Dunque $\sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} + \hat{G}_{N+1} - \hat{G}_N$ da cui (come nella dimostrazione del Lemma 4.11) segue l'asserto. ■

E 4.9 Si dimostri che se f è periodica e C^1 a tratti allora soddisfa le ipotesi del Lemma 4.17. Dunque nei punti dove f ha un salto (ma esistono i limiti da destra e da sinistra di f e f') la serie di Fourier vale la media del salto.

E 4.10 Sia $k \geq 2$ e sia $u(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^k}$. Si dimostri che $u \in C_{\text{per}}^{k-2}$ ma che $u \notin C_{\text{per}}^k$.

E 4.11 Sia f una funzione di periodo $T > 0$ integrabile su $[0, T)$. Si scrivano le formule rilevanti per l'analisi di Fourier.

5 Funzioni di n variabili reali

5.1 Norma, distanza euclidea e prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

Per continuare lo studio dell'analisi matematica in più dimensioni introduciamo la nozione di **norma euclidea**. Sia $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un punto (o elemento o vettore) di $\mathbb{R}^n$ e si definisca la sua norma euclidea come

$$|x| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} . \quad (5.1)$$

Ricordando la (0.5), è immediato verificare che la norma euclidea gode delle seguenti proprietà

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & |x| \geq 0 \quad \forall x \quad \text{e} \quad |x| = 0 \iff x = 0 , \\ \text{(ii)} \quad & |ax| = |a| |x| , \\ \text{(iii)} \quad & |x + y| \leq |x| + |y| ; \end{aligned} \quad (5.2)$$

qui x e y sono elementi di $\mathbb{R}^n$ mentre $a \in \mathbb{R}$ è uno scalare. La (ii) si chiama “proprietà di omogeneità”; la (iii) è chiamata “disuguaglianza triangolare” (si veda § 0). La (iii) è equivalente a¹

$$|u - v| \geq \left| |u| - |v| \right| , \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n . \quad (5.3)$$

Alla norma euclidea si associa la **distanza euclidea**, decretando che la distanza (euclidea) tra due punti x e y di $\mathbb{R}^n$ è data da

$$d(x, y) \equiv |x - y| . \quad (5.4)$$

Dalle (5.2) segue che $d(\cdot, \cdot)$ gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & d(x, y) \geq 0 \quad \text{e} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y , \\ \text{(ii)} \quad & d(x, y) = d(y, x) , \\ \text{(iii)} \quad & d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) ; \end{aligned} \quad (5.5)$$

qui x, y e z sono elementi di $\mathbb{R}^n$. Si noti, infine, che la norma euclidea è *indotta da un prodotto scalare* cioè

$$|x|^2 = x \cdot x \quad (5.6)$$

dove il prodotto scalare “ $\cdot$ ” è definito da

$$x \cdot y \equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i , \quad (5.7)$$

dove $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$, $y \equiv (y_1, \dots, y_n)$ sono elementi di $\mathbb{R}^n$.

¹Si ponga $x = u - v$ e $y = v$ oppure $x = v - u$ e $y = u$. Si noti il diverso significato delle barre in (5.3).

Osservazione 5.1 (i) Dato uno spazio vettoriale V una funzione $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ che verifichi (i)–(iii) di (5.2) si chiama **norma**²; se la funzione $\|\cdot\|$ verifica le proprietà (i)–(iii) di (5.2) *tranne* la proprietà “ $\|x\| = 0 \implies x = 0$ ”, $\|\cdot\|$ prende il nome di **seminorma**. Un esempio di seminorma che non sia una norma è data da $\mathbb{R}^2$ con $\|x\| \equiv |x_1|$. Uno spazio vettoriale dotato di norma si chiama **spazio normato**. Altri esempi di norme su $\mathbb{R}^n$ sono dati, come è facile verificare, dalla “norma 1” e dalla “norma ∞ ” (o anche “norma del sup”):

$$|x|_1 \equiv \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad |x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (5.8)$$

Si noti che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, valgono le seguenti relazioni fra le norme appena introdotte³:

$$|x|_\infty \leq |x| \leq \sqrt{n}|x|_\infty, \quad |x|_\infty \leq |x|_1 \leq n|x|_\infty, \quad |x| \leq |x|_1 \leq \sqrt{n}|x|. \quad (5.9)$$

Nel prossimo capitolo verranno discusse alcune norme su vari spazi vettoriali di particolare interesse per l'analisi matematica.

(ii) Dato un qualunque insieme X , una funzione $d(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ che verifichi (i)–(iii) di (5.5) si chiama **distanza** o **metrica**. Un insieme dotato di metrica prende il nome di **spazio metrico** (si veda anche 5.50).

(iii) Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ (ovvero con campo degli scalari dato da $\mathbb{R}$), un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineare, simmetrica e definita positiva⁴ prende il nome di **prodotto scalare** su V . Per maggiori informazioni sul prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ si veda 5.59.

5.2 Topologia standard di $\mathbb{R}^n$

La nozione di distanza permette di introdurre una **topologia in $\mathbb{R}^n$** che generalizza la topologia su $\mathbb{R}$ generata dagli intervalli⁵. Definiamo la **sfera aperta** di raggio $r > 0$ e centro $x_0 \equiv (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ come l'insieme

$$B_r(x_0) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}. \quad (5.10)$$

²Di solito, una norma su uno spazio vettoriale V si denota appunto con $\|x\|$ (dove x è un elemento di V). Nel caso di $\mathbb{R}^n$ e della norma euclidea, si usa spesso la notazione più semplice $|x|$; a volte (in altri testi) la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$ viene indicata con $\|x\|_2$ o anche con $|x|_2$.

³Le disuguaglianze nelle quali appare la norma ∞ sono ovvie; $|x| \leq |x|_1$ si verifica elevando al quadrato e $|x|_1 \leq \sqrt{n}|x|$ deriva dalla disuguaglianza di Cauchy (0.2) con $y_i = 1$.

⁴“Bilineare” significa che $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$ e $\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$ per ogni coppia di scalari a, b e per ogni $x, y, z \in V$; “simmetrica” significa che $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ per ogni $x, y \in V$; “definita positiva” significa che $\langle x, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in V$ e $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$.

⁵Una **topologia** su di un insieme arbitrario X è, per definizione, una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X (detti “insiemi aperti”) che goda delle seguenti proprietà: (i) X e $\emptyset$ appartengono a $\mathcal{A}$; (ii) un'unione arbitraria di elementi di $\mathcal{A}$ è un elemento di $\mathcal{A}$; (iii) un'intersezione finita di elementi di $\mathcal{A}$ è un elemento di $\mathcal{A}$. I complementari degli insiemi aperti si chiamano insiemi chiusi. Uno **spazio topologico** è una coppia $(X, \mathcal{A})$ con X insieme arbitrario e $\mathcal{A}$ è una topologia su X .

Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice **aperto** (rispetto alla topologia indotta dalla metrica $d(x, y) \equiv |x - y|$) se per ogni $x \in E$ esiste una sfera (aperta) $B_r(x)$ interamente contenuta in E ; per definizione, l'insieme vuoto $\emptyset$ è aperto. Un insieme è **chiuso** se è il complementare di un aperto (ovvero $C \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso se $C^c \equiv \mathbb{R}^n \setminus C$ è aperto). Dalla definizione data segue che un'unione (arbitraria) di insiemi aperti è un insieme aperto e (passando ai complementari) un'intersezione arbitraria di chiusi è un insieme chiuso⁶.

Dato un qualunque insieme E , la **chiusura** di E , denotato $\overline{E}$ è il più piccolo chiuso contenente E (ovvero è l'intersezione di tutti i chiusi contenenti E); l'**interno** di E , denotato $\overset{\circ}{E}$, è il più grande aperto contenuto in E (ovvero è l'unione di tutti gli aperti contenuti in⁷ E); la **frontiera** (insiemistica) di E , denotata ∂E , è l'insieme

$$\partial E \equiv \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}. \quad (5.11)$$

Un insieme $I \subset \mathbb{R}^n$ è un **intorno** di x se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset I$. Un punto x si dice **interno** ad E se $x \in \overset{\circ}{E}$ o, equivalentemente, se E è un intorno di x ; x è un **punto limite** (o "punto d'accumulazione") per E se ogni intorno di x contiene almeno un punto di E diverso da x (cioè se $\forall r > 0 \ B_r(x) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$); x è un **punto isolato** di E se esiste un intorno di x la cui intersezione con E è il solo punto x .

Anche la nozione di convergenza di successioni si generalizza immediatamente: una successione $\{x^{(k)}\}$ di punti in $\mathbb{R}^n$ ($x^{(k)} \equiv (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$) si dice **di Cauchy** (o "fondamentale") se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \quad |x^{(k)} - x^{(j)}| < \varepsilon \quad \forall k, j \geq N; \quad (5.12)$$

per definizione, una successione $\{x^{(k)}\}$ **converge** a x_0 (in formule $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x_0$) se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x^{(k)} - x_0| = 0. \quad (5.13)$$

Alcune proprietà elementari della topologia standard in $\mathbb{R}^n$ sono raccolte nella seguente

Proposizione 5.2 (i) Una successione in $\mathbb{R}^n$, $\{x^{(k)}\}$, è di Cauchy se e solo se sono di Cauchy (in $\mathbb{R}$) le n successioni $\{x_1^{(k)}\}, \dots, \{x_n^{(k)}\}$; $x^{(k)}$ converge a x se e solo se $x_i^{(k)}$ converge a x_i per ogni $1 \leq i \leq n$; $\mathbb{R}^n$ è completo⁸;

(ii) $E \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso se e solo se ogni successione di Cauchy in E ammette limite in E ;

(iii) per un qualunque insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, $(\overset{\circ}{E})^c = \overline{E^c}$.

⁶Il viceversa è, in generale, falso (Esercizio 5.3; è vero invece che un'unione finita di chiusi è chiusa e che un'intersezione finita di aperti è aperta (5.4).

⁷Chiaramente A è aperto se e solo se $A = \overset{\circ}{A}$ e C è chiuso se e solo se $C = \overline{C}$.

⁸Si ricorda che "X completo" vuol dire che ogni successione di Cauchy in X ammette limite in X .

(iv) per un qualunque insieme E , $x \in \partial E$ se e solo se ogni sfera aperta centrata in x contiene sia punti di E che punti di E^c , in formule: $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$.

Dimostrazione (i) le prime due affermazioni sono immediata conseguenza della⁹ (5.9); la completezza di $\mathbb{R}^n$ deriva dunque dalla completezza di $\mathbb{R}$.

(ii): sia E chiuso ed assumiamo (per assurdo) che esista una successione di Cauchy $\{x^{(k)}\} \subset E$ che non converga in E . Per la completezza di $\mathbb{R}^n$, esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E = E^c$ tale che $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$; poiché E^c è aperto esiste una sfera aperta $B_r(\bar{x}) \subset E^c$; ma dalla convergenza di $x^{(k)}$ a $\bar{x}$ segue che esiste N tale che $x^{(k)} \in B_r(\bar{x})$ per ogni $k \geq N$ il che contraddice l'assunzione che $\{x^{(k)}\} \subset E$. Questo dimostra il "solo se" di (ii). Per dimostrare il "se" assumiamo che "ogni successione di Cauchy in E ammetta limite in E " e supponiamo (per assurdo) che E non sia chiuso. " E non chiuso" è equivalente a " E^c non aperto" il che è a sua volta equivalente a " $\exists \bar{x} \in E^c$ tale che $\forall r > 0$ $B_r(\bar{x}) \cap E \neq \emptyset$ ". Scegliendo $r = 1/k$ con $k \in \mathbb{N}$, si avrebbe che $\exists x^{(k)} \in B_{1/k}(\bar{x}) \cap E$ il che vuol dire che la successione $\{x^{(k)}\} \subset E$ converge a $\bar{x} \notin E$ e (poiché ogni successione convergente è di Cauchy) questo contraddice l'assunzione fatta.

(iii): per definizione di $\overset{\circ}{E}$, $\overset{\circ}{E} \subset E$ e passando ai complementari $E^c \subset (\overset{\circ}{E})^c$ e poiché $(\overset{\circ}{E})^c$ è chiuso dalla definizione di chiusura d'un insieme segue che $\overline{E^c} \subset (\overset{\circ}{E})^c$. D'altra parte $E^c \subset \overline{E^c}$ e quindi $A \equiv (\overline{E^c})^c \subset E$; poiché A è aperto, dalla definizione di interno d'un insieme segue che $(\overline{E^c})^c \subset \overset{\circ}{E}$ ovvero $(\overset{\circ}{E})^c \subset \overline{E^c}$.

(iv): l'asserto deriva subito dal punto (iii); infatti $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = \overline{E} \cap (\overset{\circ}{E})^c = \overline{E} \setminus \overline{E^c}$.

■

5.3 Compattezza in $\mathbb{R}^n$

Un insieme K si dice **compatto** se da ogni ricoprimento di aperti si può estrarre un sottoricoprimento finito ovvero, in formule,

$$(a) \quad K \subset \bigcup_{\alpha \in A} E_{\alpha}, \quad E_{\alpha} \text{ aperto} \implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in A : K \subset \bigcup_{i=1}^k E_{\alpha_i};$$

qui A è un insieme arbitrario (e quindi non necessariamente numerabile) di indici.

Siano, ora, (b) e (c) le seguenti proprietà:

$$(b) \quad \forall \{x^{(k)}\} \subset K, \exists \{k_j\} \text{ e } x_0 \in K : \lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = x_0;$$

$$(c) \quad K \text{ è chiuso e limitato};$$

⁹Assumendo la (5.12), da (5.9) segue che, per ogni i , $|x_i^{(k)} - x_i^{(j)}| \leq \sup_i |x_i^{(k)} - x_i^{(j)}| = \|x^{(k)} - x^{(j)}\|_{\infty} < \varepsilon$; viceversa, se le $\{x_i^{(k)}\}_{k \geq 0}$ sono successioni di Cauchy in $\mathbb{R}$ e se ε è un numero positivo $\exists N$ tale che $|x_i^{(k)} - x_i^{(h)}| < \varepsilon/\sqrt{n}$, $\forall h, k \geq N$ e $\forall 1 \leq i \leq n$. Questo implica che $\|x^{(k)} - x^{(h)}\|_{\infty} < \varepsilon/\sqrt{n}$ ma poiché $|x| \leq \sqrt{n}|x|_{\infty}$ [si veda (5.9)] si ha che $\|x^{(k)} - x^{(h)}\| < \varepsilon$ ovvero $\{x^{(k)}\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$ (nella topologia standard).

si ricorda che un insieme si dice limitato se esiste una sfera che lo contiene; la (b) viene a volte chiamata “compattezza per successioni”.

Teorema 5.3 (Bolzano, Borel, Heine, Pincherle, Weierstrass)

Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Allora le proprietà (a), (b) e (c) sopra elencate sono equivalenti.

Dimostrazione Dimostriamo le implicazioni: (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) $\implies$ (a).

(a) $\implies$ (b): assumiamo per assurdo che valga (a) e non valga (b) ovvero che $\exists x^{(k)} \in K$ per cui l'insieme $\{x^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ non ha punti limite in K . Dunque per ogni $x \in K$, esistono una sfera aperta E_x di centro x ed un intero $k(x) \geq 0$ tale che $x^{(k)} \notin E_x$ per ogni $k \geq k(x)$. Essendo $\{E_x : x \in K\}$ un ricoprimento aperto di K , per (a), si ha che esistono k punti in K , $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$, tali che $K \subset \bigcup_{i=1}^k E_{x^{(i)}}$. Ma se $k_0 \equiv \max\{k(x^{(i)}) : 1 \leq i \leq k\}$ si ha, per costruzione, che $x^{(k_0)} \notin E_{x^{(i)}}$ per ogni $1 \leq i \leq k$ il che significa che $x^{(k_0)} \notin K$; ma questo contraddice l'assunzione $\{x^{(k)}\} \subset K$.

(b) $\implies$ (c): assumiamo per assurdo che valga (b) e non valga (c) ovvero che K è non limitato oppure non chiuso. Se K è non limitato esistono $x^{(k)} \in K$ tali che $|x^{(k)}| \rightarrow \infty$ e chiaramente ogni sottosuccessione $\{x^{(k_j)}\} \subset \{x^{(k)}\}$ è anche tale che $\lim_{j \rightarrow \infty} |x^{(k_j)}| = \infty$ il che contraddice (b). Se K non è chiuso, esiste $\bar{x} \in \bar{K} \setminus K$ ossia esiste una successione $\{x^{(k)}\} \subset K$ tale che $x^{(k)} \rightarrow \bar{x} \notin K$. Chiaramente ogni sottosuccessione $\{x^{(k_j)}\} \subset \{x^{(k)}\}$ è anche tale che $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = \bar{x}$ il che, nuovamente, contraddice (b).

(c) $\implies$ (a): assumiamo per assurdo che valga (c) e non valga (a) ovvero che esista un ricoprimento aperto $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di K da cui non si possa estrarre alcun sottoricoprimento finito di K . Poiché K è limitato esiste un cubo¹⁰ (chiuso) $Q_0 \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_\infty \leq R\}$ che contiene K al suo interno. Suddividiamo il cubo Q_0 in 2^n cubi uguali. Almeno uno di questi cubi, la cui chiusura verrà denotata Q_1 , è tale che $Q_1 \cap K$ è non vuoto e non può essere ricoperto da alcun sottoricoprimento finito di $\{E_\alpha\}$. Ripetendo tale costruzione otteniamo una famiglia di cubi chiusi $Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$, con lato di $Q_i \equiv R \cdot 2^{-i}$, e tali che $Q_i \cap K$ è non vuoto e non è contenuto in alcun sottoricoprimento finito di $\{E_\alpha\}$. Se per ogni i scegliamo un punto $x^{(i)} \in Q_i \cap K$, allora la successione $\{x^{(i)}\}$ è di Cauchy¹¹ e per la completezza di $\mathbb{R}^n$ esiste x_0 tale che $x^{(i)} \rightarrow x_0$. Poiché K è chiuso si ha che $x_0 \in K$. Quindi esiste un α_0 tale che $x_0 \in E_{\alpha_0}$. Ed essendo E_{α_0} aperto ne segue che esiste una sfera di centro x_0 tutta contenuta in E_{α_0} . Ma allora esiste N tale che $Q_N \subset E_{\alpha_0}$ e quindi anche $Q_N \cap K \subset E_{\alpha_0}$ e questo contraddice il fatto che, per ogni i , $Q_i \cap K$ non è contenuto in alcun sottoricoprimento finito di $\{E_\alpha\}$. ■

¹⁰Un cubo in $\mathbb{R}^n$ è un insieme della forma $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0|_\infty < r\}$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e qualche $r > 0$; per $n = 1$ un “cubo” è un intervallo aperto di centro x_0 e lunghezza $2r$, per $n = 1$ un “cubo” è un quadrato di centro x_0 e lato $2r$ etc.

¹¹Poiché la distanza massima tra due punti in un cubo di $\mathbb{R}^n$ di lato ℓ è $\sqrt{n}\ell$, se $j > i$, allora $x^{(j)}, x^{(i)} \in Q_i$ e quindi $|x^{(j)} - x^{(i)}| \leq \sqrt{n}R2^{-i}$.

5.4 Connessione in $\mathbb{R}^n$

Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ si dice **sconnesso** se esistono due insiemi aperti A e B tali che se $A_E \equiv A \cap E$ e $B_E \equiv B \cap E$ allora

$$A_E \neq \emptyset, \quad B_E \neq \emptyset, \quad A_E \cap B_E = \emptyset, \quad E = A_E \cup B_E. \quad (5.14)$$

Un insieme è **connesso** se non è sconnesso.

Osservazione 5.4 (i) Ricordando la definizione di topologia data nella nota 5 di questo capitolo, si ha che, dato un qualunque insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, la famiglia di sottoinsiemi di E data da $\mathcal{A} \equiv \{B = A \cap E : A \text{ è un aperto di } \mathbb{R}^n\}$ è una *topologia* su E : tale topologia prende il nome di **topologia relativa** o “topologia indotta (dalla topologia standard)”. Quindi E è *sconnesso* se è l'unione disgiunta di due aperti non vuoti nella topologia relativa.

(ii) Un esempio di insieme sconnesso di $\mathbb{R}^n$ è dato da $\mathbb{Z}^n$ (basta prendere come A la sfera centrata nell'origine di raggio $1/3$ e come B l'insieme dei punti x con $|x| > 1/2$).

Un semplice criterio per verificare la connessione è basato sulla nozione di “connessione per curve”. Per definire le curve in $\mathbb{R}^n$ abbiamo bisogno della seguente (naturale) definizione: una funzione di una variabile reale a valori in $\mathbb{R}^n$,

$$t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow z(t) \equiv (z_1(t), \dots, z_n(t)) \in \mathbb{R}^n,$$

si dice **continua** in $t_0 \in I$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |z(t) - z(t_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \in I \text{ con } |t - t_0| < \delta; \quad (5.15)$$

$z(t)$ è continua in I , ovvero $z \in C(I, \mathbb{R}^n)$, se z è continua in ogni¹² $t_0 \in I$. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ una **curva** in E è un insieme della forma

$$\Gamma \equiv \{z \in \mathbb{R}^n : z = z(t) \text{ per } a \leq t \leq b\} \quad (5.16)$$

dove $z \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$; i punti $z(a)$ e $z(b)$ si chiamano gli **estremi** della curva¹³ Γ . Un esempio (banale) di curva in E è data da $\Gamma \equiv \{x_0\}$ con $x_0 \in E$ (essendo la funzione $t \in [0, 1] \rightarrow z(t) \equiv x_0$ chiaramente continua). Esempi più interessanti sono dati da un **segmento** in $E \subset \mathbb{R}^n$ di estremi x e y ovvero dall'insieme

$$P(x, y) \equiv \{z \in \mathbb{R}^n : z = x + t(y - x), \quad t \in [0, 1]\}, \quad (5.17)$$

o, più in generale, da una **poligonale** di estremi x e y e “vertici successivi” $x^{(0)} \equiv x$, $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \equiv y$, ovvero dall'insieme

$$P(x^{(0)}, \dots, x^{(k)}) \equiv \bigcup_{i=1}^k P(x^{(i-1)}, x^{(i)}). \quad (5.18)$$

¹² Da (5.9) segue subito che $z \in C(I, \mathbb{R}^n)$ con $I \subset \mathbb{R}$, se e solo se le n componenti di z , $z_i(t)$ per $1 \leq i \leq n$, sono (funzioni scalari di variabile reale) continue su I .

¹³ La funzione z che realizza la curva Γ viene chiamata un **cammino**; in altri termini un “cammino in $E \subset \mathbb{R}^n$ ” è semplicemente una funzione $z \in C([a, b], E)$.

Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice **connesso per curve** (rispettivamente, “per poligoni”) se per ogni $x, y \in E$, esiste una curva (rispettivamente, “una poligonale”) di estremi x e y tutta contenuta in E .

Proposizione 5.5 (i) Un insieme di $\mathbb{R}^n$ connesso per curve è connesso. (ii) Un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ connesso è connesso per poligoni.

Esempio 5.6 (i) Un qualunque insieme convesso¹⁴ di $\mathbb{R}^n$ è connesso (essendo connesso per poligoni).

(ii) L'anello $\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$ è connesso per poligoni¹⁵.

(iii) La circonferenza $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ è un insieme connesso (essendo connesso per curve) ma non connesso per poligoni.

(iv) Sia $E_0 \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$ e $E_1 \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \frac{1}{\pi}, y = \sin \frac{1}{x}\}$. L'insieme in $\mathbb{R}^2$ dato da $E \equiv E_0 \cup E_1$ è connesso ma non è connesso per curve¹⁶.

Per dimostrare la parte (ii) della Proposizione 5.5 avremo bisogno del seguente semplice risultato:

Lemma 5.7 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto non vuoto e sia $x \in E$. L'insieme $W_x \equiv \{y \in E \text{ tale che esiste una poligonale in } E \text{ di estremi } x \text{ e } y\}$ è un insieme aperto.

Dimostrazione Se $y \in W_x$ esiste una poligonale $P(x, \dots, y)$ tutta contenuta in E di estremi x e y . In particolare $y \in E$. Poiché E è aperto esiste una sferetta U di centro y tutta contenuta in E . Ma per ogni $z \in U$ il segmento $P(y, z) \subset U$ e quindi la poligonale $P(x, \dots, y, z) \equiv P(x, \dots, y) \cup P(y, z)$ è tutta contenuta in E . Questo significa che $U \subset W_x$ e cioè la tesi. ■

Dimostrazione (della Proposizione 5.5) (i) Si supponga, per assurdo, che $E \subset \mathbb{R}^n$ sia connesso per curve e sconnesso e mostriamo che si perviene ad una contraddizione. Siano A e B due aperti per cui valga (5.14). Sia $x \in A_E$ e $y \in B_E$. Per ipotesi esiste una curva $\Gamma \equiv \{z(t) : a \leq t \leq b\}$ tutta contenuta in E con $z(a) = x$ e $z(b) = y$. Sia

$$I \equiv \{\tau \geq a : z(t) \in A_E, \forall t \in [a, \tau]\} \quad \text{e} \quad t_0 \equiv \sup I.$$

Chiaramente $a \in I$ (e quindi $I \neq \emptyset$). Inoltre $z(t_0) \notin A$: infatti, se fosse $z(t_0) \in A$ esisterebbe una sferetta aperta $U \subset A$ di centro $z(t_0)$ e per la continuità di $z(t)$ in $t_0 \in [a, b]$ esisterebbe un $\delta > 0$ tale che $z(t) \in U \subset A$ per ogni $t \in [a, b]$ con $|t - t_0| < \delta$; ma se fosse $t_0 = b$ allora $z(b) \in A_E$ e questo contraddirebbe l'ipotesi

¹⁴ Si ricorda che $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se presi comunque due punti in E il segmento $P(x, y)$ che li unisce è tutto contenuto in E .

¹⁵ Esercizio 5.6.

¹⁶ Esercizio 5.7.

che $z(b) \in B_E$ e d'altra parte se $t_0 < b$ esisterebbe un $t' \in (t_0, b)$ con $z(t') \in A_E$ e questo contraddirebbe la definizione di t_0 . Quindi $z(t_0) \in \partial A_E$. Inoltre, $z(t_0)$ è in $E = A_E \cup B_E$ e quindi $z(t_0) \in B_E$. Essendo B un aperto esiste una sferetta V centrata in $z(t_0)$ tutta contenuta in B e, ragionando come sopra, si trova un $\delta' > 0$ tale che $z(t) \in V$ per $|t - t_0| < \delta'$. Ma allora esisterebbe un $\bar{t} \in (t_0 - \delta', t_0)$ per cui $z(\bar{t}) \in V$ e quindi $z(\bar{t}) \in B_E$ ma questo contraddice la definizione di t_0 .

(ii) Dimostriamo l'implicazione equivalente: " E aperto e sconnesso per poligonalità" implica " E sconnesso". Dire che E è sconnesso per poligonalità è equivalente a dire che esistono x e y in E che non possono essere gli estremi di alcuna poligonale tutta contenuta in E . Siano allora $A \equiv W_x$ e $C \equiv W_y$ gli insiemi dei punti unibili tramite poligonale, rispettivamente, a x ed a y : tali insiemi sono, per il Lemma 5.7, sottoinsiemi aperti di E . Secondo la nostra ipotesi $A \cap C = \emptyset$ (se $z \in A \cap C$ significa che esistono due poligonalità P e P' in E che uniscono, rispettivamente, x con z e y con z ; ma allora la poligonale $P \cup P' \subset E$ unirebbe x e y contrariamente alla nostra ipotesi). Sia ora $D \equiv E \setminus (A \cup C)$. Se $D = \emptyset$ avremmo l'asserto (essendo A e C insiemi aperti disgiunti e non vuoti e $E = A \cup C$). Se D è non vuoto fissiamo $z \in D$. Poiché $D \subset E$ ed E è aperto, esiste una sferetta V centrata in z e tutta contenuta in E . La sfera V non può contenere punti di A o di C (altrimenti, ragionando come sopra, potremmo trovare una poligonale che unisce z con x o con y contravvenendo la definizione di D come l'insieme dei punti che non possono essere uniti tramite poligonalità in E con x o con y). Ma questo significa che $V \subset D$ e cioè che D è aperto. Ponendo $B \equiv C \cup D$ si ottiene l'asserto poiché $A \cap B = \emptyset$, $x \in A_E$, $y \in B_E$ e $E = A \cup B$. ■

5.5 Funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

La nozione di continuità per funzioni vettoriali di n variabili si dà nella maniera ovvia: una funzione $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice **continua** in $x_0 \in E$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in E \text{ con } |x - x_0| < \delta. \quad (5.19)$$

La funzione f si dirà **continua su E** , ovvero $f \in C(E, \mathbb{R}^m)$, se è continua in ogni punto x_0 di E . La seguente proposizione raccoglie alcuni risultati elementari sulle funzioni continue.

Proposizione 5.8 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$.

(i) f è continua in $x_0 \in E$ se e solo se

$$\forall \{x^{(k)}\} \subset E \quad \text{tale che} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x_0 \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f(x_0). \quad (5.20)$$

(ii) f è continua su E se e solo se per ogni aperto $I \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(I)$ è un aperto nella topologia relativa di¹⁷ E .

(iii) Se E è compatto e f è continua su E allora $f(E)$ è compatto.

¹⁷Ovvero, esiste A aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che $f^{-1}(I) = A \cap E$.

(iv) Se E è connesso e f è continua su E allora $f(E)$ è connesso.
 (v) Siano f, g funzioni continue in $x_0 \in E$ ed a valori in $\mathbb{R}^m$ e sia $h: I \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ continua in $y_0 \in I$. Allora: $f + g$ è continua in x_0 ; se $f(x_0) = y_0$, $h \circ f$ è continua in x_0 ; nel caso $m = 1$, fg è continua in x_0 ; nel caso $m = 1$ e $f(x_0) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ è continua in x_0 .

Dimostrazione (i): Assumiamo (5.19) e fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia $\{x^{(k)}\} \subset E$ tale che $x^{(k)} \rightarrow x_0$. Allora esiste k_0 tale che $|x^{(k)} - x_0| < \delta$ per ogni $k \geq k_0$ e, per (5.19), $|f(x^{(k)}) - f(x_0)| < \varepsilon$ (per $k \geq k_0$) il che implica (5.20).

Per il viceversa dimostriamo che se non vale (5.19) allora non vale (5.20). La negazione di (5.19) implica che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni k possiamo trovare $x^{(k)} \in E$ per cui $|x^{(k)} - x_0| < 1/k$ e $|f(x^{(k)}) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Ma allora $x^{(k)} \rightarrow x_0$ e $|f(x^{(k)}) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ il che dimostra che non vale (5.20).

(ii) Supponiamo che f sia continua su E e sia I un aperto di $\mathbb{R}^m$ tale che $f^{-1}(I) \neq \emptyset$ (altrimenti non c'è nulla da verificare essendo $\emptyset$ un aperto). Sia x_0 tale che $f(x_0) = y_0 \in I$. Poiché I è aperto esiste una sfera aperta J di centro y_0 e raggio r interamente contenuta in I . Da (5.19) con $\varepsilon = r$ segue che l'insieme $A_{x_0} \equiv E \cap B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(I)$. Per definizione A_{x_0} è un aperto nella topologia relativa di E , ma (poiché x_0 era un punto arbitrario) questo è equivalente a dire che $f^{-1}(I)$ è aperto (sempre nella topologia relativa).

Assumiamo ora che per ogni aperto $I \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(I)$ sia un aperto nella topologia relativa. Sia $x_0 \in E$, sia $\varepsilon > 0$ e sia $y_0 \equiv f(x_0)$. Per la nostra ipotesi $B \equiv f^{-1}(\{y : |y - y_0| < \varepsilon\})$ è un aperto nella topologia relativa di E ovvero (per definizione) esiste A aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che $B = A \cap E$. Essendo $x_0 \in A$ e A aperto esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset A$ quindi $B_\delta(x_0) \cap E \subset B$ il che significa che vale (5.19).

(iii) Sia $\{y^{(k)}\}$ una successione in $f(E)$: ovvero esistono $x^{(k)} \in E$ tali che $f(x^{(k)}) = y^{(k)}$. Per la compattezza di E e per il Teorema 5.3, esiste $x^{(k_j)} \rightarrow \bar{x} \in E$. Dal punto (ii) segue allora che $y^{(k_j)} = f(x^{(k_j)}) \rightarrow f(\bar{x}) \equiv \bar{y} \in f(E)$ il che (sempre per il Teorema 5.3) significa che $f(E)$ è compatto.

(iv) Dimostriamo l'affermazione equivalente: " $f(E)$ sconnesso $\implies E$ sconnesso". Se $f(E)$ è sconnesso esistono due aperti I e J tali che $J \cap f(E) \neq \emptyset \neq I \cap f(E)$, $I \cap J \cap f(E) = \emptyset$ e $f(E) = f(E) \cap (I \cup J)$. Per il punto (ii), gli insiemi $A \equiv f^{-1}(I)$ e $B \equiv f^{-1}(J)$ sono aperti non vuoti nella topologia relativa di E ed inoltre (come è immediato verificare dalle posizioni fatte) $A \cap B = \emptyset$ e $E = A \cup B$ e dunque E è sconnesso.

(v) Le affermazioni sono conseguenza immediata del punto (i) e dei teoremi noti sulle successioni di numeri reali. ■

Osservazione 5.9 Il caso scalare è particolarmente importante:

La funzione vettoriale $f: x \in E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow f(x) \equiv (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ è continua in $x_0 \in E$ se e solo se sono continue in x_0 le m funzioni scalari $f_i: E \rightarrow \mathbb{R}$. Infatti, assumendo la (5.19), da (5.9) segue che, per ogni $1 \leq i \leq m$, $|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \sup_i |f_i(x) - f_i(x_0)| = \|f(x) - f(x_0)\|_\infty \leq \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$; viceversa, se le f_i sono funzioni continue e se ε è

un numero positivo $\exists \delta > 0$ tale che $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon/\sqrt{m}$, $\forall x \in E$ con $|x - x_0| < \delta$. Questo implica che $|f(x) - f(x_0)|_\infty < \varepsilon/\sqrt{m}$ e da (5.9) segue che $|f(x) - f(x_0)| \leq \sqrt{m}|f(x) - f(x_0)|_\infty < \varepsilon$.

Esempio 5.10 In vista dell'osservazione precedente, considereremo solo funzioni scalari.

(i) La funzione $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow |x| \in \mathbb{R}$ è continua su $\mathbb{R}^n$.

Infatti, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \varepsilon > 0$, se $|x - x_0| < \delta \equiv \varepsilon$, da (5.3) segue che $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \varepsilon$.

(ii) Sia $1 \leq i \leq n$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow g(x_i)$ è una funzione continua su $\mathbb{R}^n$. In particolare $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow x_i^m$, con $m \in \mathbb{N}$, è una funzione continua su $\mathbb{R}^n$.

Infatti, $x \rightarrow x_i$ è continua (essendo, per ogni x_0 e ε , $|x_i - x_{0i}| \leq |x - x_0| < \varepsilon$ se $\delta \equiv \varepsilon$) e l'affermazione deriva dal punto (v) della Proposizione 5.8.

(iii) La funzione $f: x \in \mathbb{R}^4 \rightarrow 1 + x_1x_2 + 3x_3x_4^5 \in \mathbb{R}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^4$. Più in generale ogni polinomio su¹⁸ $\mathbb{R}^n$ è continuo su tutto $\mathbb{R}^n$.

L'affermazione deriva dal punto precedente e dal punto (v) della Proposizione 5.8.

(iv) La funzione $f: x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \frac{e^{(x_1x_3)}}{\sqrt{1+x_2}} + |x|^{\sqrt{2}}$ è continua sul suo insieme di definizione, ovvero su $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 > -1\}$.

L'affermazione deriva dai punti (i) e (ii) precedenti e dal punto (v) della Proposizione 5.8.

(v) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La funzione $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x, y) \equiv \begin{cases} \frac{|x|y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e non è continua in $(0, 0)$.

Infatti, la continuità su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ è conseguenza del punto (ii) qui sopra e del punto (v) della Proposizione 5.8. Per dimostrare che f non è continua in $(0, 0)$, per il punto (i) della Proposizione 5.8, basta trovare una successione $(x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$ tale che $f(x_k, y_k) \not\rightarrow \alpha$. Se $\alpha = 0$, possiamo scegliere $(x_k, y_k) = (1/k, 1/k)$ mentre se $\alpha \neq 0$ possiamo scegliere¹⁹ $(x_k, y_k) \equiv (1/k, 1/k^2)$.

Un risultato notevole del caso unidimensionale che si estende invariato al caso di funzioni scalari di n variabili reali è il seguente “teorema di Weierstrass”

Teorema 5.11 Sia E un insieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su E . Allora f assume massimo e minimo in E .

Dimostrazione Sia $M = \sup_{x \in E} f(x)$; dalla definizione di estremo superiore segue che possiamo scegliere una successione, $\{x^{(k)}\}$ in E tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) =$

¹⁸Un monomio su $\mathbb{R}^n$ è una funzione della forma $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ dove $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono numeri interi non negativi; la somma $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ definisce il *grado* del monomio; un polinomio su $\mathbb{R}^n$ è una combinazione lineare (a coefficienti in $\mathbb{R}$) di monomi su $\mathbb{R}^n$; il grado massimo dei monomi che costituiscono un polinomio definisce il grado del polinomio.

¹⁹ $f(1/k, 1/k) = 1/2$; $f(1/k, 1/k^2) = k/(1+k^2) \rightarrow 0$.

M . Per il Teorema 5.3 possiamo trovare una sottosuccessione $\{x^{(k_j)}\}$ convergente ad un punto $x \in E$. Allora per la continuità di f segue che $M = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x^{(k_j)}) = f(x)$. Per il minimo si ragiona analogamente. ■

La nozione di uniforme continuità si generalizza immediatamente al caso di funzioni di n variabili. Una funzione $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice **uniformemente continua** su E se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in E \text{ con } |x - y| < \delta. \quad (5.21)$$

Vale allora il seguente “teorema di Heine–Cantor”:

Teorema 5.12 *Sia E un insieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua su E . Allora f è uniformemente continua su E .*

Dimostrazione Procediamo per assurdo usando la caratterizzazione (b) usata nel Teorema 5.3. La negazione di uniforme continuità si legge:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall \delta > 0 \exists x, y \text{ con } |x - y| < \delta \text{ tali che } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon, \quad (5.22)$$

(naturalmente x e y dipendono da ε e δ e quest'ultimo è arbitrario). Se scegliamo $\delta = \frac{1}{k}$, otteniamo che esistono $x^{(k)}$ e $y^{(k)}$ tali che $|x^{(k)} - y^{(k)}| < \frac{1}{k}$ e $|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})| \geq \varepsilon$. Poiché E è compatto possiamo estrarre una sottosuccessione $\{x^{(k_j)}\}$ convergente in E ed una altra sottosuccessione $\{y^{(k_j)}\}$, con $\{k_j\} \subset \{k'\}$, anch'essa convergente in E : poiché $\{k_j\}$ è stata estratta da $\{k'\}$, si ha che anche $\{x^{(k_j)}\}$ converge in E . Poiché $|x^{(k_j)} - y^{(k_j)}| < \frac{1}{k_j}$ segue che $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} y^{(k_j)}$; sia $z \in E$ tale limite comune. Allora $\lim |f(x^{(k_j)}) - f(y^{(k_j)})| = |f(z) - f(z)| = 0$ (per la continuità di f) e questo contraddice il fatto che $|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})| \geq \varepsilon$ per ogni k . ■

Il Teorema di Heine–Cantor ha un “viceversa” parziale:

Proposizione 5.13 *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uniformemente continua su E . Allora esiste un'unica funzione $\bar{f}$ continua su $\bar{E}$ tale che $\bar{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$.*

In altri termini la classe delle funzioni uniformemente continue su di un insieme limitato E coincide con le restrizioni delle funzioni continue sulla chiusura di E .

La dimostrazione è basata sulle seguenti naturali nozioni:

Definizione 5.14 *Sia $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e, dato $x_0 \in \bar{E}$ sia $E_\delta(x_0) \equiv B_\delta(x_0) \cap E \equiv \{x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta\}$; $\alpha \in \mathbb{R}^m$ è il limite di f per x che tende a x_0 , $\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - \alpha| < \varepsilon, \quad \forall x \in E_\delta(x_0). \quad (5.23)$$

Nel caso $m = 1$, si definiscono, rispettivamente, il limite superiore (o “massimo limite”) e il limite inferiore (o “minimo limite”) di f quando x tende a x_0 i numeri

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \equiv \inf_{\delta > 0} \sup_{x \in E_\delta} f(x), \quad \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \equiv \sup_{\delta > 0} \inf_{x \in E_\delta} f(x). \quad (5.24)$$

Ovviamente, se x_0 è un punto d'accumulazione in E allora f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ e (nel caso $m = 1$) esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ se e solo se $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Lemma 5.15 Se $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è uniformemente continua su E allora, per ogni $x \in \partial E$, esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Dimostrazione Consideriamo dapprima il caso $m = 1$. Sia $x_0 \in \partial E$ e siano

$$-\infty \leq \alpha \equiv \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \beta \equiv \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \infty.$$

Siano $x^{(k)} \in E$ e $y^{(k)} \in E$ tali che $x^{(k)} \rightarrow x_0$, $y^{(k)} \rightarrow x_0$, $f(x^{(k)}) \rightarrow \alpha$ e $f(y^{(k)}) \rightarrow \beta$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e supponiamo valida (5.21). Sia, ora, N tale che $x^{(k)}, y^{(k)} \in B_{\delta/2}(x_0)$ per ogni $k \geq N$ cosicché, per ogni h e $k \geq N$, $|x^{(h)} - x^{(k)}| \leq |x^{(h)} - x_0| + |x_0 - x^{(k)}| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$. Dunque, per ogni $h, k \geq N$ si ha $|f(x^{(h)}) - f(x^{(k)})| < \varepsilon$, il che implica (mandando prima h e poi k a ∞) che $|\alpha - \beta| \leq \varepsilon$. Essendo ε arbitrario $\alpha = \beta$ il che è equivalente alla tesi (nel caso $m = 1$).

Il caso generale ($m \geq 1$) segue immediatamente osservando che le componenti di f , f_i per $1 \leq i \leq m$, sono uniformemente continue su E e dire che esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x)$ per ogni $1 \leq i \leq m$ equivale a dire che esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$: per costruzione $\tilde{f}$ è continua su $\bar{E}$. ■

Dimostrazione (della Proposizione 5.13) Basta definire $\tilde{f}(x)$ come $f(x)$ se $x \in E$ e come il $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ se $x \in \partial E$. ■

Osservazione 5.16 Gran parte della teoria sviluppata nel § 1 si estende immediatamente a funzioni vettoriali di più variabili. In particolare la **definizione di convergenza uniforme** di una serie o di una successione di funzioni definite su $E \subset \mathbb{R}^n$ ed a valori in $\mathbb{R}^m$ è identica alle²⁰ Definizioni 1.1 e 1.8; analogamente i Teoremi 1.4 e 1.9 valgono (enunciati e dimostrazioni) anche nel presente caso. Anche la nozione di **convergenza totale** (Definizione 1.7) si estende al presente caso e naturalmente, come nel caso unidimensionale, la convergenza totale (più facile da controllare negli esempi) implica la convergenza uniforme. Ad esempio la serie $\sum_{k \geq 0} u_k$ con $u_k : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow u_k(x) \equiv e^{-kx_1} \cos|x|^k$ converge totalmente (e quindi uniformemente) su²¹ $E \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq a\}$ con $a > 0$ e definisce (Teorema 1.4) una funzione $u(x) \equiv \sum_k u_k(x)$ continua su E .

²⁰Naturalmente, nel presente caso le “barrette” vanno interpretate come norma euclidea ed inoltre sarà opportuno chiamare l'indice “muto” di somma k (ad esempio) e non n per non confonderlo col numero delle dimensioni.

²¹Essendo $|u_k(x)| \leq e^{-ka}$ su E , si ha che $\sum \sup_E |u_k| \leq \sum e^{-ka} = 1/(1 - e^{-a}) < \infty$.

5.6 Funzioni differenziabili da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$

In questo e nei prossimi sei paragrafi considereremo *funzioni scalari di n variabili reali*.

Sia $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con E aperto. Fissiamo un punto $x_0 \equiv (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in E$ e consideriamo la funzione di *una variabile* $x_1 \rightarrow f(x_1, x_{02}, \dots, x_{0n})$ al variare di x_1 in un intervallino attorno a x_{01} . Possiamo chiederci se tale funzione di una variabile sia derivabile in x_{01} e nel caso in cui tale funzione sia derivabile, chiameremo il limite così ottenuto, *la derivata parziale rispetto a x_1* della funzione f nel punto x_0 . Naturalmente possiamo fare la stessa cosa sostituendo la prima variabile x_1 con una qualunque delle altre variabili x_i per $i = 1, \dots, n$. In generale **la derivata parziale di f rispetto a x_i** nel punto x_0 è la derivata (qualora esista) della funzione $x_i \rightarrow f(x_{01}, \dots, x_i, \dots, x_{0n})$ nel punto x_{0i} , tale derivata si denota

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0i} + h, \dots, x_{0n}) - f(x_0)}{h} . \quad (5.25)$$

Esempio 5.17 Se²² $f(x, y) = x^2 y^3 - \sin x$, e $(x_0, y_0) = (1, -2)$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= (2xy^3 - \cos x) |_{(x_0, y_0)} = -16 - \cos 1 , \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= 3x^2 y^2 |_{(x_0, y_0)} = 12 . \end{aligned}$$

Se $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $x \neq 0$,

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|} . \quad (5.26)$$

Altre notazioni usate frequentemente per la derivata parziale di f rispetto a x_i sono:

$$\partial_{x_i} f , \quad f_{x_i} , \quad D_i f . \quad (5.27)$$

Data una funzione f di n variabili a valori in $\mathbb{R}$ che abbia tutte le derivate parziali in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'elenco ordinato di tale derivate parziali forma un vettore ad n componenti che prende il nome di **gradiente** di f (nel punto x_0) e si denota con una delle seguenti equivalenti notazioni

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) , \quad \nabla f(x_0) , \quad f'(x_0) , \quad f_x(x_0) , \quad \partial_x f(x_0) , \quad \text{grad } f(x_0) . \quad (5.28)$$

La nozione di derivata parziale, benché molto naturale, è assai più “debole” della nozione, nel caso di funzioni di una variabile reale, di derivata:

²²Spesso, nel caso di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ il vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$ viene denotato, rispettivamente, con (x, y) e (x, y, z) .

Esempio 5.18 Sia $\mathcal{P} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } y = x^2 \text{ e } (x, y) \neq (0, 0)\}$ e consideriamo la funzione di due variabili definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) \notin \mathcal{P}, \\ 1, & \text{se } (x, y) \in \mathcal{P}. \end{cases} \quad (5.29)$$

Tale funzione è ovviamente *discontinua nell'origine* ($f(0, 0) = 0$ ma in un qualunque intorno dell'origine vi sono punti della parabola $\mathcal{P}$ su cui la funzione vale 1). Tuttavia $f(h, 0) = f(0, h) = 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e quindi i limiti dei rapporti incrementali nell'origine rispetto ad x o y esistono e sono nulli:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0. \quad (5.30)$$

Le derivate parziali sono limiti di rapporti incrementali ove l'incremento delle variabili indipendenti vengono fatti *lungo le direzioni degli assi coordinati*. Cambiando la direzione dell'incremento delle variabili indipendenti si perviene alla nozione di *derivate direzionali*: sia ξ un qualunque vettore non nullo in $\mathbb{R}^n$, si definisce **la derivata direzionale della funzione f , fatta rispetto al vettore ξ , nel punto x_0** , il limite (qualora esista) del rapporto incrementale²³

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\xi) - f(x_0)}{t}. \quad (5.31)$$

Tale limite verrà denotato con una delle seguenti equivalenti scritture:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0), \quad \partial_\xi f(x_0), \quad D_\xi f(x_0). \quad (5.32)$$

Se $\{e^{(i)}\}$ denota la base ortonormale standard di $\mathbb{R}^n$,

$$e^{(1)} \equiv (1, 0, \dots, 0), \quad e^{(2)} \equiv (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e^{(n)} \equiv (0, \dots, 0, 1),$$

da tali definizione segue immediatamente che

$$\frac{\partial f}{\partial e^{(i)}} = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (5.33)$$

Nell'Esempio 5.17 se scegliamo $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $\xi = (1, 1)$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5 - \sin t}{t} = -1.$$

Osserviamo anche che nell'Esempio 5.18, f possiede *tutte* le derivate direzionali in 0 e sono tutte nulle²⁴ (e ciononostante la funzione è discontinua in 0).

²³ In alcuni testi, con maggiore precisione di linguaggio ma anche con una definizione più restrittiva, si definiscono derivate direzionali solo quelle fatte rispetto ad un vettore ξ di *norma unitaria* (identificando giustamente una *direzione* con un vettore ξ tale che $|\xi| = 1$).

²⁴Esercizio 5.16.

Tornando alle funzioni di una variabile reale, un modo equivalente di dire che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x è: esiste un numero L tale che²⁵

$$f(x+h) = f(x) + Lh + o(h); \quad (5.34)$$

in tal caso si ha $f'(x) = L$. Si noti che $h \rightarrow Lh$ è una applicazione lineare da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. La (5.34) è la proprietà che, generalizzata al caso a più dimensioni, fornisce la nozione più significativa relativa alla derivazione in $\mathbb{R}^n$:

Definizione 5.19 Una funzione f a valori reali e definita su di un aperto E di $\mathbb{R}^n$ si dice **differenziabile** nel punto $x_0 \in E$ se esiste un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per tutti i vettori $h \in \mathbb{R}^n$ sufficientemente piccoli, si abbia

$$f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + r(h), \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0. \quad (5.35)$$

L'applicazione lineare L (che dipende dal punto x_0) si denota anche con df o più precisamente con df_{x_0} e si chiama il **differenziale** della funzione f nel punto x_0 .

In altri termini, esattamente come per (5.34), si ha che²⁶ $f(x_0+h) - f(x_0) - Lh = o(h)$.

Osservazione 5.20 (i) Ogni applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ corrisponde alla moltiplicazione scalare per un dato vettore; infatti, sia $\{e^{(i)}\}$ la base di $\mathbb{R}^n$, sia $h \equiv \sum_{i=1}^n h_i e^{(i)}$ un qualunque vettore e sia $\ell \equiv (L(e^{(1)}), \dots, L(e^{(n)}))$; allora dalla linearità di L segue che

$$L(h) \equiv L\left(\sum_{i=1}^n h_i e^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^n h_i \ell_i \equiv \ell \cdot h. \quad (5.36)$$

(ii) Se f è differenziabile in x_0 allora esiste un'unica applicazione L per cui vale (5.35). Assumiamo, infatti, che ci sia un'altra applicazione lineare L' per cui valga (5.35) con $r'(h)$ al posto di $r(h)$ e facciamo vedere che da $L \neq L'$ si perviene ad una contraddizione. Siano $\ell \neq \ell'$ i due vettori corrispondenti alle due applicazioni lineari²⁷ L e L' . Sottraendo le rispettive relazioni (5.35) e dividendo il risultato per $|h|$, si ottiene

$$(\ell - \ell') \cdot \frac{h}{|h|} + \frac{r(h) - r'(h)}{|h|} = 0. \quad (5.37)$$

Scegliendo $h = t(\ell - \ell')$ con t piccolo, e mandando t a zero si ottiene $|\ell - \ell'| = 0$ che contraddice $\ell \neq \ell'$. ■

²⁵ Una funzione g definita nell'intorno di un punto $y \in \mathbb{R}^n$ si dice $o(x-y)$ ("o piccolo di $x-y$ ") se $\lim_{x \rightarrow y} g(x-y)/|x-y| = 0$; g si dice $O(x-y)$ se esistono $M, \delta > 0$ tali che $|g(x-y)| \leq M|x-y|$ per ogni $|x-y| < \delta$. Dunque la (5.34) significa che $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x) - Lh = 0$.

²⁶ Di solito se L è un'applicazione lineare si usa la notazione Lh al posto di $L(h)$; nel caso del differenziale di una funzione df , per motivi estetici, si preferisce mantenere la notazione $df(h)$.

²⁷ Cioè $L(h) = \ell \cdot h, \forall h$ e $L'(h) = \ell' \cdot h, \forall h$.

La funzione f dell'Esempio 5.17 è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^n$; dimostriamo la differenziabilità in 0. A tal uopo, useremo la seguente stima elementare²⁸

$$|\sin t - t| \leq c |t|^3, \quad \forall |t| \leq 1, \quad \text{con } c \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!}. \quad (5.38)$$

Sia $h = (h_1, h_2)$ con $|h| \leq 1$ e sia $\ell \equiv (-1, 0)$ (cosicché $df(h) = \ell \cdot h = -h_1$). Maggiorando $|h_i|$ con $|h|$, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{|r(h)|}{|h|} &\equiv \frac{|f(h) - f(0) - df(h)|}{|h|} \equiv \frac{|h_1^2 h_2^3 - \sin h_1 + h_1|}{|h|} \\ &\leq \frac{|h|^5 + |\sin h_1 - h_1|}{|h|} \\ &\leq |h|^4 + c |h|^2 \rightarrow 0 \quad (\text{per } |h| \rightarrow 0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposizione 5.21 Sia E un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 \in E$. Allora: (i) f è continua in x_0 ; (ii) f ha tutte le derivate direzionali in x_0 e per ogni vettore non nullo $\xi \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot \xi = df_{x_0}(\xi). \quad (5.39)$$

In base a tale proposizione possiamo dire che f è differenziabile in x_0 se e solo se esiste il gradiente di f in x_0 e vale

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h|}{|h|} = 0. \quad (5.40)$$

Dimostrazione (della Proposizione 5.21) La continuità segue immediatamente dalla definizione (poiché $r(h) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$).

Sia ξ un qualunque vettore non nullo in $\mathbb{R}^n$. Essendo f differenziabile in x_0 esiste un (unico) vettore ℓ tale che valga (5.35) con $L(h) \equiv \ell \cdot h$. Dunque (sostituendo h con $t\xi$ con $t \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo) si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + t\xi) - f(x_0)}{t} &= \frac{\ell \cdot t\xi + r(t\xi)}{t} \\ &= \ell \cdot \xi + |\xi| \frac{r(t\xi)}{t|\xi|} \rightarrow \ell \cdot \xi \quad (\text{per } t \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (5.41)$$

²⁸Per $|t| \leq 1$ si ha: $|\sin t - t| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq |t|^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$. In effetti la costante c è più piccola di $1/5$ (Esercizio 5.18).

Quindi esistono tutte le derivate direzionali. Prendendo $\xi = e^{(i)}$, vediamo che

$$\ell_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) .$$

Dunque $\ell = \nabla f$ e $df(\xi) = \nabla f \cdot \xi$. ■

Da tale proposizione segue che se f e g sono differenziabili in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora anche le funzioni $f + g$ e fg lo sono e si ha

$$d(f + g) = df + dg , \quad d(fg) = gdf + fdg . \quad (5.42)$$

Un criterio semplice per capire quando una funzione sia differenziabile è contenuto nella seguente

Proposizione 5.22 *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto contenente x e sia f una funzione (a valori reali) continua in x e con derivate parziali anch'esse continue in x . Allora f è differenziabile in x .*

Dimostrazione Consideriamo dapprima il caso bidimensionale $n = 2$. Dalle ipotesi segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\rho > 0$ tale che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x') - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| < \varepsilon , \quad \forall |x' - x| < \rho , \quad \forall i . \quad (5.43)$$

Sia $\xi \in \mathbb{R}^2$ con $0 < |\xi| < \rho$, dal teorema fondamentale del calcolo segue che

$$\begin{aligned} f(x + \xi) - f(x) &= f(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2) - f(x_1 + \xi_1, x_2) + f(x_1 + \xi_1, x_2) - f(x_1, x_2) \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + \xi_1, x_2 + t\xi_2) dt \right) \xi_2 + \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + t\xi_1, x_2) dt \right) \xi_1 . \end{aligned} \quad (5.44)$$

Dunque, $|(t_1\xi_1, t_2\xi_2)| < \rho$ per ogni $|t_i| \leq 1$, e

$$\begin{aligned} &|f(x + \xi) - f(x) - \nabla f(x) \cdot \xi| \\ &= \left| \xi_2 \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + \xi_1, x_2 + t\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right] dt \right. \\ &\quad \left. + \xi_1 \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + t\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right] dt \right| \\ &\leq |\xi_2| \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + \xi_1, x_2 + t\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right| dt \\ &\quad + |\xi_1| \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + t\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right| dt \\ &\leq \varepsilon(|\xi_1| + |\xi_2|) \equiv \varepsilon|\xi|_1 \leq \sqrt{2} \varepsilon|\xi| , \end{aligned} \quad (5.45)$$

da cui segue immediatamente l'asserto; (nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato (5.9)).

Nel caso generale (n arbitrario), poniamo

$$\xi^{(i)} \equiv (\xi_1, \dots, \xi_i, 0, \dots, 0), \quad \xi^{(0)} \equiv 0, \quad (5.46)$$

cosicch 

$$f(x + \xi) - f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x + \xi^{(i+1)}) - f(x + \xi^{(i)}) . \quad (5.47)$$

A questo punto possiamo ripetere l'argomento usato nel caso $n = 2$. ■

Esempio 5.23 (i) Consideriamo la seguente funzione di due variabili reali:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_1 \neq x_2, \\ x_1, & \text{se } x_1 = x_2. \end{cases} \quad (5.48)$$

La funzione f   continua in 0, ammette tutte le derivate direzionali (in 0), ma non   differenziabile in 0. Infatti $|f(x)| \leq |x| \rightarrow 0 = f(0)$ quando $x \rightarrow 0$. Si verifica subito che

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi \neq (\alpha, \alpha) \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ \xi_1, & \text{se } \exists \alpha \in \mathbb{R} : \xi = (\alpha, \alpha). \end{cases} \quad (5.49)$$

D'altra parte, quando $\xi_1 = \xi_2$, $r(\xi) \equiv f(\xi) - f(0) - \nabla f(0) \cdot \xi = \xi_1$ e $\xi_1/|\xi|$ non tende a zero quando $|\xi|$ tende a zero²⁹.

(ii) Diamo ora un esempio di una funzione di n variabili che sia differenziabile in zero, che abbia derivate parziali continue in ogni punto x di $\mathbb{R}^n$ con la sola eccezione di $x = 0$ ove le derivate parziali esistono [per la Proposizione 5.21, (ii)] ma non sono continue. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \operatorname{sen} \frac{1}{|x|}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad (5.50)$$

Chiaramente tale funzione   continua su tutto $\mathbb{R}^n$ e le derivate parziali esistono e sono continue in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Le derivate direzionali in 0 sono nulle: se $\xi \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\xi)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 |\xi|^2 \operatorname{sen} \frac{1}{|t\xi|} = 0.$$

La funzione f   differenziabile in 0:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(0+h) - f(0) - \nabla f(0) \cdot h|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| \operatorname{sen} \frac{1}{|h|} = 0.$$

²⁹Se $\xi = (\pm 1/n, 1/n)$ allora $\xi_1/|\xi| = \pm \sqrt{2}/2$.

D'altra parte le derivate parziali *non sono continue in* $x = 0$. Infatti, ricordando la (5.26), troviamo, per $x \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i \operatorname{sen} \frac{1}{|x|} - \frac{x_i}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}$$

e la funzione $\frac{x_i}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}$ non ammette limite per $x \rightarrow 0$.

5.7 Derivate successive

Se $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, E aperto, ha una derivata parziale in un punto $x \in E$, diciamo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, ha senso chiedersi se tale funzione ammetta anch'essa una derivata parziale rispetto a, diciamo, x_j . In caso di risposta affermativa, denoteremo tale derivata con uno dei seguenti simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \quad (\partial_{x_j} \partial_{x_i} f)(x), \quad D_{ij} f(x), \quad f_{x_i x_j}(x). \quad (5.51)$$

E' naturale chiedersi quando accada che $D_{ij} f(x) = D_{ji} f(x)$, ossia quando sia possibile scambiare l'ordine nel calcolo di una derivata seconda. A questo proposito sussiste la seguente fondamentale

Proposizione 5.24 ("Lemma di Schwarz") *Sia f una funzione (a valori reali) continua assieme alle sue derivate prime nell'intorno di un punto $x \in \mathbb{R}^n$. Se $D_j(D_i f)$ esiste ed è continua in un intorno di x , allora anche $[D_i(D_j f)](x)$ esiste e si ha*

$$[D_i(D_j f)](x) = [D_j(D_i f)](x). \quad (5.52)$$

Dimostrazione Poiché le coordinate x_k con k diverso da i e j non giocano nessun ruolo, possiamo chiaramente considerare il caso di $\mathbb{R}^2$, $f = f(x, y)$ facendo corrispondere x a x_i e y a x_j . Per h, k numeri reali piccoli tali che $hk \neq 0$, definiamo la seguente funzione delle due variabili (h, k) (essendo il punto (x, y) fissato)

$$\alpha(h, k) \equiv \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)}{hk}. \quad (5.53)$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\lim_{k \rightarrow 0} \alpha(h, k) \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_y f(x+h, y) - \partial_y f(x, y)}{h} = (\partial_x \partial_y f)(x), \\ \lim_{k \rightarrow 0} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h, k) \right] &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(x, y+k) - \partial_x f(x, y)}{k} = (\partial_y \partial_x f)(x), \end{aligned} \quad (5.54)$$

ammesso che tali limiti esistano. Dunque il problema è far vedere che la funzione $\alpha(h, k)$ è definita e continua nell'origine $(h, k) = (0, 0)$ cosicché l'ordine nei limiti

in (5.54) non conta e si avrà la tesi. Dalle ipotesi e dal teorema fondamentale del calcolo applicato due volte, si ha

$$\begin{aligned}\alpha(h, k) &= \frac{1}{k} \int_0^1 [f_x(x + th, y + k) - f_x(x + th, y)] dt \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \partial_y f_x(x + th, y + sk) ds \right] dt .\end{aligned}\quad (5.55)$$

Tale relazione mostra, innanzitutto, che α è definita in un intorno di $(0, 0)$ (non solo per $hk \neq 0$) e poi che α è continua nell'origine e quindi che

$$\alpha(0, 0) = (\partial_y \partial_x f)(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \alpha(h, k) = (\partial_x \partial_y f)(0, 0) . \quad \blacksquare$$

Naturalmente, tale risultato si estende in maniera ovvia a tutte le derivate di ordine superiore ad uno e se f è una funzione che ha tutte le derivate parziali di ordine $p \geq 2$ continue nell'intorno di un punto $x \in \mathbb{R}^n$, una qualunque **derivata parziale di ordine k** con $k \leq p$ definita da

$$[\partial_{x_{i_1}} \partial_{x_{i_2}} \cdots \partial_{x_{i_k}} f](x) \quad (5.56)$$

coinciderà con

$$[\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f](x) , \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = k , \quad (5.57)$$

dove α_i è il numero di volte che la derivata parziale ∂_{x_i} appare in (5.56) e naturalmente

$$\partial_{x_i}^h \equiv \partial_{x_i} \cdots \partial_{x_i} \quad (h \text{ volte}) . \quad (5.58)$$

La scrittura in (5.57) significa che si calcolano prima le α_n derivate rispetto a x_n , poi le α_{n-1} derivate rispetto a x_{n-1} e così via. Dal Lemma di Schwarz segue che l'ordine in cui tali derivate parziali si calcolano è irrilevante (purché, come stiamo assumendo, tali derivate parziali risultino essere continue nel punto x). La derivata parziale di ordine k in (5.57) si denota anche

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) , \quad \partial_x^\alpha f(x) , \quad \partial^\alpha f(x) , \quad D^\alpha f(x) , \quad (5.59)$$

dove α è il vettore $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Definizione 5.25 *Dato un qualunque insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ ed un intero positivo k , una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dirà di classe $C^k(E)$ [o, più precisamente, $C^k(E, \mathbb{R})$] se esiste un insieme aperto $A \supset E$ tale che tutte le derivate parziali di ordine p con $p \leq k$ esistono e sono continue in A ; $C^\infty(E)$ [o, più precisamente, $C^\infty(E, \mathbb{R})$], come al solito, è dato da $\bigcap_{k \geq 0} C^k(E)$.*

Naturalmente se E è aperto si prenderà $A = E$.

Esempio 5.26 (i) Se $f(x, y) = x^2 y^3 - \sin y$ abbiamo che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e, ad esempio,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) = 12xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) = 24.$$

O, ancora, se a, b sono interi positivi e $k \equiv a + b > 5$ si ha

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^a \partial y^b}(x, y) = 0.$$

(ii) Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - y^3 x}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (5.60)$$

La funzione f è omogenea³⁰ di grado 2 ed è quindi continua in $\mathbb{R}^n$. Infatti $f \in C^1(\mathbb{R})$: per ogni $h \in \mathbb{R}$, $f(h, 0) = 0 = f(0, h)$ e dunque $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$; inoltre per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3x^2 y - y^3}{x^2 + y^2} - 2x \frac{x^3 y - y^3 x}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} - 2y \frac{x^3 y - y^3 x}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

e tali funzioni sono omogenee di grado 1 e quindi tendono a zero per $|(x, y)| \rightarrow 0$. Però

$$\frac{f_x(0, h)}{h} = -1, \quad \frac{f_y(h, 0)}{h} = 1, \quad (5.62)$$

e dunque $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. D'altra parte, come è facile controllare, le derivate seconde miste sono omogenee di grado 0 (e non identicamente costanti) e quindi³¹ non sono continue in $(0, 0)$.

Osservazione 5.27 I Teoremi 1.11 e 1.11 si estendono facilmente al caso di funzioni (scalari) di n variabili anche se i loro enunciati (e le loro dimostrazioni) hanno bisogno di una opportuna riformulazione:

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e $u_k \in C^1(E)$, $k \geq 1$. Se $\sum u_k$ converge puntualmente³² e $\sum \partial_{x_i} u_k$ converge uniformemente in E per ogni i , allora $u = \sum u_k \in C^1(E)$ e $\partial_{x_i} u = \sum \partial_{x_i} u_k$.

³⁰ Una funzione $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **positivamente omogenea** (rispettivamente, “omogenea”) di grado α se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $t > 0$ (rispettivamente, per $0 \neq t \in \mathbb{R}$) e per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; naturalmente se f è omogenea allora è positivamente omogenea. Se f è positivamente omogenea di grado $\alpha > 0$ e $x \neq 0$ allora $|f(x)| = \left| f\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) \right| = |x|^\alpha \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq M |x|^\alpha$

con $M = \max_{|y|=1} |f(y)|$. Per ulteriori informazioni sulle funzioni omogenee is veda 5.20.

³¹Proposizione 5.20 in 5.49.

³²Ovvero, come nel caso unidimensionale, converge $\sum u_k(x)$ per ogni x .

Sia E un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f_k \in C^1(E)$. Se f_k converge puntualmente e $\partial_{x_i} f_k$ converge uniformemente per ogni i , allora $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \in C^1(E)$ e $\partial_{x_i} f = \lim \partial_{x_i} f_k$.

Le dimostrazioni seguono facilmente dal caso unidimensionale³³.

Come esempio consideriamo la serie $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \sum_{k \geq 0} u_k(x)$ con $u_k(x) \equiv \text{sen } |x|^{2k}$. Tale serie converge puntualmente sulla sfera aperta di raggio³⁴ 1, $E \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, ed inoltre la serie delle derivate parziali

$$\sum \partial_{x_i} \text{sen } |x|^{2k} = \sum_{k \geq 1} 2k x_i \text{sen } |x|^{2(k-1)}$$

converge uniformemente su ogni sfera $E_a \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < a\}$ con $0 < a < 1$. Quindi la funzione $u \equiv \sum u_k \in C^1(E)$ e $\partial_{x_i} u = \sum_{k \geq 1} 2k x_i |x|^{2(k-1)} \cos |x|^{2k}$.

5.8 Formula di Taylor in $\mathbb{R}^n$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e f una funzione di classe $C^k(\{x_0\})$ (ovvero f è continua assieme a tutte le sue derivate parziali di ordine p con $p \leq k$ in un intorno di x_0). Per ogni $p \leq k$, definiamo il **tensore delle derivate di ordine p** , $\partial_x^p f(x_0)$, come la applicazione multilineare che a p vettori in $\mathbb{R}^n$, $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(p)}$ associa il seguente numero:

$$\begin{aligned} \partial_x^p f(x_0) : (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(p)}) &\in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \partial_x^p f(x_0)(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(p)}) \\ &\equiv \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(x_0) \xi_{j_1}^{(1)} \dots \xi_{j_p}^{(p)}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Si noti la differenza tra i simboli $\partial_x^\alpha f(x_0)$ con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ vettore a componenti interi non negativi e $\partial_x^p f(x_0)$ con p numero intero non negativo: il primo simbolo denota un numero (il valore della derivata parziale di ordine $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ fatta α_1 volte rispetto a $x_1, \dots, \alpha_n$ volte rispetto a x_n e calcolata nel punto x_0) mentre il secondo simbolo denota un "oggetto a p indici" che agisce secondo la regola (5.63).

Esempio 5.28 Sia $f = x_1^2 x_2^5$, $x_0 = (1, 1)$, $\alpha = (1, 3)$, $p = 3$, $\xi^{(1)} = (1, 0)$, $\xi^{(2)} = (-1, 1)$, $\xi^{(3)} = (3, -1)$ e calcoliamo, rispettivamente,

$$\partial_x^\alpha f(x_0), \quad \text{e} \quad \partial_x^p f(x_0)(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}).$$

In relazione alla prima quantità, troviamo

$$\partial_x^\alpha f(x_0) \equiv \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2^3}(x_0) = 120 x_1 x_2^2 |_{x=x_0} = 120,$$

³³Basta applicare i teoremi unidimensionali alle funzioni di una variabile $x_i \rightarrow u_n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ (dove le "variabili" x_j con $j \neq i$ sono fissate).

³⁴Se $|x| < 1$ allora $\sum_{k \geq 0} |u_k(x)| \leq \sum |x|^{2k} = 1/(1 - |x|^2)$.

mentre il valore del tensore delle derivate di ordine 3 di f , si ha (omettendo dapprima la dipendenza da x_0)

$$\begin{aligned}
 (\partial_x^p f)(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}) &= \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \xi_i^{(1)} \xi_j^{(2)} \xi_k^{(3)} \\
 &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_j \partial x_k} \xi_j^{(2)} \xi_k^{(3)} \\
 &= \sum_{k=1}^2 \left(-\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_k} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_k} \right) \xi_k^{(3)} \\
 &= -3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} + 4 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}.
 \end{aligned}$$

Calcolando tale valore nel punto $x_0 = (1, 1)$ si ha

$$\partial_x^p f(x_0)(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}) = 0 + 40 - 40 = 0.$$

Per semplificare un po' la notazione, diamo la seguente definizione: se $\xi \in \mathbb{R}^n$ e k è un intero non negativo, denotiamo con $(\xi)^k$ la k -upla di vettori $(\xi, \dots, \xi)$ (ripetuti k volte):

$$(\xi)^k \equiv \underbrace{(\xi, \dots, \xi)}_{k \text{ volte}}. \quad (5.64)$$

Proposizione 5.29 (Formula di Taylor) Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f \in C^k(\{x_0\})$ con $k \geq 1$. Vale, allora, per $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi|$ sufficientemente piccolo, la seguente formula:

$$f(x_0 + \xi) = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{p!} \partial_x^p f(x_0) (\xi)^p + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \partial_x^k f(x_0 + t\xi) (\xi)^k dt, \quad (5.65)$$

dove, per definizione, $\partial_x^0 f(x_0) \equiv f(x_0)$ e $(\xi)^0 \equiv 1$.

Si noti che, dalle ipotesi e dalla definizione di tensore delle derivate, segue che l'integrando in (5.65) è una funzione continua sull'intervallo $[0, 1]$. La formula di Taylor in $\mathbb{R}^n$ è una immediata conseguenza del teorema fondamentale del calcolo (in una variabile) e del seguente risultato, interessante di per sé e di frequente utilità:

Proposizione 5.30 Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$; f una funzione (a valori in $\mathbb{R}$) differenziabile in x_0 ; $t_0 \in \mathbb{R}$; $t \rightarrow \varphi(t) \equiv (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ una funzione definita in un intorno di t_0 , a valori in $\mathbb{R}^n$, tale che $\varphi(t_0) = x_0$ e tale che le n funzioni $\varphi_i(t)$ siano derivabili in t_0 . Allora la funzione composta $f \circ \varphi$ è derivabile in t_0 e si ha³⁵

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \nabla f(x_0) \cdot \varphi'(t_0) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \varphi'_i(t_0). \quad (5.66)$$

³⁵ Si ricorda che una funzione φ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$ si dice derivabile se le n componenti di φ lo sono ed in tal caso $\varphi'(t)$ denota il vettore $(\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t))$.

Dimostrazione Essendo le funzioni $\varphi_i(t)$ derivabili in t_0 si ha che

$$\varphi(t_0 + h) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)h + \rho(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\rho(h)|}{|h|} = 0. \quad (5.67)$$

Dunque, dalla differenziabilità di f in $x_0 = \varphi(t_0)$ segue, per h sufficientemente piccoli, che

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(t_0 + h) - f \circ \varphi(t_0) &= f(x_0 + \varphi'(t_0)h + \rho(h)) - f(x_0) \\ &= \nabla f(x_0) \cdot (\varphi'(t_0)h + \rho(h)) + r(\varphi'(t_0)h + \rho(h)) \\ &= \nabla f(x_0) \cdot \varphi'(t_0)h + o(h), \end{aligned} \quad (5.68)$$

da cui segue immediatamente l'asserto. ■

Esempio 5.31 Sia $f(x, y)$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e sia $g(x)$ derivabile in x_0 e tale che $g(x_0) = y_0$, allora la funzione di una variabile $x \rightarrow f(x, g(x))$ è derivabile in x_0 e

$$\frac{d}{dx} f(x, g(x))|_{x_0} = f_x(x_0, y_0) + g'(x_0)f_y(x_0, y_0). \quad (5.69)$$

Tale formula segue dalla Proposizione precedente prendendo $\varphi(t) \equiv (x_0 + t, g(x_0 + t))$.

Dimostrazione (della Proposizione 5.29) Se F è una funzione di una variabile e di classe $C^k([0, 1], \mathbb{R})$ dal teorema fondamentale del calcolo segue che

$$F(1) = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{F^{(p)}(0)}{p!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} F^{(k)}(t) dt. \quad (5.70)$$

Infatti, se $k = 1$ (5.70) è esattamente il teorema fondamentale del calcolo e, se $k \geq 2$, integrando per parti³⁶, si ha che

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} F^{(k)}(t) dt = -\frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-2}}{(k-2)!} F^{(k-1)}(t) dt. \quad (5.71)$$

Iterando tale relazione si perviene a (5.70).

Dalle ipotesi della proposizione segue che esiste una sfera, B , di raggio ρ e centro x_0 tale che $f \in C^k(B)$. Fissiamo $\xi \in \mathbb{R}^n$ cosicché $|\xi| < \rho$. Sia ora $F(t)$ la seguente funzione di una variabile reale a valori in $\mathbb{R}$

$$F(t) \equiv f(x_0 + t\xi). \quad (5.72)$$

³⁶E l'integrazione per parti non è altro che una conseguenza immediata del teorema fondamentale del calcolo.

Dalle posizioni fatte e dalla Proposizione 5.30 segue che $F \in C^k([0, 1])$: Infatti da (5.66) (applicata con $\varphi(t) \equiv x_0 + t\xi$, per cui $\varphi'(t) = \xi$) segue che

$$F'(t) = \nabla f(x_0 + t\xi) \cdot \xi \equiv \partial_x^1 f(x_0 + t\xi) \quad \xi \equiv \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + t\xi) ; \quad (5.73)$$

tale relazione ed una seconda applicazione della Proposizione alle n funzioni $f_{x_i}(x_0 + t\xi)$ implicano

$$F''(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t\xi) \quad \xi_j \equiv \partial_x^2 f(x_0 + t\xi) (\xi)^2 , \quad (5.74)$$

o, più in generale, per ogni $0 \leq p \leq k$

$$F^{(p)}(t) = \partial_x^p f(x_0 + t\xi) (\xi)^p . \quad (5.75)$$

A questo punto l'asserto deriva da (5.71). ■

Denotiamo con $P_j(\xi; x_0)$ il **polinomio di Taylor di ordine j** della funzione f nel punto x_0 e nelle n variabili $\xi_1, \dots, \xi_n$ (cioè nelle n componenti del vettore ξ):

$$P_j(\xi; x_0) \equiv \sum_{p=0}^j \frac{1}{p!} \partial_x^p f(x_0) (\xi)^p ; \quad (5.76)$$

e raccogliamo nel seguente corollario alcune conseguenze immediate della formula di Taylor.

Corollario 5.32 *Nelle ipotesi della Proposizione 5.29 valgono le seguenti affermazioni:* (i)

$$R_k \equiv f(x_0 + \xi) - P_k(\xi; x_0) = o(|\xi|^k) ; \quad (5.77)$$

(ii) ("Formula di Taylor con resto di Lagrange")

$$f(x_0 + \xi) = P_{k-1}(\xi; x_0) + \frac{1}{k!} \partial_x^k f(y) (\xi)^k , \quad (5.78)$$

dove y è un punto sul "segmento aperto" I che unisce x_0 con $x_0 + \xi$:

$$I \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_0 + t\xi \text{ con } t \in (0, 1)\} ; \quad (5.79)$$

(iii) Un "teorema della media in $\mathbb{R}^n$ "

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) = \int_0^1 f'(x_0 + t\xi) \cdot \xi \, dt ; \quad (5.80)$$

(iv) "Stima del resto di ordine $k-1$ " (per $k \geq 1$)

$$R_{k-1} \equiv f(x_0 + \xi) - P_{k-1}(\xi; x_0) = O(|\xi|^k) ,$$

o più precisamente

$$|R_{k-1}| \leq \frac{M}{k!} |\xi|_1^k \leq \frac{M n^{\frac{k}{2}}}{k!} |\xi|^k, \quad (5.81)$$

dove, come al solito, $|\cdot|_1$ denota la "norma 1" in $\mathbb{R}^n$ ($|\xi|_1 \equiv \sum |\xi_i|$) e, se $i_1, \dots, i_k$ sono k indici che variano tra 1 ed n , la costante M è definita come (si ricordi (5.79))

$$M \equiv \sup_{i_1, \dots, i_k} \sup_{x \in I} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) \right|. \quad (5.82)$$

Dimostrazione (i) Dalle ipotesi segue che qualunque derivata di ordine k (ovvero $\partial_x^\alpha f(x)$ per qualunque $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$) è continua in x_0 . Dato $\varepsilon > 0$, esiste δ tale che $|\partial_x^\alpha f(x) - \partial_x^\alpha f(x_0)| < \varepsilon$ per qualunque α con $\sum \alpha_i = k$ e qualunque x con $|x - x_0| < \delta$. Allora per ogni $|\xi| < \delta$, dalla formula di Taylor e dalla definizione di P_k (5.76), segue che³⁷

$$\begin{aligned} |R_k| &= \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \partial_x^k f(x_0 + t\xi) (\xi)^k dt - \frac{1}{k!} \partial_x^k f(x_0) (\xi)^k \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \left[\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_0 + t\xi) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_0) \right] \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_0 + t\xi) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_0) \right| |\xi_{i_1}| \dots |\xi_{i_k}| dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{k!} |\xi|_1^k \leq \frac{\varepsilon}{k!} n^{\frac{k}{2}} |\xi|^k \end{aligned} \quad (5)$$

che è quanto volevasi dimostrare.

(ii) Se $g(t)$ è una funzione continua su $[0, 1]$ si ha che

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} g(t) dt = \frac{1}{k!} \int_0^1 g(1-s^{\frac{1}{k}}) ds = \frac{g(\tau)}{k!}, \quad (5.84)$$

dove τ è un qualche punto nell'intervallo $(0, 1)$: nel primo passaggio si è fatto il cambiamento di variabile $s = (1-t)^k$, mentre il secondo passaggio è conseguenza del teorema della media (in una variabile). L'asserto in (ii) segue ora da (5.84) applicato alla funzione $F^{(k)}(t)$ con F definita nella dimostrazione della Proposizione 5.29.

(iii): tale affermazione non è altro che l'asserto della Proposizione 5.29 nel caso $k = 1$.

(iv): La stima su $|R_{k-1}|$ segue facilmente dalla (5.78). ■

³⁷ Si noti che $\frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} dt$.

Osservazione 5.33 (i) La formula di Taylor “al secondo ordine” per funzioni f di classe $C^2(\{x_0\})$ viene usata spesso nella seguente versione. Se $f \in C^2(\{x_0\})$, si definisce la **matrice hessiana** di f nel punto x_0 la matrice simmetrica $(n \times n)$ costituita dalle derivate seconde di f in x_0 :

$$f''(x_0) \equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1,\dots,n}. \quad (5.85)$$

Dal punto (i) del Corollario alla formula di Taylor segue che

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \xi + \frac{1}{2} f''(x_0) \xi \cdot \xi + o(|\xi|^2). \quad (5.86)$$

(ii) Un'altra versione della formula di Taylor usata frequentemente si ottiene raccogliendo i termini comuni in $\partial_x^p f(\xi)^p$. Infatti, in $\partial_x^p f(\xi)^p$, appaiono le derivate di ordine p nella forma

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}} \quad (5.87)$$

dove gli indici $j_1, \dots, j_p$ variano indipendentemente tra 1 e n . La (5.87) può essere riscritta come $\partial_x^\alpha f$ dove $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è tale che $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = p$ e α_i è il numero di indici j_i in (5.87) che assumono il valore 1, α_2 è il numero di indici j_i con valore 2, etc. Un esempio (con $n = 4$ e $p = 5$) è dato da

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x_1 \partial x_4 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_1} = \partial_x^{(3,1,0,1)} f$$

(qui $j_1 = 1, j_2 = 4, j_3 = 2, j_4 = 1, j_5 = 1$ e quindi $\alpha = (3, 1, 0, 1)$). D'altra parte, in generale, vi sono varie scelte degli indici $j_1, \dots, j_p$ tali da ottenere la stessa derivata $\partial_x^\alpha f$: il numero di tale scelte è esattamente il numero di modi in cui si possono ripartire p oggetti in n gruppi formati, rispettivamente, da $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ oggetti. Un calcolo combinatorio elementare³⁸ mostra che tale numero è

$$\frac{p!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \equiv \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}. \quad (5.88)$$

E' convenzione usare per vettori $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la notazione $|\alpha|$ per la norma $|\cdot|_1$ cioè (essendo tutte le componenti di α non negative) per $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Inoltre sono comuni le seguenti notazioni: se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ si pone

$$|\alpha| \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha! \equiv \alpha_1! \cdots \alpha_n! \equiv \prod_{j=1}^n \alpha_j!, \quad \xi^\alpha \equiv \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n} \equiv \prod_{j=1}^n \xi_j^{\alpha_j}. \quad (5.89)$$

In vista della discussione che ha condotto a (5.88) e delle convenzioni (5.89), si ottiene l'identità

$$\partial_x^p f(x_0) (\xi)^p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: |\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!} \partial_x^\alpha f(x_0) \xi^\alpha. \quad (5.90)$$

³⁸Si ricordi che il coefficiente binomiale $\binom{p}{a}$ è il numero di modi di ripartire p oggetti in due gruppi formati rispettivamente da a oggetti e da $p - a$ oggetti.

Dunque il polinomio di Taylor di ordine k di una funzione $f \in C^k(\{x_0\})$ prende la forma

$$P_k(\xi; x_0) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: |\alpha| \leq k} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \xi^\alpha. \quad (5.91)$$

Da tale osservazione deriva immediatamente la seguente versione della Formula di Taylor in $\mathbb{R}^n$:

Proposizione 5.34 (Formula di Taylor (II)) *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f \in C^k(\{x_0\})$ con $k \geq 1$. Vale, allora, per $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi|$ sufficientemente piccolo, la seguente formula:*

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: |\alpha| \leq k-1} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \xi^\alpha + k \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: |\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial_x^\alpha f(x_0 + t\xi) dt \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: |\alpha| \leq k-1} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: |\alpha|=k} \frac{\partial_x^\alpha f(y)}{\alpha!} \xi^\alpha \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: |\alpha| \leq k} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \xi^\alpha + o(|\xi|^k), \quad (5.93)$$

dove $y \equiv x_0 + t_0 \xi$ per un opportuno $0 < t_0 < 1$.

Esempio 5.35 Come esempio calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 5 in $(x, y) = (0, 0)$ della funzione $(1+x)^y$. Calcolando le derivate fino all'ordine 5 si trova $(1+x)^y = P(x, y; 0, 0) + O(|(x, y)|^6)$ con

$$P(x, y; 0, 0) = 1 + xy - \frac{x^2 y}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3 y}{3} - \frac{x^4 y}{4} - \frac{x^3 y^2}{2}. \quad (5.94)$$

5.9 Serie di Taylor, funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $C^\omega(\mathbb{R}^n)$

La teoria delle funzioni (reali-) analitiche discussa nel § 3 si estende, quasi senza variazioni, al caso generale di funzioni definite su $\mathbb{R}^n$. In questo paragrafo accenneremo brevemente a tali sviluppi.

Prima di discutere le serie di Taylor di funzioni su $\mathbb{R}^n$ consideriamo brevemente *serie numeriche multiple* ovvero serie numeriche in cui gli indici variano su $\mathbb{N}^n$:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha, \quad (5.95)$$

dove, per ogni valore del multiindice $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, a_α è un numero reale. Si dice che la serie in (5.95) **converge assolutamente** se

$$\sup_N \sigma_N < \infty, \quad \text{dove} \quad \sigma_N \equiv \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|_\infty \leq N}} |a_\alpha|, \quad (5.96)$$

e $|\alpha|_\infty \equiv \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$. E' chiaro che, se tale condizione è verificata, la successione numerica

$$S_N \equiv \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{I}^n \\ |\alpha|_\infty \leq N}} a_\alpha, \quad (5.97)$$

è di Cauchy e quindi convergerà, per N che tende ad infinito, ad un numero che verrà indicato con il simbolo in (5.95). A proposito di serie multiple vale la seguente generalizzazione della Proposizione 2.11:

Proposizione 5.36 (Serie multidimensionali) *Siano a_α numeri (complessi) dati per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Allora*

$$\begin{aligned} \sup_N \sum_{|\alpha|_1 \leq N} |a_\alpha| < \infty &\iff \sup_N \sum_{|\alpha|_\infty \leq N} |a_\alpha| < \infty \\ &\iff \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} |a_\alpha| < \infty. \end{aligned} \quad (5.98)$$

*Nel caso in cui una delle precedenti relazioni valga si ha che*³⁹

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|_1 \leq N} a_\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|_\infty \leq N} a_\alpha = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} a_\alpha. \quad (5.99)$$

Dimostrazione La (5.9) implica che $\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha|_1 \leq N\} \subset \{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha|_\infty \leq N\} \subset \{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha|_1 \leq nN\}$ da cui segue che

$$\sum_{|\alpha|_1 \leq N} |a_\alpha| \leq \sum_{|\alpha|_\infty \leq N} |a_\alpha| \leq \sum_{|\alpha|_1 \leq nN} |a_\alpha|,$$

che, a sua volta, implica la prima equivalenza in (5.98). La “ $\Leftarrow$ ” nella seconda equivalenza di (5.98) è ovvia; per dimostrare la “ $\Rightarrow$ ” osserviamo che esiste $M > 0$ tale che, per ogni $N > 0$,

$$\sum_{|\alpha|_\infty \leq N} |a_\alpha| = \sum_{\alpha_1=0}^N \cdots \sum_{\alpha_n=0}^N |a_\alpha| \leq M,$$

e quindi se, dati $N_1, \dots, N_n$, denotiamo $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$, si ha che

$$\sum_{\alpha_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{N_n} |a_\alpha| \leq \sum_{\alpha_1=0}^N \cdots \sum_{\alpha_n=0}^N |a_\alpha| \leq M,$$

e l'asserto si ottiene mandando $N_n, \dots, N_1$ ad infinito.

³⁹Le norme $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_\infty$ sono particolarmente usate su vettori interi (poichè il valore di tali norme è un intero) ma, in principio, qualunque altra norma potrebbe essere usata (si veda 5.35).

Osserviamo che da (5.98) (e dalla disuguaglianza triangolare) segue che i limiti in (5.99) esistono⁴⁰. La prima uguaglianza in (5.99) segue da:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\alpha|_\infty \leq N} a_\alpha - \sum_{|\alpha|_1 \leq N} a_\alpha \right| &= \left| \sum_{|\alpha|_\infty \leq N, |\alpha|_1 > N} a_\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha|_\infty \leq N, |\alpha|_1 > N} |a_\alpha| \\ &\leq \sum_{N < |\alpha|_1 \leq nN} |a_\alpha| \rightarrow 0 \quad (\text{per } N \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

essendo $\sum_{|\alpha|_1 \leq N} |a_\alpha|$ di Cauchy. Per dimostrare la seconda uguaglianza, sia $0 < N < M$ e $N_1, \dots, N_n$ interi tali che $N \leq N_i \leq M$. Allora

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{N_n} a_\alpha - \sum_{|\alpha|_\infty \leq N} a_\alpha \right| &= \left| \sum_{\alpha_i \leq N_i, |\alpha|_\infty > N} a_\alpha \right| \\ &\leq \sum_{\alpha_i \leq N_i, |\alpha|_\infty > N} |a_\alpha| \leq \sum_{N < |\alpha|_\infty \leq M} |a_\alpha|; \end{aligned}$$

l'asserto segue mandando $N \rightarrow \infty$. ■

Esempio 5.37 (i) Si consideri la seguente serie bidimensionale⁴¹

$$\sum_{\substack{i,j \neq 0 \\ i,j \in \mathbb{N}}} \sin(i+j) e^{-ij}. \quad (5.100)$$

Poiché per una qualunque coppia di numeri reali $a, b \geq 1$ si ha $ab \geq \frac{a+b}{2}$, si ha anche che

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j \neq 0 \\ \max\{i,j\} \leq N}} e^{-ij} &\leq \sum_{\substack{i,j \neq 0 \\ \max\{i,j\} \leq N}} e^{-\frac{i+j}{2}} \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq N} e^{-\frac{i}{2}} e^{-\frac{j}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N e^{-\frac{i}{2}} \right)^2 < \left(\frac{d}{1-d} \right)^2, \quad \text{con } d \equiv \sqrt{1/e}. \end{aligned}$$

Quindi la serie in (5.100) converge assolutamente.

⁴⁰Ad esempio se $\sum_{|\alpha|_1 \leq N} |a_\alpha|$ è una successione (in N) di Cauchy lo è anche $\sum_{|\alpha|_1 \leq N} a_\alpha$ essendo, per $M > N$, $\left| \sum_{|\alpha|_1 \leq M} a_\alpha - \sum_{|\alpha|_1 \leq N} a_\alpha \right| = \left| \sum_{N < |\alpha|_1 \leq M} a_\alpha \right| \leq \sum_{N < |\alpha|_1 \leq M} |a_\alpha| =$

$\sum_{|\alpha|_1 \leq M} |a_\alpha| - \sum_{|\alpha|_1 \leq N} |a_\alpha|$.

⁴¹In questo caso si preferisce denotare le coppie di naturali con (i, j) o (h, k) piuttosto che $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

(ii) Si consideri la serie $f(x) \equiv \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} x^\alpha$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |x^\alpha| = \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} |x_1|^{\alpha_1} \right) \cdots \left(\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} |x_n|^{\alpha_n} \right) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - |x_j|} ,$$

e quindi la serie $f(x)$ converge assolutamente per $x \in E \equiv \{x : |x_i| < 1\}$ e su tale insieme si ha

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} x^\alpha = \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - x_j} . \quad (5.101)$$

In particolare (prendendo $x_1 = \cdots = x_n = 0$) si ha

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \delta^{|\alpha|_1} = \left(\frac{1}{1 - \delta} \right)^n , \quad \forall 0 < \delta < 1 . \quad (5.102)$$

Passiamo ora alle **serie di potenze in $\mathbb{R}^n$** ovvero a serie della forma

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x - x_0)^\alpha , \quad (5.103)$$

con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo che se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e se $|x - x_0| < r$, per ogni N , si ha

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (x - x_0)^\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha| \leq N} |a_\alpha| r^{|\alpha|_1} . \quad (5.104)$$

Dunque, se, per un qualche $r > 0$, la serie

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha r^{|\alpha|_1} , \quad (5.105)$$

converge assolutamente, allora la serie (5.103) definisce una funzione $f(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n$ nella sfera di raggio r centrata in x_0 . Dimostriamo ora che *tale funzione f è di classe $C^\infty(\{x_0\})$ e che*

$$\frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!} = a_\alpha . \quad (5.106)$$

Se $M \equiv \sum |a_\alpha| r^{|\alpha|_1} < \infty$ allora

$$|a_\alpha| \leq M r^{-|\alpha|_1} , \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n . \quad (5.107)$$

Dunque, se $1 \leq j \leq n$ e se $0 < \rho < r$, per ogni x tale che $|x - x_0| < \rho$ si ha

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |\partial_{x_j} (a_\alpha (x - x_0)^\alpha)| &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: \alpha_j \geq 1} |a_\alpha \alpha_j (x - x_0)^{\alpha - e^{(j)}}| \\ &\leq \frac{1}{\rho} \sum |a_\alpha| |\alpha_j| \rho^{|\alpha|_1} \leq \frac{M}{\rho} \sum (\rho/r)^{|\alpha|_1} |\alpha_j| \\ &= \frac{M}{\rho} \left(\frac{1}{1 - \rho/r} \right)^{n-1} \sum_{\alpha_j=1}^{\infty} \alpha_j (\rho/r)^{\alpha_j} < \infty . \end{aligned}$$

Quindi, la serie $\sum a_\alpha (x - x_0)^\alpha$ e la serie $\sum \partial_{x_j} (a_\alpha (x - x_0)^\alpha)$ convergono uniformemente su $\{|x - x_0| < \rho\}$ e dall'Osservazione 5.27 segue che f è C^1 su tale sfera. Per l'arbitrarietà di ρ , tale argomento può essere iterato un numero arbitrario di volte e quindi $f \in C^\infty(\{x_0\})$. L'uguaglianza (5.106) segue ora facilmente dall'Osservazione 5.27.

Definizione 5.38 Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. (i) Si dice che una serie di potenze $\sum a_\alpha (x - x_0)^\alpha$ ha raggio di convergenza positivo se esiste $r > 0$ per cui la serie (5.105) converge assolutamente; l'estremo superiore dell'insieme degli $r > 0$ per cui (5.105) converge assolutamente prende il nome di raggio di convergenza.

(ii) La serie di Taylor di una funzione $f \in C^\infty(\{x_0\})$ è definita come la serie

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x - x_0)^\alpha, \quad \text{con } a_\alpha \equiv \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!}. \quad (5.108)$$

(iii) La classe $C^\omega(\{x_0\})$ ("la classe delle funzioni reali-analitiche nell'intorno di x_0 ") è l'insieme delle funzioni $f \in C^\infty(\{x_0\})$ la cui serie di Taylor, $\sum a_\alpha (x - x_0)^\alpha$, ha raggio di convergenza positivo e $f \equiv \sum a_\alpha (x - x_0)^\alpha$ in un intorno di x_0 . Se $E \subset \mathbb{R}^n$, si dice che $f \in C^\omega(E)$ se $f \in C^\omega(\{x_0\})$ per ogni $x_0 \in E$.

Esempio 5.39 Sia k un intero positivo e sia $f(x) \equiv (x_1 + \dots + x_n)^k$. Derivando f si ottiene, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial_x^\alpha f(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } |\alpha| \neq k, \\ k!, & \text{se } |\alpha| = k \end{cases} \quad (5.109)$$

e quindi, dalla (5.92), segue che

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: |\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha. \quad (5.110)$$

Tale formula, che dà la serie di Taylor della funzione $(x_1 + \dots + x_n)^k$, non è altro che una generalizzazione della formula del binomio di Newton. Ponendo $x = (1, 1, \dots, 1)$ in (5.110) si ottiene

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: |\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} = \frac{n^k}{k!} \implies |\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad (5.111)$$

Esempio 5.40 Sia $f(x) \equiv \log(1 + x_1 \dots x_n)$ e $x_0 \equiv 0$. La funzione f è di classe $C^\infty(\{0\})$. Inoltre ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione scalare $\log(1+t)$ attorno a $t = 0$ (che ha raggio di convergenza 1), troviamo, per tutti gli $|x| < 1$ (che implica $|x_1 \dots x_n| < 1$),

$$\log(1 + x_1 \dots x_n) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x_1 \dots x_n)^k = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^{ke_*}, \quad e_* \equiv (1, \dots, 1).$$

Dunque $f \in C^\omega(\{0\})$ e la sua serie di Taylor in $x = 0$ (che ha raggio di convergenza uguale ad 1) è data da

$$\sum a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \equiv \begin{cases} \frac{(-1)^k}{k}, & \text{se } \exists k \in \mathbb{N}: \alpha = ke_*, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio 5.41 (i) Naturalmente, come nel caso unidimensionale, C^ω è una classe funzionale più piccola di C^∞ come dimostra la generalizzazione dell'Esempio 3.9 ovvero la funzione

$$\varphi_\varepsilon(x) \equiv \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right), & \text{se } |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{se } |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (5.112)$$

Come nel caso unidimensionale, si ha che $\varphi_\varepsilon \geq 0$, che $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) = \{x : |x| \leq \varepsilon\}$ e che $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. D'altra parte φ_ε non è analitica nell'intorno di un qualunque punto x_0 con $|x_0| = \varepsilon$ (in tali punti la serie di Taylor è identicamente nulla mentre se $|x| < \varepsilon$ la funzione è strettamente positiva).

(ii) Siano $K_R(x_0)$ e $K_r(x_0)$ due cubi aperti in $\mathbb{R}^n$ di centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e lato, rispettivamente $R > r > 0$. Sia $\chi(t)$ la funzione $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dell'Esempio 3.10 e definiamo

$$\psi(x) \equiv \prod_{i=1}^n \chi(x_i).$$

La funzione ψ soddisfa, in $\mathbb{R}^n$, le stesse proprietà che χ soddisfa in $\mathbb{R}$ ovvero

(a) $0 \leq \psi(x) \leq 1$; (b) $\psi(x) \equiv 1$ se $|x - x_0| < r$; (c) $\text{supp}(\psi) = \{x : |x - x_0| \leq R\}$, (dove naturalmente qui x e x_0 sono vettori in $\mathbb{R}^n$ e $|\cdot|$ è la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$).

Infine, come nel caso unidimensionale, vale la seguente caratterizzazione

Teorema 5.42 *La funzione f è analitica in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $f \in C^\infty(\{x_0\})$ ed esistono due costanti positive M, r tali che*

$$\sup_{|x-x_0|<r} |\partial^\alpha f(x)| \leq M r^{-|\alpha|} \alpha!, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \quad (5.113)$$

Dimostrazione Lo schema della dimostrazione è identico a quello del Teorema 3.6. Assumiamo (5.113) e si osservi che se x è tale che $|x - x_0| \leq \rho$, allora $|x_i - x_{0i}| \leq \rho$ e

$$\begin{aligned} |(x - x_0)^\alpha| &\equiv \left| \prod_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^{\alpha_i} \right| = \prod_{i=1}^n |x_i - x_{0i}|^{\alpha_i} \\ &\leq \rho^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \equiv \rho^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

Dunque, per $\rho < r$ e per ogni $N > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq N} \left| \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right| &\leq M \sum_{|\alpha| \leq N} r^{-|\alpha|} \rho^{|\alpha|} \leq M \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{|\alpha|} \\ &= \left\{ \sum_{k \geq 0} \left(\frac{\rho}{r} \right)^k \right\}^n < \infty, \end{aligned}$$

e cioè la serie di Taylor di f converge assolutamente. Inoltre, dalla formula di Taylor (Proposizione 5.34) segue che, per ogni intero $k \geq 1$, esiste un punto $y^{(k)}$ sul segmento che unisce x_0 con x tale che, se $|x - x_0| \leq R < r/n$, si ha [ricordando anche (5.111)]

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right| &= \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial_x^\alpha f(y^{(k)})}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right| \\ &\leq M \sum_{|\alpha|=k} \left(\frac{R}{r} \right)^{|\alpha|} \leq M \left(\frac{R}{r} \right)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \\ &= M \left(\frac{nR}{r} \right)^k \rightarrow 0 \quad (\text{per } k \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

il che significa che f è analitica.

Viceversa, se f è analitica in un intorno di x_0 allora esiste $R > 0$ tale che

$$f(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_\beta (x - x_0)^\beta, \quad a_\beta \equiv \frac{\partial_x^\beta f(x_0)}{\beta!}, \quad \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} |a_\beta| R^{|\beta|} < \infty. \quad (5.114)$$

Allora, osservando che, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\frac{(\alpha_i + \beta_i)!}{\beta_i!} = \alpha_i! \binom{\alpha_i + \beta_i}{\beta_i} \leq \alpha_i! 2^{\alpha_i + \beta_i} \implies \frac{(\alpha + \beta)!}{\beta!} \leq \alpha! 2^{|\alpha + \beta|},$$

si ha, per $|x - x_0| \leq r < R/2$,

$$\begin{aligned} \sup_{|x - x_0| < r} |\partial_x^\alpha f(x)| &= \sup_{|x - x_0| < r} \left| \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha + \beta} \frac{(\alpha + \beta)!}{\beta!} (x - x_0)^\beta \right| \\ &\leq r^{-|\alpha|} \alpha! \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} |a_{\alpha + \beta}| (2r)^{|\alpha + \beta|} \\ &\leq M r^{-|\alpha|} \alpha!, \quad \text{con } M \equiv \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} |a_\beta| R^{|\beta|}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.10 Massimi e minimi locali di funzioni di n variabili

In questa sezione discuteremo alcune condizioni legate all'esistenza di massimi o minimi locali di una funzione *scalare*⁴² regolare di n variabili reali.

⁴²Qui è essenziale che le funzioni che si considerano siano funzioni a valori in $\mathbb{R}$ (dove c'è un ordinamento naturale); al contrario l'aver assunto il codominio $\mathbb{R}$ nei precedenti paragrafi è stato fatto solamente per semplificare l'esposizione.

Definizione 5.43 (i) Data una funzione $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ con $E \subset \mathbb{R}^n$, un punto x_0 in cui si annulla il gradiente, cioè $f'(x_0) = 0$, si chiama **punto critico** (o anche "punto stazionario") per f .

(ii) Sia $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in E$ è un punto di **minimo locale** (o "relativo") per f se esiste una sfera B di centro x_0 tale che

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in E \cap B. \quad (5.115)$$

Se in (5.115) vale il segno " $<$ " per $x \neq x_0$, si dice che x_0 è un minimo locale in senso stretto. Le stesse definizioni si danno nel caso di **massimo locale** sostituendo " $\leq$ " in (5.115) con " $\geq$ " (e successivamente " $<$ " con " $>$ ").

Ricordiamo che una matrice (reale) $A \in \text{Mat}(n \times n)$ si dice **definita positiva** se è simmetrica e se

$$A\xi \cdot \xi > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (5.116)$$

in tal caso si scrive $A > 0$; se in (5.116) vale il segno " $\geq$ " si dice che A è **semidefinita** positiva e si scrive $A \geq 0$; se in (5.116) vale il segno " $<$ " (rispettivamente " $\leq$ ") si dice che A è **definita negativa** (rispettivamente **semidefinita** negativa) e si scrive $A < 0$ (rispettivamente " $A \leq 0$ ").⁴³

Proposizione 5.44 Se E è un aperto di $\mathbb{R}^n$ valgono le seguenti affermazioni:

(i) Condizione necessaria affinché una funzione $f \in C^1(E)$ abbia un punto di minimo o massimo locale in $x_0 \in E$ è che x_0 sia un punto critico per f .

(ii) Se $f \in C^2(E)$, x_0 è un punto critico per f e $f''(x_0) > 0$ (rispettivamente " $f''(x_0) < 0$ "), allora f ha un minimo locale (rispettivamente "massimo locale") in senso stretto nel punto x_0 .

(iii) Se $f \in C^2(E)$, x_0 è un punto critico per f e $f''(x_0)$ ha un autovalore positivo ed uno negativo, allora x_0 non è né un minimo né un massimo locale⁴⁴.

Dimostrazione (i): Assumiamo che f abbia un massimo locale in x_0 . Allora, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fissato, la funzione di una variabile $t \rightarrow F(t) \equiv f(x_0 + t\xi)$ sarà definita per t sufficientemente piccoli ed avrà un massimo locale in $t = 0$. Quindi $F'(0) = 0$ ovvero la derivata direzionale $\partial_\xi f(x_0) = 0$. Dall'arbitrarietà di ξ segue l'asserto.

(ii): dalle ipotesi e dalla (5.86) segue che (per $|\xi|$ sufficientemente piccolo)

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \xi \cdot \xi + o(|\xi|^2). \quad (5.117)$$

La funzione di n variabili $G(x) \equiv \frac{1}{2} f''(x_0) x \cdot x$ è continua sull'insieme compatto

$$S^{n-1} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \quad (5.118)$$

⁴³ Si ricorda che $A > 0$ se e solo se A è simmetrica e tutti gli autovalori di A sono strettamente positivi; per alcuni richiami di algebra lineare si veda 5.58.

⁴⁴ Ovvero: arbitrariamente vicini al punto critico x_0 vi sono punti su cui f assume valori strettamente minori di $f(x_0)$ e punti su cui f assume valori strettamente maggiori di $f(x_0)$. I punti per cui vale (iii) vengono detti **punti di sella**.

e vi assume (essendo $f''(x_0)$ una matrice definita positiva) sempre valori positivi. Dunque, dal teorema di Weierstrass segue che

$$\min_{x \in S^{n-1}} G(x) \equiv \lambda > 0. \quad (5.119)$$

Allora, da (5.119), si deduce (per $|\xi|$ piccoli e diversi da 0) che

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi) &= f(x_0) + |\xi|^2 \left(\frac{1}{2} f''(x_0) \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \frac{\xi}{|\xi|} + \frac{o(|\xi|^2)}{|\xi|^2} \right) \\ &= f(x_0) + |\xi|^2 \left(G\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) + \frac{o(|\xi|^2)}{|\xi|^2} \right) \\ &\geq f(x_0) + |\xi|^2 \left(\lambda + \frac{o(|\xi|^2)}{|\xi|^2} \right) \\ &> f(x_0) \end{aligned}$$

($|\xi|$ dovrà essere preso così piccolo che, ad esempio, $|o(|\xi|^2)|/|\xi|^2 \leq \frac{\lambda}{2}$). Nel caso $f''(x_0) < 0$ basterà considerare la funzione $-f$ al posto di f .

(iii): Siano λ e $-\mu$ (con $\lambda > 0$, $\mu > 0$) i due autovalori di $A \equiv f''(x_0)$ menzionati nell'ipotesi e siano v e w due corrispondenti autovettori: $Av = \lambda v$ e $Aw = -\mu w$. Essendo x_0 un punto critico per f , dalla formula di Taylor al secondo ordine (5.86) con $\xi = tv$ si ha⁴⁵

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + \frac{1}{2} \lambda t^2 |v|^2 + o(t^2) = f(x_0) + t^2 \left[\frac{\lambda}{2} |v|^2 + \frac{o(t^2)}{t^2} \right]; \quad (5.120)$$

e, per il teorema della permanenza del segno, la funzione di t tra parentesi quadrate è strettamente positiva se t è sufficientemente piccolo. Quindi sulla retta di direzione v e passante per x_0 (ovvero la retta di equazione parametrica $\{y = x_0 + tv : t \in \mathbb{R}\}$) vi sono punti y arbitrariamente vicini a x_0 tali che $f(y) > f(x_0)$. Analogamente, si vede che sulla retta passante per x_0 e di direzione w vi sono punti y arbitrariamente vicini a x_0 tali che $f(y) < f(x_0)$. ■

Esempio 5.45 (i) Dati n numeri reali diversi da zero $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, definiamo

$$f(x) \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + P(x) = x \cdot \Lambda x + P(x), \quad (5.121)$$

dove⁴⁶ $\Lambda \equiv \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $P(x)$ è, ad esempio, un monomio di grado $d > 2$. L'ipotesi su P implica che le derivate prime e seconde di P in 0 si annullano e quindi l'origine è un punto critico per f e dalla Proposizione 5.44 segue che tale

⁴⁵ Se $\xi = tv$, $\xi \cdot A\xi = t^2 v \cdot Av = t^2 \lambda v \cdot v = \lambda t^2 |v|^2$ e $o(|\xi|^2) = o(t^2)$.

⁴⁶ $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ denota la matrice diagonale ($n \times n$) con elementi di matrice $\Lambda_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\Lambda_{ii} = \lambda_i$.

punto è un minimo se $\lambda_i > 0$ per ogni i , è un massimo se $\lambda_i < 0$ per ogni i ed è una sella altrimenti.

(ii) Sia $f(x, y) = \sinh(x^2 + y^4)$ per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcolando le derivate si trova che $(0, 0)$ è l'unico punto critico e $f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi la Proposizione 5.44 non ci permette di concludere nulla sul comportamento di f vicino al punto critico. D'altra parte $\sinh 0 = 0$ e $\sinh t > 0$ se $t > 0$ dunque l'origine è il minimo assoluto di f .

5.11 Funzioni differenziabili da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

Le nozioni di differenziabilità e di derivabilità si estendono facilmente alla situazione di funzioni vettoriali:

Definizione 5.46 Una funzione f a valori in $\mathbb{R}^m$ e definita su di un aperto E di $\mathbb{R}^n$ si dice **differenziabile** nel punto $x_0 \in E$ se esiste un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che, per tutti i vettori $h \in \mathbb{R}^n$ sufficientemente piccoli, si abbia

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + r(h), \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0. \quad (5.122)$$

L'applicazione lineare L (che dipende dal punto x_0) si denota anche con df o più precisamente con df_{x_0} e si chiama il **differenziale** della funzione f nel punto x_0 .

Naturalmente, ora, all'applicazione lineare df corrisponde una matrice ($m \times n$): tale matrice prende il nome di **matrice jacobiana** (o "jacobiano") della funzione f nel punto x_0 . Se denotiamo con J (o con J_f) tale matrice, sappiamo che i suoi elementi di matrice J_{ij} (corrispondenti alla i -esima riga ed alla j -esima colonna) non sono altro che la i -esima componente del vettore $df_{x_0}(e^{(j)})$, dove $e^{(j)}$, come al solito, denota il j -esimo versore della base ortonormale standard in $\mathbb{R}^n$. Dunque prendendo la i -esima componente della relazione (5.35) e ponendo $h = te^{(j)}$, si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + te^{(j)}) - f_i(x_0)}{t} = \left(df_{x_0}(e^{(j)}) \right)_i, \quad (5.123)$$

ovvero la matrice jacobiana non è altro che la matrice delle derivate parziali di f :

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0). \quad (5.124)$$

Tale matrice ($m \times n$) si denota anche con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \quad \text{o semplicemente con} \quad f'(x_0). \quad (5.125)$$

Diremo che $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è di classe $C^k(E, \mathbb{R}^m)$ se esiste un aperto $A \supset E$ su cui tutte le componenti f_i di f sono di classe $C^k(E, \mathbb{R})$.

Vediamo ora qual è la **matrice jacobiana di una funzione composta**. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$; sia f una funzione $C^1(\{x_0\}, \mathbb{R}^m)$, $y_0 \equiv f(x_0)$ e g una funzione $C^1(\{y_0\}, \mathbb{R}^p)$. Allora, dalla Proposizione 5.30, segue che, per ogni $1 \leq i \leq p$,

$$\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(y_0) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0), \quad (5.126)$$

ovvero la matrice jacobiana di funzione composta è data dal prodotto delle matrici jacobiane:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(y_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0). \quad (5.127)$$

In generale, l'idea del formalismo che abbiamo sviluppato è che il calcolo noto per funzioni scalari si estende con l'ovvia interpretazione dei simboli al caso di funzioni vettoriali. Ad esempio, se $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$, $z \equiv (y, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$ ed $h(x) \equiv (g(x), x)$ si verifica immediatamente la seguente "regola di derivazione":

$$\frac{\partial(F \circ h)}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \quad (5.128)$$

dove le matrici jacobiane di F sono calcolate nel punto $h(x)$. Un altro esempio si ottiene generalizzando (in maniera ovvia la dimostrazione della Proposizione 5.30: se f e g sono due funzioni a valori, rispettivamente in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^p$, differenziabili, rispettivamente in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$ con $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $g \circ f$ è differenziabile in x_0 e vale

$$d(g \circ f)_{x_0} \xi = dg_{y_0}(df_{x_0} \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (5.129)$$

Infine, se $U \equiv B_r(x_0)$ è una sfera centrata in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ e $|\xi| < r$, applicando la (5.80) alle componenti g_i di g , si ottiene immediatamente la seguente fondamentale formula⁴⁷ ("teorema della media per funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ "):

$$g(x_0 + \xi) - g(x_0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0 + t\xi) \xi dt. \quad (5.130)$$

5.12 Derivate sotto segno di integrale

In questa sezione, per semplicità di notazione, considereremo funzioni (scalari) di due variabili, x e y , ma la lettrice o il lettore noterà che i risultati valgono anche per funzioni (scalari) di n variabili⁴⁸.

⁴⁷Per definizione, se I è un intervallo di $\mathbb{R}$ e $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione continua (e quindi tutte le componenti di u sono continue), l'integrale $\int_I u(t)dt$ è un vettore in $\mathbb{R}^n$ la cui i -esima componente è data da $\int_I u_i(t)dt$; analogamente se $A: t \in I \rightarrow A(t)$ è una funzione a valori matriciali, cioè $A(t)$ è una matrice $n \times m$, e se gli elementi di matrice di A sono funzioni continue su I , l'integrale $\int_I A(t)dt$ è una matrice $n \times m$ il cui elemento $\left(\int_I A(t)dt\right)_{ij}$ è dato da $\int_I A_{ij}(t)dt$.

Per maggiori informazioni si vedano 5.46 e 5.47.

⁴⁸Per l'integrazione di funzioni continue di n variabili su "rettangoli" si veda 5.48.

Integrando una funzione di due variabili x e y rispetto a y si ottiene una funzione della sola variabile x ; il problema che qui ci poniamo è: sotto quali ipotesi tale funzione è derivabile rispetto a x e qual è il valore di tale derivata.

Proposizione 5.47 Sia $-\infty < a < b < \infty$ e siano $f = f(x, y)$ e la sua derivata parziale rispetto a x , f_x , funzioni di classe $C(\{x_0\} \times [a, b])$. Allora la funzione

$$F(x) \equiv \int_a^b f(x, y) dy \quad (5.131)$$

è derivabile in x_0 e si ha

$$\frac{dF}{dx}(x_0) = \int_a^b f_x(x_0, y) dy. \quad (5.132)$$

Dimostrazione Dalle ipotesi segue che esiste un intervallo chiuso $I \equiv [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ tale che $f, f_x \in C(I \times [a, b])$. Quindi f e f_x sono uniformemente continue su $I \times [a, b]$. Se $\Delta(h)$ denota il rapporto incrementale della funzione F in x_0 , dal teorema fondamentale del calcolo segue che:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &\equiv \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \int_a^b \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h} dy \\ &= \int_a^b \left(\int_0^1 f_x(x_0 + th, y) dt \right) dy. \end{aligned} \quad (5.133)$$

Per la uniforme continuità di f_x in $I \times [a, b]$, dato un qualunque $\varepsilon > 0$, esiste un r , che possiamo assumere minore di δ , tale che se $|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})| < r$ allora $|f_x(x, y) - f_x(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon$. Allora se $|h| < r$, da (5.133) segue che

$$\begin{aligned} \left| \Delta(h) - \int_a^b f_x(x_0, y) dy \right| &= \left| \int_a^b \left(\int_0^1 [f_x(x_0 + th, y) - f_x(x_0, y)] dt \right) dy \right| \\ &\leq \int_a^b \left(\int_0^1 |f_x(x_0 + th, y) - f_x(x_0, y)| dt \right) dy \\ &\leq \varepsilon (b - a). \end{aligned} \quad (5.134)$$

Dall'arbitrarietà di ε segue l'asserto. ■

Esempio 5.48 Siano a, b ed f come nell'enunciato della Proposizione 5.47 e siano $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $g(t)$ funzioni $C^1(\{t_0\})$ tali che $\alpha(t_0) = a$, $\beta(t_0) = b$ e $g(t_0) = x_0$. Allora dal teorema fondamentale del calcolo e dalla Proposizione 5.47 segue che la funzione $F(u, v, w) \equiv \int_u^v f(w, y) dy$ è una funzione $C^1(\{(a, b, x_0)\})$ e dalla⁴⁹ Proposizione 5.30 e dalla Proposizione 5.47 segue che

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(g(t), y) dy \Big|_{t_0} = \beta'(t_0) f(x_0, b) - \alpha'(t_0) f(x_0, a) + g'(t_0) \int_a^b f_x(x_0, y) dy.$$

⁴⁹A n , x , x_0 , f e φ della Proposizione 5.30 corrispondono qui, rispettivamente, 3, (u, v, w) , (a, b, x_0) , F e $(\alpha(t), \beta(t), g(t))$.

Esercizi e complementi

E 5.1 Si dimostri che le funzioni $|\cdot|$, $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_\infty$ definite in (5.1) e (5.8) sono delle norme anche su $\mathbb{C}^n$. Si dimostrino le (5.9) per $x \in \mathbb{C}^n$. Si faccia vedere che tali disuguaglianze non possono essere migliorate (ad esempio $|x|_1 \leq n|x|_\infty$ non vale, in generale, se n viene sostituito da una costante α più piccola: infatti se $x = (1, 1, \dots, 1)$ si ha $|x|_1 = n$ e $|x|_\infty = 1$).

E 5.2 Dimostrare che una unione (arbitraria) di insiemi aperti è un insieme aperto e che una intersezione arbitraria di chiusi è un insieme chiuso.

E 5.3 Dare un esempio di una famiglia di aperti E_i e di una famiglia di chiusi C_i , con $i = 0, 1, 2, \dots$, tali che $\bigcap E_i$ non sia un insieme aperto e $\bigcup C_i$ non sia un insieme chiuso.

E 5.4 Dimostrare che un'unione finita di chiusi è chiusa e che un'intersezione finita di aperti è aperta.

E 5.5 Dimostrare che l'insieme vuoto $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono gli unici insiemi contemporaneamente sia aperti che chiusi.

E 5.6 Si dimostri che l'anello $\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$ è connesso per poligonalità.

E 5.7* Si dimostri l'affermazione fatta al punto (iv) dell'Esempio 5.6.

E 5.8 Dimostrare (usando solo la definizione di uniforme continuità) che la funzione $f : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow |x|^2$ è uniformemente continua su $B_1 \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

E 5.9 Dimostrare che se $g(t)$ è una funzione di una variabile, continua in $t_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_n)$ allora $f(x)$ è continua in x_0 , $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $x_{0n} = t_0$.

E 5.10 Fissato un numero naturale $N > 0$, si trovi un δ tale che $|f(x) - f(x_0)| < 10^{-N}$ per ogni $|x - x_0| < \delta$ nei seguenti casi:

- (i) $f = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}^4$, $x_0 = (0, 1, 1, 2)$;
- (ii) $f = \sin \frac{1}{x_1 x_3^2}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $x_0 = (-1, 0, -1)$;
- (iii) $f = \log[\cos(\prod_{i=1}^n x_i)]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = 0$;
- (iv) $f = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = (1, \dots, 1)$;
- (v) $f = \tanh |x|_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = (1, \dots, 1)$;
- (vi) $f = (|x|^{3/2}, \tanh |x|_1)$, $x \in \mathbb{R}^4$, $x_0 = (0, 1, 1, 2)$.

E 5.11 Sia $S^2 \equiv \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$, $\bar{x} \equiv (2, 0, 0)$, $x_0 = (1, 0, 0)$, $f \equiv x_1 x_2 (\sin |x - \bar{x}|)^{-1}$. Trovare δ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni $x \in S^2$ tale che $|x - x_0| < \delta$.

E 5.12 Sia⁵⁰ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\pi + 2 \operatorname{Arctan}(y/x)}, & \text{se } x \neq 0, \\ \frac{y^2}{2\pi}, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

(i) Si calcoli, per ogni θ fissato il $\lim_{r \downarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

(ii) E' continua f nell'origine?

E 5.13 (i) Sia $f(x, y)$ definita nell'intorno di $(0, 0)$ ed a valori in $\mathbb{R}$. Dimostrare la seguente affermazione:

Se per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che, per ogni $0 < r < \delta$, si ha $|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)| < \varepsilon$ allora f è continua in $(0, 0)$.

(ii) Discutere tale risultato in connessione con l'esercizio 5.12.

E 5.14 Sia $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dimostrare che f è continua in $x_0 \in E$ se e solo se per ogni cammino⁵¹ $z: (-1, 1) \rightarrow E$ tale che $z(0) = x_0$, la funzione $t \rightarrow f(z(t))$ è continua in 0.

E 5.15 Si dimostri che, nel Teorema 5.3, (b) $\implies$ (a) direttamente [senza "passare" per (c)].

E 5.16 Si controlli che, per la funzione f definita in (5.29), si ha $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = 0$ per ogni $\xi \neq 0$.

E 5.17 Calcolare $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_i}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

E 5.18 Si dimostri che se c è la costante in (5.38) allora $c < 1/5$.

E 5.19 Siano f e g due funzioni differenziabili in $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si dimostri che $f + g$ e fg sono differenziabili e che vale (5.42) o più precisamente che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si ha

$$d(f + g)_{x_0}(\xi) = df_{x_0}(\xi) + dg_{x_0}(\xi), \quad d(fg)_{x_0}(\xi) = g(x_0)df_{x_0}(\xi) + f(x_0)dg_{x_0}(\xi). \quad (5.135)$$

C 5.20 (Funzioni omogenee)

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice positivamente omogenea (rispettivamente, "omogenea") di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad \forall t > 0 \text{ (rispettivamente } \forall 0 \neq t \in \mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (5.136)$$

Proposizione 5.49 Si consideri una funzione positivamente omogenea f di grado α continua su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se $\alpha \leq 0$, f non può essere estesa ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^n$ a meno che $\alpha = 0$ e f sia identicamente costante. Se $\alpha > 0$, f è estendibile ad una funzione continua con $f(0) = 0$.

⁵⁰ $\operatorname{Arctan} 0 = 0$.

⁵¹ Si ricordi la definizione data nella nota 13.

Dimostrazione Se $\alpha < 0$ e se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, si ha $\lim_{t \rightarrow 0} |f(tx)| = \lim_{t \rightarrow 0} |t|^\alpha |f(x)| = \infty$ e quindi f non è estendibile ad una funzione continua. La funzione $f(x) \equiv c$ è chiaramente positivamente omogenea di grado 0 ed è continua. Se f è positivamente omogenea di grado 0 e non è identicamente costante, significa che esistono $x_0 \neq y_0$ (x_0 e y_0 non nulli) tali che $f(x_0) \neq f(y_0)$. Ma allora le due successioni $x^{(k)} \equiv \frac{1}{k}x_0$ e $y^{(k)} \equiv \frac{1}{k}y_0$ tendono a zero, ma

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}x_0\right) = f(x_0) \neq f(y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y^{(k)}) ,$$

e quindi f non è estendibile con continuità in 0. Infine se $\alpha > 0$ e se estendiamo f in 0 ponendo $f(0) \equiv 0$, la funzione così ottenuta è continua poiché se $x \neq 0$

$$|f(x)| = \left| f\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) \right| = |x|^\alpha \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq M|x|^\alpha \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow 0) ,$$

dove $M = \max_{x \in \mathbb{R}^n, |x|=1} |f(x)|$. ■

Proposizione 5.50 (“Teorema di Eulero”) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ una funzione positivamente omogenea di grado α , sia $x \neq 0$ e sia $\xi \equiv \frac{x}{|x|}$. Allora

$$|x| \frac{\partial f}{\partial \xi}(x) = x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x) . \quad (5.137)$$

Dimostrazione La prima uguaglianza deriva da (5.39).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi}(x) &\equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(x + t \frac{x}{|x|}\right) - f(x)}{t} = \frac{f\left(\left(1 + \frac{t}{|x|}\right)x\right) - f(x)}{t} \\ &= f(x) \frac{\left(1 + \frac{t}{|x|}\right)^\alpha - 1}{t} = \alpha \frac{f(x)}{|x|} . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

E 5.21 Si consideri la seguente funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x_1 x_2|^\alpha}{|x|^\beta} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché: (i) f sia continua nell'origine; (ii) f abbia derivate direzionali nell'origine; (iii) f sia differenziabile nell'origine; (iv) f sia $C^1(\{0\})$.

E 5.22 * Ripetere l'Esercizio 5.21 con le funzioni $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x_1 \dots x_n|^\alpha}{|x|^\beta} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} , \quad h(x) = \begin{cases} \frac{|x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n}}{|x|^\beta} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 . \end{cases}$$

E 5.23 Si definisca esplicitamente la funzione $o(h)$ in (5.68) e si controlli che effettivamente tale funzione divisa per $|h|$ tende a 0 quando h tende a 0.

E 5.24 Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{sen}(x_1 e^{x_2 + x_3}), \quad \varphi(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, t)$$

Scrivere $f \circ \varphi$; calcolarne la derivata in $t = 0$ in maniera diretta e applicando la regola di derivazione per funzioni composte.

E 5.25 Calcolare $\partial_x^\alpha f(x_0)$ e $\partial_x^p f(x_0)(\xi^{(1)} \xi^{(2)} \xi^{(3)})$, con $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^4$, $p = 3$, $\alpha = (2, 1)$, $x_0 = (1, -1)$, $\xi^{(1)} = (1, 0)$, $\xi^{(2)} = (2, 2)$, $\xi^{(3)} = (3, 1)$.

E 5.26 Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x, y) = x \ln(x + y)$ intorno al punto $(0, 1)$.

E 5.27 Si scriva esplicitamente il polinomio di Taylor di ordine 2, 3, e 4 per una funzione arbitraria di due e tre variabili nell'intorno dell'origine (assumendo, naturalmente che tali funzioni siano sufficientemente derivabili).

E 5.28 Si calcoli il polinomio di Taylor $P_k(\xi; x_0)$ nei seguenti casi:

- (1) $k = 3$, $n = 2$, $x_0 = 0$, $f(x) = e^{x_1 x_2} + x_1^4$,
- (2) $k = 3$, (n arbitrario), $x_0 = 0$, $f(x) = \cos |x|$,
- (3) $k = 2$, $x_0 = 0$, $f(x) = x_2^4 - \sinh(x_1 + \dots + x_n)$,
- (4) $k = 4$, $n = 2$, $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$, $f(x) = \tan(xy) - \log y$.

E 5.29 Si dia una stima dei resti $|R_k|$ nell'Esercizio 5.28.

E 5.30 Si calcolino le serie di Taylor nei casi (1), (2) e (3) dell'Esercizio 5.28.

E 5.31 Si dimostri che la condizione in (5.113) è equivalente a

$$\exists \bar{M}, \bar{r} > 0: \sup_{|x - x_0| < \bar{r}} |\partial^\alpha f(x)| \leq \bar{M} \frac{|\alpha|!}{\bar{r}^{|\alpha|}}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \quad (5.138)$$

E 5.32 Sia $f \equiv e^{-|x|^2}(1 + x_1 x_3)$ con $x \in \mathbb{R}^3$. Calcolare $f''(0)$ e scrivere la formula di Taylor (in 0) al secondo ordine per tale f .

E 5.33 Scrivere la matrice hessiana della funzione $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x$ e calcolare $f''(0)\xi \cdot \eta$, dove $\xi = (3, 2)$ e $\eta = (-1, 3)$.

E 5.34 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione $f(x, y) = (2x + y)e^{x^2 - y^2}$ nel punto $(0, 0)$.

E 5.35 Una famiglia numerabile di sottoinsiemi, $\{A_j\}$, di $\mathbb{N}^n$, si chiama una **invasione** di $\mathbb{N}^n$ se: gli A_j sono finiti; $A_j \subset A_{j+1}$; $\cup A_j = \mathbb{N}^n$.

Dimostrare che se $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha$ converge assolutamente e se $a \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ [con S_N definito in (5.96)], allora

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in A_j} a_\alpha = a$$

per ogni invasione $\{A_j\}$ di $\mathbb{N}^n$.

E 5.36 Dimostrare che la serie tridimensionale $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^3} \exp(-|\alpha|^\sigma)$ converge assolutamente, per ogni $\sigma > 0$.

E 5.37 Si dica su quale insieme la serie $f(x) \equiv \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{x^\alpha}{\alpha!}$ converge uniformemente e calcolarne la somma.

C 5.38 (Serie di potenze a valori vettoriali)

Le serie di potenze a valori in $\mathbb{R}^n$ si studiano esattamente come nel caso $n = 1$. In particolare si dice che $\sum_{k \geq 0} a^{(k)}$ converge assolutamente se converge la serie numerica $\sum_{k \geq 0} |a^{(k)}|$. Vale, allora, l'analogo del Teorema 2.1:

Teorema 5.51 Sia $a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ e sia $R^{-1} \equiv \limsup |a^{(k)}|^{\frac{1}{k}}$. La serie $\sum a^{(k)} t^k$ converge assolutamente se $|t| < R$ e non converge se $|t| > R$.

La dimostrazione è identica a quella nel caso $n = 1$.

E 5.39 Si dimostri che se R e $a^{(k)}$ sono come nel Teorema 5.51, allora

$$R = \min_{1 \leq i \leq n} R_i, \quad \text{dove} \quad R_i = \limsup |a_i^{(k)}|^{\frac{1}{k}}. \quad (5.139)$$

E 5.40 Si dimostri che nelle ipotesi del punto (iii) della Proposizione 5.44, sulla retta passante per x_0 e di direzione w vi sono punti y arbitrariamente vicini a x_0 tali che $f(y) < f(x_0)$.

E 5.41 Dimostrare che se A è aperto e connesso in $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ e $f'(x) \equiv \nabla f(x) = 0 \forall x \in A$ allora f è costante su A .

E 5.42* Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e supponiamo che $f'(x_0) = 0$ se e solo se $x = x_0$, e che $\sup_{\mathbb{R}^n} f > f(x_0) > \inf_{\mathbb{R}^n} f$.

(i) Nel caso $n = 1$ dimostrare che $x = x_0$ non può essere né un minimo né un massimo locale per f .

(ii) E' vera l'affermazione fatta al punto (i) nel caso di $n \geq 2$?

E 5.43 Trovare il massimo e minimo (se esistono) della funzione

$$F(x) = \int_0^1 \log(1 + x^2 + y^2) dy.$$

E 5.44 Si dimostrino (5.128) e (5.129) (sotto le ipotesi che le precedono).

E 5.45 Si calcoli $\frac{\partial f}{\partial x}$ nei seguenti casi:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f &= \cos(xy) - z^3; & \text{(ii)} \quad f &= e^{-|x|^2}(1 + x_1 x_3), \quad (x \in \mathbb{R}^3); \\ \text{(iii)} \quad f &= \left(\tanh\left(\frac{x_1}{x_2}\right), x_1 x_2^3, |x| \right), \quad (x \in \mathbb{R}^2); \\ \text{(iv)} \quad f &= (x_1, x_1 x_2, \dots, x_1 \cdots x_n); & \text{(v)} \quad f &= \left(e^{|x|^3}, \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (5.140)$$

C 5.46 (Integrazione di funzioni $C([a, b], \mathbb{R}^n)$)

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Se $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ definiamo l'integrale di u su un intervallo $(a, b) \subset I$, il vettore

$$\int_a^b u(t) dt = \left(\int_a^b u_1(t) dt, \dots, \int_a^b u_n(t) dt \right) \quad (5.141)$$

Ricordiamo che se $v \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ allora $v'(t)$ non è altro che il vettore costituito dalle derivate di v : $\left(v'(t) \right)_i \equiv (v_i)'(t)$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Le seguenti proprietà (i) e (ii) sono di immediata verifica:

(i) se $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ allora per ogni $t_0 \in I$ la funzione $v(t) = \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$ appartiene a $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ e vale il *teorema fondamentale del calcolo*: $v'(t) = u(t)$.

(ii) i Teoremi 1.11 e 1.10 valgono anche quando $C(E)$ e $C^1(E)$ vengano sostituiti da $C(I, \mathbb{R}^n)$ e $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

(iii) Se $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ e $(a, b) \subset I$, per ogni norma $|\cdot|$ su $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\left| \int_a^b u(t) dt \right| \leq \int_a^b |u(t)| dt. \quad (5.142)$$

Dimostrazione di (iii): Dalla teoria di Riemann dell'integrazione (relativa a funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$), osservando che la funzione $t \rightarrow |u(t)|$ è continua e ponendo $\delta_k = \frac{b-a}{k}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b u(t) dt \right| &= \left| \left(\int_a^b u_1(t) dt, \dots, \int_a^b u_n(t) dt \right) \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left(\sum_{j=1}^k \delta_k u_1(a + \delta_k j), \dots, \sum_{j=1}^k \delta_k u_n(a + \delta_k j) \right) \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^k \delta_k (u_1(a + \delta_k j), \dots, u_n(a + \delta_k j)) \right| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \delta_k |u(a + \delta_k j)| = \int_a^b |u(t)| dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(iv) Sia $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ e $(a, b) \subset I$ e si consideri la successione di vettori

$$x^{(k)} = \sum_{j=1}^k \frac{b-a}{k} u\left(a + \frac{b-a}{k} j\right), \quad (5.143)$$

allora $x^{(k)}$ converge (in qualunque norma in $\mathbb{R}^n$) a $\int_a^b u(t) dt$. La formula (5.143) non è altro che la somma di Riemann relativa alla partizione ottenuta dividendo $[a, b]$ in k intervalli uguali.

C 5.47 (Integrazione di funzioni a valori matriciali) Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $t \in I \rightarrow A(t)$ una funzione a valori nell'insieme $\text{Mat}(n \times m)$ delle matrici $n \times m$; ossia, per ogni $t \in I$, $A(t)$ è una matrice $n \times m$ con elementi $A_{ij}(t)$ (con $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$). Diremo che la funzione $t \in I \rightarrow A(t) \in \text{Mat}(n \times m)$ è continua, ovvero $A \in C(I, \text{Mat}(n \times m))$, se sono continue le nm funzioni $A_{ij}(t)$ (per ogni i, j). Analogamente diremo che $t \in I \rightarrow A(t) \in C^1(I, \text{Mat}(n \times m))$ se sono C^1 le funzioni $t \rightarrow A_{ij}(t)$ e per definizione la derivata di A sarà data dalla matrice di elementi $A'_{ij}(t)$ ovvero, per ogni i, j , $(A_{ij}(t))' \equiv A'_{ij}(t)$. Se $A \in C(I, \text{Mat}(n \times m))$ possiamo definire l'integrale di A integrando elemento per elemento, ossia, per definizione, $\int_I A(t) dt$ è una matrice $n \times m$ tale che

$$\left(\int_I A(t) dt \right)_{ij} \equiv \int_I A_{ij}(t) dt. \quad (5.144)$$

E' immediato verificare, anche in questo caso il teorema fondamentale del calcolo:

se $A \in C(I, \text{Mat}(n \times m))$ e, per ogni $t_0 \in I$, la funzione $t \rightarrow B(t) \equiv \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ appartiene a $C^1(I, \text{Mat}(n \times m))$ e $B'(t) = A(t)$.

In effetti tali definizioni saranno più trasparenti una volta identificato $\text{Mat}(n \times m)$ con $\mathbb{R}^{nm}$ tramite la mappa che alla matrice $A \in \text{Mat}(n \times m)$ costituita dai vettori colonna⁵² $u^{(1)}, \dots, u^{(m)}$ associa il vettore in $\mathbb{R}^{nm}$ le cui componenti sono l'elenco ordinato delle componenti dei vettori $u^{(1)}, \dots, u^{(m)}$. Ad esempio, secondo tale identificazione, la norma euclidea della matrice A è, per definizione, $|A| \equiv \sqrt{\sum_{i,j} A_{ij}^2}$. A questo punto la discussione

del punto 5.46, con le sue conseguenze (i)-(iv), può ripetersi per funzioni a valori matriciali.

C 5.48 (Integrazione di funzioni $C(E, \mathbb{R})$ con E rettangolo compatto di $\mathbb{R}^n$)

Sia $n = 2$ e sia $f = f(x, y)$ una funzione di due variabili continua su di un rettangolo chiuso

$$R \equiv [a, b] \times [c, d], \quad -\infty < a < b < \infty, \quad -\infty < c < d < \infty. \quad (5.145)$$

La funzione di una variabile $y \rightarrow f(x, y)$ (fissato x) è una funzione continua sull'intervallo $[c, d]$ e quindi possiamo calcolarne l'integrale (qui per "integrale" si intenderà "integrale secondo Riemann"). Il risultato è una funzione di x che, come vedremo, è continua su $[a, b]$ e possiamo dunque calcolarne ancora l'integrale. Chiaramente avremmo potuto fare le stesse operazioni scambiando il ruolo di x e y (ossia avremmo potuto fare prima l'integrale rispetto a x e poi quello rispetto a y): la seguente proposizione ci assicura che otterremmo lo stesso risultato.

Proposizione 5.52 Sia $f = f(x, y)$ una funzione continua sul rettangolo chiuso (5.145) e siano

$$F(x) \equiv \int_c^d f(x, y) dy, \quad G(y) \equiv \int_a^b f(x, y) dx. \quad (5.146)$$

Allora F e G sono continue, rispettivamente, su $[a, b]$ e $[c, d]$ e si ha

$$\int_a^b F(x) dx = \int_c^d G(y) dy. \quad (5.147)$$

⁵²Ovvero $A_{ij} = u_i^{(j)}$; i vettori colonna $u^{(j)}$ sono elementi di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione Poiché R è compatto e f è ivi continua, f è uniformemente continua su R . Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon/(d - c)$ qualora $|(x, y) - (x', y')| \leq \delta$. Quindi, se $|x - x'| \leq \delta$, si ha

$$|F(x) - F(x')| = \left| \int_c^d (f(x, y) - f(x', y)) dy \right| \leq \int_c^d |f(x, y) - f(x', y)| dy \leq \varepsilon ,$$

ovvero F è continua su $[c, d]$. Il ragionamento che mostra che G è continua su $[a, b]$ è del tutto analogo. Definiamo, ora, per ogni intero $N > 0$

$$F_N(x) \equiv \sum_{i=1}^N f(x, y_i) \delta_N , \quad \text{con} \quad \delta_N \equiv \frac{d-c}{N} , \quad y_i \equiv c + (i-1)\delta_N . \quad (5.148)$$

F_N converge uniformemente in $[a, b]$ a F : dato infatti ε , sia N_0 tale che $\delta_{N_0} \leq \delta$ (dove δ è scelto come sopra). Allora, per ogni $N \geq N_0$,

$$\begin{aligned} |F_N(x) - F(x)| &= \left| \sum_{i=1}^N \int_{y_i}^{y_{i+1}} (f(x, y_i) - f(x, y)) dy \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{y_i}^{y_{i+1}} |f(x, y_i) - f(x, y)| dy \leq \frac{\varepsilon}{d-c} \sum_{i=1}^N \int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \varepsilon . \end{aligned}$$

Quindi dal Teorema 1.10 e dalla teoria dell'integrazione di Riemann in una variabile (vedi 0.1), segue che

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \int_a^b \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b F_N(x) dx \\ &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{i=1}^N f(x, y_i) \delta_0 dx \\ &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N G(y_i) \delta_0 = \int_c^d G(y) dy . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Iterando, la Proposizione 5.52 si ottiene immediatamente il seguente risultato generale

Corollario 5.53 Sia $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), una funzione continua sul "rettangolo" chiuso

$$E \equiv [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] , \quad \text{con} \quad -\infty < a_i < b_i < \infty , \quad (5.149)$$

e sia σ una permutazione⁵³ di $\{1, \dots, n\}$, allora, per ogni $2 \leq i \leq n$, la funzione

$$x_{\sigma_i} \rightarrow \int_{a_{\sigma_{i-1}}}^{b_{\sigma_{i-1}}} \left(\cdots \left(\int_{a_{\sigma_1}}^{b_{\sigma_1}} f(x) dx_{\sigma_1} \right) \cdots \right) dx_{\sigma_{i-1}}$$

è una funzione continua su $[a_{\sigma_i}, b_{\sigma_i}]$ e si ha

$$\int_{a_n}^{b_n} \left(\cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx_1 \right) \cdots \right) dx_n = \int_{a_{\sigma_n}}^{b_{\sigma_n}} \left(\cdots \left(\int_{a_{\sigma_1}}^{b_{\sigma_1}} f(x) dx_{\sigma_1} \right) \cdots \right) dx_{\sigma_n} . \quad (5.150)$$

⁵³Una permutazione σ dell'insieme $I = \{1, \dots, n\}$ è un'applicazione biunivoca $\sigma : i \in I \rightarrow \sigma_i \in I$.

Il contenuto di tale corollario è che se f è continua su di un rettangolo chiuso di $\mathbb{R}^n$ possiamo integrare una variabile alla volta, in un qualunque ordine, ed il numero ottenuto dopo n integrazioni unidimensionali è lo stesso indipendentemente dall'ordine scelto.

E 5.49 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un rettangolo compatto. Si dimostri che se $g \in C(E, \mathbb{R})$ e $\int_a^b |g| dx = 0$ allora $g = 0$ in E .

C 5.50 (Spazi metrici e topologie relative)

Un insieme (arbitrario) X si dice **spazio metrico** se è dotato di una funzione simmetrica⁵⁴ $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ che soddisfi le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & d(x, y) = 0 \iff x = y, \\ \text{(ii)} \quad & d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X. \end{aligned} \quad (5.151)$$

Tale funzione $d(\cdot, \cdot)$ si chiama **distanza** e la proprietà (ii) si chiama *disuguaglianza triangolare*; con leggero abuso di linguaggio, chiameremo spazio metrico la coppia (X, d) con X insieme dotato di metrica d .

Uno spazio normato X dotato di norma $\|\cdot\|$ è uno spazio metrico con distanza $d(x, y) \equiv \|x - y\|$. Un esempio di spazio metrico che non sia uno spazio normato è dato dal cerchio unitario

$$S^1 \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1\} \quad (5.152)$$

con distanza $d(x, y) \equiv |x - y|$ dove $|\cdot|$ è la usuale norma euclidea in $\mathbb{R}^2$. In generale un qualunque sottoinsieme X di uno spazio metrico (Y, d) (ovvero dello spazio metrico Y dotato di distanza d) è uno spazio metrico rispetto alla stessa distanza d .

Su spazi metrici, si dice che una successione $\{x_n\}$ con $x_n \in X$ **converge** ad un punto $x_0 \in X$ se

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0. \quad (5.153)$$

Una successione $\{x_n\}$ in X si dice di **Cauchy** (o “fondamentale”) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N. \quad (5.154)$$

Uno spazio metrico X si dice **completo** se ogni successione di Cauchy ammette limite in X .

Avere una distanza permette di definire una *topologia* su X (si ricordi la definizione di topologia data nella nota 5): una **sfera aperta** di centro $x_0 \in X$ e raggio $r > 0$ è, per definizione, il sottoinsieme di X dato da

$$B_r(x_0) \equiv \{x \in X : d(x, x_0) < r\}. \quad (5.155)$$

Ad esempio, se $X = [0, 1]$ (rispetto alla distanza usuale $|x - y|$), la sfera $B_{\frac{1}{2}}(0)$ è data dall'insieme $[0, \frac{1}{2})$. La **topologia standard** sullo spazio metrico (X, d) (ovvero “la famiglia standard degli aperti di X ”) è data dagli insiemi che sono un'unione arbitraria di sfere aperte (e l'insieme vuoto è per definizione un aperto).

Più dettagliatamente si danno le seguenti definizioni (che generalizzano ad un arbitrario spazio metrico (X, d) le nozioni analoghe note nel caso di $(\mathbb{R}^n, d)$ con $d(x, y) \equiv |x - y|$):

⁵⁴Cioè $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$.

- (T₁) $A \subset X$ è un *insieme aperto* se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$.
 (T₂) $C \subset X$ è un *insieme chiuso* se $C = X \setminus A$ per qualche insieme $A \subset X$ aperto.
 (T₃) $N \subset X$ è un *intorno* di x se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset N$.
 (T₄) x è un *punto interno* di $E \subset X$ se E è un intorno di x .
 (T₅) $x \in X$ è un *punto limite* (o “di accumulazione”) per $E \subset X$, se per ogni $r > 0$, $B_r(x) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. $x \in E$ è un *punto isolato* di E se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \setminus \{x\} \subset X \setminus E$.
 (T₆) La *chiusura* di $E \subset X$, denotata $\overline{E}$, è il più piccolo insieme chiuso che contenga E .
 L'*interno* di E , denotato $\overset{\circ}{E}$, è il più grande aperto contenuto in E . La *frontiera* di E , denotata ∂E , è l'insieme $\overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$.

Anche la nozione di *continuità* si generalizza immediatamente: sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione tra due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) diremo che f è continua in $x_0 \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon, \quad (5.156)$$

o, equivalentemente, se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $x \in B_\delta(x_0)$ implica che $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$. Si noti che tali sfere sono sottoinsiemi di insiemi (in generale) diversi e sono definite in termini di distanze (in generale) diverse. Il simbolo $C(X, Y)$ denoterà l'insieme delle funzioni continue⁵⁵ da X in Y .

Molte delle proprietà note nel caso di $\mathbb{R}^n$ si estendono (spesso con le stesse dimostrazioni) al caso di uno spazio metrico arbitrario. Ad esempio si ha:

Proposizione 5.54 *Sia (X, d) uno spazio metrico.*

- (i) *Se X è completo $E \subset X$ è chiuso se e solo se ogni successione di Cauchy in E ammette limite in E ;*
 (ii) *per un qualunque insieme $E \subset X$, $(\overset{\circ}{E})^c = \overline{E^c}$.*
 (iv) *per un qualunque insieme $E \subset X$, $x \in \partial E$ se e solo se ogni sfera aperta centrata in x contiene sia punti di E che punti di E^c , in formule: $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$.*

Dimostrazione La dimostrazione è identica alla dimostrazione dei punti (ii), (iii) e (iv) della Proposizione 5.2. ■

Si noti che S^1 è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^2$ e che non ha nessun punto interno *rispetto alla topologia di $\mathbb{R}^2$* (cioè: non esiste alcuna sfera in $\mathbb{R}^2$ tutta contenuta in S^1) mentre è un *insieme aperto* (e quindi *ogni punto di S^1 è un punto interno di S^1*) rispetto alla topologia di S^1 considerato come spazio metrico rispetto alla distanza “ereditata” da $\mathbb{R}^2$.

In generale, dato un qualunque spazio topologico $(Y, \mathcal{A})$ e dato un sottoinsieme $X \subset Y$, si definisce la **topologia relativa** (o “topologia indotta”) la famiglia di sottoinsiemi $A \subset X$ per i quali esista un aperto E di Y tale che $A = E \cap X$. E' facile vedere che⁵⁶ se (Y, d) è uno spazio metrico e $X \subset Y$, la topologia standard di (X, d) (ovvero la topologia generata dalle sfere aperte in X con la metrica d) coincide con la topologia indotta da Y su X .

⁵⁵Cioè continue in ogni punto.

⁵⁶Esercizio 5.56.

E 5.51 Sia X uno spazio metrico e $E \subset X$. Con riferimento alle definizioni $(T_1) \div (T_6)$ date in 5.50, si provi che:

- (i) $\overset{\circ}{E}$ è l'unione dei punti interni di E .
- (ii) $\overline{E} = E \cup \{\text{punti limite di } E\}$.
- (iii) ∂E è l'unione dei punti isolati di E e dei punti limite di E che non siano punti interni di E .

E 5.52 Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Dimostrare che $f \in C(X, Y)$ se e solo se è verificata una delle seguenti proprietà:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \quad (5.157)$$

$$B \text{ aperto di } Y \implies f^{-1}(B) \text{ aperto di } X. \quad (5.158)$$

E 5.53 Un sottoinsieme $K \subset X$ (X spazio metrico) si dice **compatto** se da ogni ricoprimento aperto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito⁵⁷.

- (i) si dimostri che K è compatto se e solo se da ogni successione in K è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in K .
- (ii) Dimostrare che se $f \in C(X, Y)$ (Y spazio metrico) e K è un insieme compatto di X allora $f(K)$ è un insieme compatto di Y .
- (iii) Si dia un esempio di spazio metrico X e di un suo sottoinsieme E che sia chiuso e limitato ma che non sia compatto.

C 5.54 Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, D un sottoinsieme compatto di X e $f \in C(X, Y)$. Se f è iniettiva, allora la funzione inversa, f^{-1} , appartiene a $C(K, D)$ dove K è l'insieme compatto $f(D)$.

Dimostrazione Sia $\{y_n\}$ una successione in K tale che $y_n \rightarrow \bar{y} \in K$ e siano x_n e $\bar{x}$ (gli unici punti in D) tali che $f(x_n) = y_n$ e $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Supponiamo per assurdo che $\{x_n\}$ non converga a $\bar{x}$. Dalla compattezza di D segue che esiste $\{x_{n_k}\}$ e $\bar{x}$ in D tali che $x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \neq \bar{x}$. Ma allora $f(x_{n_k})$ convergerebbe, per la continuità di f , a $f(\bar{x})$ che, per l'iniettività di f , è diverso da $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Questo contraddice le posizioni iniziali. ■

E 5.55 Si dimostri che un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico (X, d) è uno spazio metrico (con la stessa distanza d) completo.

E 5.56 Sia (Y, d) uno spazio metrico e sia $X \subset Y$. Si dimostri che $A \subset X$ è aperto secondo la definizione (T_1) se e solo se A è aperto rispetto alla topologia relativa (ovvero se e solo se esiste un aperto E di Y tale che $A = E \cap X$).

E 5.57 Si dimostri che $[1, 2)$ è un sottoinsieme chiuso di $X = [0, 2)$ nella topologia relativa.

⁵⁷Cioè: se $\{A_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di aperti di X tale che $K \subset \bigcup_{j \in J} A_j$, allora esistono $j_1, \dots, j_N$ tali che $K \subset \bigcup_{i=1}^N A_{j_i}$.

R 5.58 Alcuni richiami di algebra lineare

(1) $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ denota la matrice diagonale ($n \times n$) con elementi di matrice $\Lambda_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\Lambda_{ii} = \lambda_i$.

(2) Se $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ sono n vettori in $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{C}^m$, $T \equiv [v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]$ denota la matrice ($m \times n$) con elementi di matrice $T_{ij} = v_i^{(j)}$, ossia i vettori $v^{(j)}$ costituiscono la j -esima colonna della matrice T .

(3) Se A è una matrice ($p \times m$) e $v^{(j)} \in \mathbb{R}^m$ (o $\mathbb{C}^m$), $1 \leq j \leq n$, allora

$$A[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}] = [Av^{(1)}, \dots, Av^{(n)}]. \quad (5.159)$$

(4) Se $[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]$ è come sopra e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ allora

$$[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]\Lambda = [\lambda_1 v^{(1)}, \dots, \lambda_n v^{(n)}]. \quad (5.160)$$

(5) Se $[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]$ è come sopra ed $x = (x_1, \dots, x_n)$ è un vettore in $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) allora

$$[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]x = x_1 v^{(1)} + \dots + x_n v^{(n)}. \quad (5.161)$$

(6) Si ricorda che data una matrice ($n \times n$) ad elementi reali o complessi, si chiama **polinomio caratteristico** di A , il polinomio di grado n , $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ dove I è la matrice identità, $I = \text{diag}(1, \dots, 1)$ (a volte, se necessario, si indicherà I con I_n). Le n soluzioni (in generale complesse, anche se A è una matrice reale) di $P_A(\lambda) = 0$ si chiamano **autovalori** di A . L'insieme degli autovalori di A , si chiama **spettro** di A e si denota $\sigma(A)$. Tale insieme contiene, al più, n numeri complessi distinti (per esempio $\sigma(I_n) = \{1\}$). Se $\lambda \in \sigma(A)$, il determinante di $A - \lambda I$ è zero e, dalle proprietà del determinante, segue che le n colonne (in generale complesse) che formano la matrice $A - \lambda I$ sono *linearmente dipendenti*; questo, in virtù del punto (5) significa che esiste un vettore (in generale a componenti complesse) non nullo x , tale che $(A - \lambda I)x = 0$ ovvero $Ax = \lambda x$; tale vettore si chiama **autovettore** di A relativo all'autovalore λ .

(7) Una matrice quadrata $A \in \text{Mat}(n \times n)$ si dice **diagonalizzabile** se esiste una matrice non singolare T (cioè con $\det T \neq 0$) tale che $T^{-1}AT = \Lambda$ con Λ matrice diagonale. Dalla proprietà del determinante

$$\det(AB) = \det(BA) \quad (5.162)$$

segue che $\det(T^{-1}BT) = \det B$. Da queste relazioni segue facilmente che se A è diagonalizzabile e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, allora lo spettro di A è costituito dall'insieme dei λ_i .

(8) Se A possiede n autovettori indipendenti, allora è diagonalizzabile. Infatti, siano $v^{(j)}$ gli n autovettori indipendenti di A e λ_j i corrispondenti autovalori. Allora $T = [v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]$ è non singolare e dai punti (3) e (4) segue che

$$\begin{aligned} AT &= A[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}] = [Av^{(1)}, \dots, Av^{(n)}] \\ &= [\lambda_1 v^{(1)}, \dots, \lambda_n v^{(n)}] = [v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]\Lambda = T\Lambda \end{aligned}$$

con $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ovvero $T^{-1}AT = \Lambda$, cioè A è diagonalizzabile.

(9) (**Esercizio**) Se A possiede $m \leq n$ autovalori distinti, allora i corrispondenti autovettori sono indipendenti e dunque: se A possiede n autovalori distinti, allora è diagonalizzabile.

(10) Se A è una matrice $(n \times m)$, A^T denota la matrice **trasposta** di A ovvero la matrice $(m \times n)$ con elementi $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Una matrice quadrata A si dice **simmetrica** se $A^T = A$. Si verifichi che A è simmetrica (e reale) se e solo se

$$u \cdot Av = Au \cdot v, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n. \quad (5.163)$$

Una matrice quadrata reale U si dice **ortogonale** se $UU^T = U^T U = I$ ovvero se U è invertibile e $U^{-1} = U^T$. Una matrice simmetrica è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale ovvero esiste una matrice ortogonale U tale che $U^T A U = \Lambda$, con Λ diagonale (per una dimostrazione si veda, ad esempio, *Algebra lineare* di S. Lang, Ed. Boringhieri).

(11) (**Forma canonica di Jordan**) Vale il seguente teorema di Jordan⁵⁸:

Teorema Per ogni matrice quadrata complessa A esiste una matrice invertibile (quadrata, complessa) T tale che

$$T^{-1}AT = J \equiv \begin{pmatrix} J^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J^{(2)} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & J^{(m)} \end{pmatrix}$$

dove $J^{(i)}$ sono blocchi quadrati $d_i \times d_i$ e $\sum_{i=1}^m d_i = n$; tali blocchi (detti "blocchi di Jordan") hanno la forma

$$J^{(i)} = \lambda_i I_{d_i} + \varepsilon_i N_{d_i}$$

con $\lambda_i \in \mathbb{C}$, ε_i uguale o a 0 o a 1 e N_d denota la matrice $(d \times d)$ nilpotente⁵⁹

$$N_d \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

C 5.59 (Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$)

Si consideri $\mathbb{R}^n$ e la sua base "ortonormale" standard $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$, dove, come al solito, $e^{(j)}$ è la n -nupla, $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, con tutti 0 tranne un 1 nel j -esimo posto. Ogni punto (o "vettore") $x \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si scrive allora come

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e^{(j)}, \quad (5.164)$$

e il **prodotto scalare** tra due punti (o "vettori") $x, y \in \mathbb{R}^n$ è dato da

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j. \quad (5.165)$$

⁵⁸Per una dimostrazione si veda, ad esempio, *Algebra lineare* di S. Lang, Ed. Boringhieri.

⁵⁹" M Nilpotente" significa che esiste un intero positivo p tale che $M^p = 0$.

Il prodotto scalare, visto come funzione su coppie di punti in $\mathbb{R}^n$ è *simmetrico e bilineare*⁶⁰. E' possibile usare il prodotto scalare anche per introdurre il concetto di⁶¹ "angolo" in $\mathbb{R}^n$; in particolare si dice che due vettori x e y sono *ortogonali*, e si scrive $x \perp y$ se $x \cdot y = 0$. La base standard $\{e^{(j)}\}$ è "ortonormale" nel senso che $e^{(i)} \cdot e^{(j)} = \delta_{ij}$ dove δ_{ij} è il cosiddetto *delta di Kronecker*:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (5.166)$$

Dato un vettore non nullo x definiamo il *piano ortogonale a x* l'insieme

$$\pi_x \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot x = 0\}. \quad (5.167)$$

E' facile vedere che⁶² π_x è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $(n-1)$.

Una matrice (reale) $A \in \text{Mat}(n \times n)$ si dice *simmetrica* se

$$Ax \cdot y = x \cdot Ay, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (5.168)$$

ovvero⁶³ se $A_{ij} = A_{ji}$ (dove A_{ij} denota l'elemento di matrice corrispondente alla riga i ed alla colonna j).

Una matrice (reale) U si dice *ortogonale* se conserva il prodotto scalare:

$$Ux \cdot Uy = x \cdot y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (5.169)$$

Si verifica facilmente⁶⁴ che U è ortogonale se e solo se vale una qualunque delle seguenti affermazioni: (i) $U^T = U^{-1}$; (ii) $|Ux| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$; (iii) $U = [v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]$ con $\{v^{(j)}\}$ base ortonormale in $\mathbb{R}^n$ (cioè $v^{(i)} \cdot v^{(j)} = \delta_{ij}$).

Matrici ortogonali hanno determinate uguale a⁶⁵ 1 o -1. Chiamiamo $SO(n)$ l'insieme delle matrici (reali) $(n \times n)$ ortogonali e con determinante uguale ad 1:

$$SO(n) \equiv \{U \in \text{Mat}(n \times n) : U^T = U^{-1} \text{ e } \det U = 1\}. \quad (5.170)$$

Si vede facilmente⁶⁶ che ogni matrice $U \in SO(2)$ corrisponde ad una *rotazione in $\mathbb{R}^2$* mentre ogni matrice di $SO(3)$ può scriversi come composizione di tre rotazioni in $\mathbb{R}^3$.

Concludiamo questi richiami ricordando che esiste un procedimento standard (chiamato "il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt") per costruire una base ortonormale $\{u^{(j)}\}$ a partire da una qualunque base di vettori, $\{v^{(j)}\}$, in $\mathbb{R}^n$ in modo tale che il sottospazio vettoriale generato da $u^{(1)}, \dots, u^{(j)}$ coincida con il sottospazio generato da $v^{(1)}, \dots, v^{(j)}$ (si veda **5.66**).

E 5.60 Si dimostri che A soddisfa (5.168) se e solo se $A_{ij} = A_{ji}$.

⁶⁰Cioè: $x \cdot y = y \cdot x$ e $(ax + by) \cdot z = ax \cdot z + by \cdot z$ per ogni coppia di scalari a, b ; *bi-lineare* significa che è lineare in tutti e due i suoi argomenti (cosa che deriva immediatamente dalla proprietà di simmetria).

⁶¹Per una discussione più generale su angoli e prodotto scalare si veda **5.61**.

⁶²Esercizio **5.65**.

⁶³Esercizio **5.60**.

⁶⁴Esercizio **5.62**.

⁶⁵Esercizio **5.62**, punto (3).

⁶⁶Esercizi **5.63** e **5.64**.

E 5.61 (Angoli in $\mathbb{R}^n$). Sia $\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ la funzione inversa di $\cos \theta$ definita in modo tale che $\text{Arccos } 0 = \frac{\pi}{2}$; (si noti che questa definizione fissa univocamente il “ramo” della funzione inversa del coseno, che abbiamo qui chiamato Arccos , e che tale funzione è continua su $[-1, 1]$ e C^∞ sull'intervallo aperto $(-1, 1)$). Dati due vettori non nulli x ed y in $\mathbb{R}^n$ definiamo l'angolo θ tra x e y come

$$\theta \equiv \text{Arccos} \frac{x \cdot y}{|x| |y|}. \quad (5.171)$$

Si dimostri che, nei casi $n = 2, 3$, tale definizione coincide con quella usuale di angolo θ formato dalle due semirette $\{\lambda x : \lambda \geq 0\}$ e $\{\lambda y : \lambda \geq 0\}$ (scegliendo naturalmente l'angolo $\theta \leq \pi$).

E 5.62 Si dimostri che (5.169) è equivalente ad una qualunque delle seguenti affermazioni: (i) $U^T = U^{-1}$; (ii) $|Ux| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$; (iii) $U = [v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]$ con $\{v^{(j)}\}$ base ortonormale in $\mathbb{R}^n$.

E 5.63 (Il gruppo⁶⁷ $SO(2)$). Sia $U \in SO(2)$. (i) Dimostrare che esiste $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che

$$U = U(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5.172)$$

(ii) Dimostrare che se ad un punto $x \in \mathbb{R}^2$ facciamo corrispondere il numero complesso $z = x_1 + ix_2$, l'azione di U in (5.63) corrisponde alla moltiplicazione di z per $e^{i\theta}$.

[Più formalmente, sia $\varphi : x \in \mathbb{R}^2 \rightarrow z = \varphi(x) \equiv x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$. Bisogna allora dimostrare che $\varphi(Ux) = e^{i\theta} \varphi(x)$.]

(iii) Si dimostri che $U(\theta)^{-1} = U(-\theta)$.

E 5.64 (Il gruppo $SO(3)$). In virtù dell'esercizio precedente possiamo definire in $\mathbb{R}^3$ rotazioni di un angolo θ attorno ad un asse coordinato:

$$\begin{aligned} U^{(1)}(\theta) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, & (\text{rotazione di } \theta \text{ attorno a } e^{(1)}) \\ U^{(2)}(\theta) &\equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, & (\text{rotazione di } \theta \text{ attorno a } e^{(2)}) \\ U^{(3)}(\theta) &\equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & (\text{rotazione di } \theta \text{ attorno a } e^{(3)}) \end{aligned} \quad (5.173)$$

(i) Si dimostri che se $U \in SO(3)$ allora esistono $\theta, \varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ tali che

$$U = U^{(3)}(\theta)U^{(1)}(\varphi)U^{(3)}(\psi). \quad (5.174)$$

(ii) Si dimostri che $(U^{(i)}(\theta))^{-1} = U^{(i)}(-\theta)$.

⁶⁷ Un **gruppo** G è un insieme dotato di una operazione binaria “ $*$ ”: $a, b \in G \rightarrow a * b \in G$ che goda delle seguenti proprietà: (i) (associatività) $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$; (ii) (esistenza dell'elemento neutro o dell'unità) $\exists e \in G$ tale che $e * a = a * e = a, \forall a \in G$; (iii) (esistenza dell'inverso) $\forall a \in G \exists b \in G$ tale che $a * b = b * a = e$ (e tale elemento viene normalmente denotato con $b = a^{-1}$).

E 5.65 Si dimostri che dato $x \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$, il piano ortogonale a x , π_x , è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $(n - 1)$.

E 5.66 (Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) Siano $v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$ vettori indipendenti in $\mathbb{R}^n$ con $m \leq n$ e sia V lo spazio vettoriale generato da tali vettori. Definiamo

$$\begin{aligned} w^{(1)} &\equiv v^{(1)}, & u^{(1)} &\equiv \frac{w^{(1)}}{|w^{(1)}|}, \\ w^{(2)} &\equiv v^{(2)} - \frac{v^{(2)} \cdot w^{(1)}}{w^{(1)} \cdot w^{(1)}} w^{(1)}, & u^{(2)} &\equiv \frac{w^{(2)}}{|w^{(2)}|}, \end{aligned}$$

e, ricorsivamente,

$$w^{(j)} \equiv v^{(j)} - \sum_{h=1}^{j-1} \frac{v^{(j)} \cdot w^{(h)}}{w^{(h)} \cdot w^{(h)}} w^{(h)}, \quad u^{(j)} \equiv \frac{w^{(j)}}{|w^{(j)}|}. \quad (5.175)$$

Si dimostri che: $w^{(j)} \cdot w^{(h)} = 0$ per ogni $h \neq j$; $\{u^{(j)}\}$ è una base ortonormale di V (cioè $u^{(j)} \cdot u^{(h)} = \delta_{hj}$ e che il sottospazio

$$V(u^{(1)}, \dots, u^{(j)}) \equiv \{v \in \mathbb{R}^n : v = \sum_{h=1}^j a_h u^{(h)} \text{ con } a_h \in \mathbb{R}\} \quad (5.176)$$

generato dai vettori $u^{(1)}, \dots, u^{(j)}$ coincide con $V(v^{(1)}, \dots, v^{(j)})$ e con $V(w^{(1)}, \dots, w^{(j)})$, per ogni $j \leq m$.

6 Spazi normati

Nel precedente capitolo abbiamo visto come sia possibile estendere molti dei risultati validi per funzioni da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funzioni da $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tramite l'introduzione del concetto di norma euclidea (che estende il concetto di modulo per numeri reali). Generalizzando ulteriormente il concetto di norma è possibile studiare sistematicamente spazi vettoriali più complicati quali, ad esempio, gli spazi di funzioni. La teoria che tratta lo studio dell'analisi matematica su tali spazi va sotto il nome di "analisi funzionale". In questo capitolo discuteremo brevemente alcuni elementi di questa teoria.

6.1 Spazi normati e spazi di Banach: definizioni ed esempi

Sia X uno spazio vettoriale¹. Come già menzionato nel capitolo § 5, una funzione, $\|\cdot\|$, che ad ogni $x \in X$ associ un numero non negativo $\|x\|$, e tale che soddisfi le proprietà:

- (i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$, (non degenerazione)
 - (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, per ogni scalare λ , (omogeneità)
 - (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$, (disuguaglianza triangolare),
- (6.1)

si chiama **norma** su X ed in tal caso X prende il nome di **spazio normato** [spesso, con leggero abuso di linguaggio, chiameremo spazio normato la coppia $(X, \|\cdot\|)$]; se $\|\cdot\|$ verifica solo (ii) e (iii) ma non necessariamente (i) prende il nome di **seminorma**. Come abbiamo già notato nel caso di $\mathbb{R}^n$ la disuguaglianza triangolare in (6.1) è equivalente a

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|, \quad \forall x, y \in X. \quad (6.2)$$

Esempi di spazi normati²

(1) $\mathbb{R}^n$ oppure $\mathbb{C}^n$ con la norma euclidea, $|\cdot|$ [definita in (5.1)], o con la norma 1, $|\cdot|_1$, o con la norma ∞ , $|\cdot|_\infty$ [definite in (5.8)]. Come già detto, la norma euclidea $|\cdot|$ a volte si denota $|\cdot|_2$. Più in generale, per ogni $1 \leq p < \infty$, si definisce la "norma p "

$$|x|_p \equiv \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}; \quad (6.3)$$

(la validità della disuguaglianza triangolare per $\|\cdot\|_p$ è dimostrata in 6.23).

¹Su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$, cioè con scalari reali o complessi.

²Nella maggior parte degli esempi che seguono la verifica della omogeneità e della non degenerazione delle varie norme introdotte sarà ovvia mentre la disuguaglianza triangolare sarà basata sulle disuguaglianze discusse nel Prologo. E' comunque necessario che la lettrice o il lettore verifichino con cura le proprietà (i), (ii) e (iii) per ciascuna delle norme introdotte.

(2) $\text{Mat}(n \times m)$, lo spazio vettoriale delle matrici con elementi di matrice reali (o complessi) con n righe ed m colonne, con una delle seguenti norme: se $A \in \text{Mat}(n \times m)$ e A_{ij} , per $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$ denotano gli elementi della matrice A ,

$$\|A\| = \sup_{\{x: |x|=1\}} |Ax|, \quad \|A\|_{p,q} = \sup_{\{x: |x|_p=1\}} |Ax|_q, \quad \|A\|_\infty = \max_{i,j} |A_{ij}|, \quad (6.4)$$

dove $x \in \mathbb{R}^m$ (o $x \in \mathbb{C}^m$), $1 \leq p, q \leq \infty$; si noti che $\|A\| = \|A\|_{2,2}$. Si osservi che se x è un vettore non nullo, il vettore $\frac{x}{|x|_p}$ ha norma uno, quindi la norma $\|A\|_{p,q}$ è anche uguale a

$$\|A\|_{p,q} = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|_q}{|x|_p}. \quad (6.5)$$

Da quest'ultima osservazione segue immediatamente che

$$|Ax|_q \leq \|A\|_{p,q} |x|_p, \quad \forall x \in X \quad (6.6)$$

e che $\|A\|_{p,q}$ è la costante migliore per cui tale disuguaglianza vale. Le norme $\|\cdot\|_{p,q}$ in (6.4) vengono, a volte, chiamate "norme operatoriali".

(3) $\mathcal{P}_n$, lo spazio vettoriale dei polinomi (reali o complessi) di grado al più n con la seguente norma: se $u \in \mathcal{P}_n$ e $u \equiv \sum_{k=0}^n a_k x^k$,

$$\|u\| \equiv \sum_{k=0}^n |a_k|. \quad (6.7)$$

(4) *Spazi di successioni*: Se x è una successione a valori reali (o complessi) $x: i \in \mathbb{N} \rightarrow x_i \in \mathbb{R}$ (o $\in \mathbb{C}$) definiamo

$$\|x\|_1 \equiv \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|, \quad \|x\|_2 \equiv \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty \equiv \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|. \quad (6.8)$$

Allora $\ell^p \equiv \{\text{successioni } x \text{ tali che } \|x\|_p < \infty\}$, ($p = 1, 2, \infty$), è uno spazio normato.

(5) Lo spazio $\mathcal{R}(x_0, r)$ delle funzioni reali analitiche della forma $u(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ tali che $\sum_{k \geq 0} |a_k| r^k < \infty$ dotato della norma³

$$\|u\|_r \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k; \quad (6.9)$$

Lo spazio $\mathcal{R}_{\text{per}}(\xi)$ delle funzioni $u \in C_{\text{per}}^\infty$ tali che $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n| e^{|n|\xi} < \infty$ dotato della norma

$$\|u\|_\xi \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n| e^{|n|\xi}. \quad (6.10)$$

³Si osservi che, poiché $|a_k| r^k \rightarrow 0$, definitivamente si ha che $|a_k| r^k \leq 1$ e quindi $\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} \leq r^{-1}$ ovvero il raggio di convergenza di u è maggiore od uguale a r ; si veda anche 6.2.

(6) $C(I)$, lo spazio delle funzioni continue $u : t \in I \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$, intervallo chiuso, con la norma “uniforme”

$$\|u\|_{\infty, I} = \sup_{t \in I} |u(t)| ; \quad (6.11)$$

qualora non vi sia ambiguità, tale norma si denota semplicemente con $\|\cdot\|_{\infty}$.

(7) Lo spazio vettoriale, $C^1(I)$, delle funzioni continue in un intervallo chiuso I con derivata continua in I con la norma

$$\|u\|_{C^1(I)} = \|u\|_{\infty, I} + \|u'\|_{\infty, I} . \quad (6.12)$$

(8)[•] $C(I)$ con la “norma L^1 ” o la “norma⁵ L^2 ”:

$$\|u\|_{L^1} = \int_I |u(t)| dt , \quad \|u\|_{L^2} = \left(\int_I |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (6.13)$$

(9) $C(E, \mathbb{R}^m)$, lo spazio delle funzioni continue su un compatto E di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^m$, con la “norma uniforme”

$$\|u\|_{\infty, E} = \sup_{x \in E} \|u(x)\| , \quad (6.14)$$

qui $\|\cdot\|$ è una norma prefissata in $\mathbb{R}^m$ (tipicamente sarà $\|\cdot\| = |\cdot| \equiv$ norma euclidea).

Naturalmente, per il teorema di Weierstrass possiamo sostituire in (6.11), (6.12) e (6.14) l'estremo superiore con il massimo.

Osservazione 6.1 (i) Il simbolo “•” nell'esempio (8) sta a segnalare una differenza sostanziale fra questo esempio e gli altri (si veda la Proposizione 6.7 più sotto).

(ii) Spesso il calcolo esatto di una norma non è immediato e dal punto di vista “pratico” alcune norme sono più convenienti di altre. Ad esempio, sulle matrici, tra le “norme operatoriali”, è assai più facile calcolare la norma $\|\cdot\|_{\infty, \infty}$ (che non, ad esempio, la norma $\|\cdot\|_{2,2}$) e se $A \in \text{Mat}(n \times m)$, allora si ha che

$$\|A\|_{\infty, \infty} = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |A_{ij}| . \quad (6.15)$$

Infatti, se $x \in \mathbb{R}^m$ con $|x|_{\infty} \leq 1$ (ovvero $|x_j| \leq 1$ per ogni j),

$$|Ax|_{\infty} \equiv \sup_i \left| \sum_j A_{ij} x_j \right| \leq \sup_i \sum_j |A_{ij}| |x_j| \leq \sup_i \sum_j |A_{ij}|$$

⁴In particolare, se $u \in C^1([a, b])$, esistono i limiti (rispettivamente, da destra e da sinistra) dei rapporti incrementali in a e b di u e tali limiti sono uguali (rispettivamente) a $u'(a+)$ ed a $u'(b-)$.

⁵Per la verifica della non degenerazione di norme “integrali” si ricordi 5.49.

ovvero $\|A\|_{\infty, \infty} \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |A_{ij}|$. D'altra parte, sia i_0 tale che $\sup_i \sum_j |A_{ij}| = \sum_j |A_{i_0j}|$ e sia $x_j \equiv \text{segno}(A_{i_0j})$ se $A_{i_0j} \neq 0$ e $x_j = 1$ altrimenti; allora si ha che $|x|_\infty = 1$ e $A_{i_0j}x_j \geq 0$. In tal caso $\sup_i \sum_j |A_{ij}| = \sum_j |A_{i_0j}| = \sum_j A_{i_0j}x_j = |\sum_j A_{i_0j}x_j| \leq \|A\|_{\infty, \infty}$ il che prova (6.15).

Ricordiamo alcune definizioni fondamentali date nel precedente capitolo⁶:

Definizione 6.2 Siano u e u_n elementi di uno spazio normato X dotato di norma $\|\cdot\|$. Si dice che la **successione** $\{u_n\}$ **tende a** u , e si scrive $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, se tende a zero la successione di numeri non negativi $\|u - u_n\|$, cioè se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| = 0$. Una successione $\{u_n\}$ di elementi di uno spazio normato X , si chiama **successione di Cauchy** (o "fondamentale") se $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ tale che $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq N$.

Il caso in cui uno spazio normato sia **completo**⁷ è così importante da meritare un nome "proprio":

Definizione 6.3 Uno spazio normato completo si chiama **spazio di Banach**.

In alcuni degli esempi dati, sono state introdotte più di una norma; è dunque naturale chiedersi cosa comporti l'uso di una norma rispetto ad un'altra.

Sia X uno spazio vettoriale e consideriamo, su di esso, due norme che indicheremo con $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$. Dalla Definizione 6.2 è chiaro che se esistono due costanti c_1 e c_2 positive tali che

$$c_1 \|u\|_a \leq \|u\|_b \leq c_2 \|u\|_a, \quad \forall u \in X, \quad (6.16)$$

una successione $\{u_n\}$ converge ad u nella norma $\|\cdot\|_a$ se e solo se converge ad u nella norma $\|\cdot\|_b$. Questo motiva la seguente

Definizione 6.4 Due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ su uno spazio vettoriale X si dicono **equivalenti** se esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che valga (6.16).

Osservazione 6.5 (i) Gli spazi vettoriali degli esempi (1), (2) e (3) sono **finito dimensionali** (ovvero hanno una base finita) al contrario degli spazi vettoriali (4)÷(9).

(ii) La (5.9) mostra che la **norma euclidea**, la **norma 1** e la **norma ∞** su $\mathbb{R}^n$ sono tra loro equivalenti.

⁶Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio metrico (X, d) con $d(x, y) = \|x - y\|$ e gli spazi metrici sono stati brevemente discussi in 5.50.

⁷Tale, cioè, che ogni successione di Cauchy ammette limite nello spazio stesso.

(iii) Anche le norme in (6.4) sono equivalenti. Dimostriamo, ad esempio, che la norma $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{2,2}$ e la norma $\|\cdot\|_\infty$ sono equivalenti: sia $x \in \mathbb{R}^m$ con $|x| = 1$, allora per la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$\begin{aligned} |Ax|^2 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m A_{ij} x_j \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |A_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |A_{ij}|^2 \right) \leq \|A\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m 1 = nm \|A\|_\infty^2. \end{aligned}$$

D'altra parte siano i_0 e j_0 indici per cui si abbia $|A_{i_0 j_0}| = \|A\|_\infty$ e sia e_{j_0} il versore in $\mathbb{R}^m$ con componenti tutte 0 tranne un 1 nella j_0 -esima componente (cosicché $|e_{j_0}| = 1$), allora:

$$\|A\|_\infty = |(Ae_{j_0})_{i_0}| \leq |Ae_{j_0}| \leq \|A\| |e_{j_0}| = \|A\|,$$

e dunque

$$\|A\|_\infty \leq \|A\| \leq \sqrt{nm} \|A\|_\infty. \quad (6.17)$$

In realtà in uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$) finito dimensionale tutte le norme sono equivalenti. Per dimostrare tale affermazione sarà sufficiente⁸ dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ (o in $\mathbb{C}^n$) tutte le norme sono equivalenti e questo verrà fatto nella Proposizione 6.6. La situazione è diversa in spazi vettoriali infinito dimensionali:

(iv) ℓ^1 è un sottoinsieme proprio di ℓ^2 che a sua volta è un sottoinsieme proprio di ℓ^∞ . Infatti, se $x \in \ell^1$, $x_i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$ e dunque $|x_i|$, a partire da un certo i_0 , è più grande di $|x_i|^2$ e dunque $x \in \ell^2$; ragionando analogamente si ha che se $x \in \ell^2$ allora $x \in \ell^\infty$. D'altra parte la successione costante $(1, 1, \dots) \in \ell^\infty$ ma non appartiene a ℓ^2 , mentre x con $x_i = (i+1)^{-1}$ appartiene a ℓ^2 ma non a ℓ^1 . Si noti che $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono delle norme su ℓ^1 ma $\|\cdot\|_1$ non è una norma su ℓ^2 (vi sono elementi $x \in \ell^2$ tali che $\|x\|_1 = \infty$); analogamente $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono delle norme su ℓ^2 ma $\|\cdot\|_2$ non è una norma su ℓ^∞ . Osserviamo anche che su ℓ^1 le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ non sono equivalenti tra loro⁹ così come non lo sono $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ su ℓ^2 .

(v) Lo stesso fenomeno accade in $C(I)$: la norma $\|\cdot\|_{\infty, I}$, (6.11), non è equivalente alla norma $\|\cdot\|_{L^1}$, (6.13), (sullo spazio $C(I)$). Per verificare tale asserzione, facciamo vedere che esiste una successione $u_n \in C([-1, 1])$ che non è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty, [-1, 1]}$ mentre lo è rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^1}$ (e quindi le norme $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_{L^1}$ non possono essere equivalenti). Consideriamo la successione di funzioni continue sull'intervallo $[-1, 1]$ così definita: $u_0 \equiv 0$ e per $n \geq 1$ sia

$$u(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ nx, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

⁸Si veda 6.4.

⁹Ad esempio, se $x_i^{(k)} = (1+i)^{-1-1/k}$, allora $\|x^{(k)}\|_\infty = 1$ ma $\sup_k \|x^{(k)}\|_1 = \infty$; si veda anche 6.29.

Osserviamo che u_n converge puntualmente a

$$\chi(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (6.18)$$

Inoltre, $u_n \geq 0$, e

$$\|u_n - \chi\|_{L^1} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0, \quad \text{per } n \rightarrow \infty; \quad (6.19)$$

quindi u_n è una successione di Cauchy (rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^1}$ essendo

$$\|u_n - u_m\|_{L^1} \leq \|u_n - \chi\|_{L^1} + \|u_m - \chi\|_{L^1} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m}. \quad (6.20)$$

D'altra parte

$$\|u_n - u_{n^2}\|_{\infty, [-1, 1]} \geq |u_n(\frac{1}{n^2}) - u_{n^2}(\frac{1}{n^2})| = 1 - \frac{1}{n},$$

quindi $\{u_n\}$ non è una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty}$.

(vi) Una successione di funzioni converge uniformemente su $E \subset \mathbb{R}^n$ se e solo se è una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty, E}$.

Proposizione 6.6 In $\mathbb{R}^n$ (o in $\mathbb{C}^n$) tutte le norme sono equivalenti.

Dimostrazione Diamo la dimostrazione nel caso di $\mathbb{R}^n$ essendo la dimostrazione per $\mathbb{C}^n$ sostanzialmente identica. Sia $\|\cdot\|$ una qualunque norma su $\mathbb{R}^n$ e sia $|\cdot|$ la norma euclidea e facciamo vedere che $\|\cdot\|$ è equivalente a $|\cdot|$. Sia $x = \sum_{i=1}^n x_i e^{(i)}$ ($\{e^{(i)}\}$ base standard di $\mathbb{R}^n$) un punto arbitrario di $\mathbb{R}^n$. Dalla disuguaglianza triangolare, dall'omogeneità della norma $\|\cdot\|$ e dalla disuguaglianza di Schwarz segue che

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e^{(i)} \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e^{(i)}\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|e^{(i)}\|^2} \equiv |x| c, \quad (6.21)$$

dove $c > 0$ è la norma euclidea del vettore $(\|e^{(1)}\|, \dots, \|e^{(n)}\|)$; il fatto che $c > 0$ segue dalla non degenerazione di $\|\cdot\|$. Dunque la funzione $f(x) \equiv \|x\|$ è una funzione continua (nella topologia indotta dalla norma euclidea) poiché se $|x^{(k)} - x| \rightarrow 0$, da (6.21) e dalla disuguaglianza triangolare, segue che

$$|f(x^{(k)}) - f(x)| \equiv \left| \|x^{(k)}\| - \|x\| \right| \leq \|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0.$$

Dunque, dal teorema di Weierstrass, segue che la funzione f assume un minimo su $S^{n-1} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ e tale minimo (per la non degenerazione di $\|\cdot\|$) è strettamente positivo. Quindi esiste un $x_0 \in S^{n-1}$ tale che

$$\|x\| \geq \|x_0\| \equiv b > 0, \quad \forall x \in S^{n-1}. \quad (6.22)$$

Ed allora, per ogni $x \neq 0$

$$\left\| \frac{x}{|x|} \right\| \geq b \quad \Longleftrightarrow \quad \|x\| \geq b|x|.$$

Tale relazione, assieme a (6.21), implica l'asserto. ■

Passiamo a studiare la completezza dei vari esempi considerati. L'esempio fondamentale di spazio normato non completo è l'insieme, $\mathbb{Q}$, dei numeri razionali¹⁰ (prendendo come norma il modulo): la successione crescente di numeri razionali $x_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}$ è di Cauchy, ma il suo limite, il numero di Nepero e , non è un numero razionale. A proposito degli esempi (1)÷(9) si ha

Proposizione 6.7 *Tutti gli esempi in (1)÷(9) sono spazi di Banach con l'eccezione degli esempi in (8) che non lo sono.*

Dimostrazione (1): Il risultato è noto dal § 5; ne riportiamo comunque la dimostrazione (nel caso di $\mathbb{R}^n$). Per l'equivalenza delle norme in $\mathbb{R}^n$, basta dimostrare l'affermazione per $\|\cdot\|_\infty$. Se $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ sono vettori di $\mathbb{R}^n$ che formano una successione di Cauchy, segue immediatamente che sono di Cauchy in $\mathbb{R}$ le n successioni $\{x_i^{(k)}\}$, per la completezza di $\mathbb{R}$ segue che esistono n numeri reali, x_i , tali che $x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)}$ ed è facile verificare che $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x\|_\infty = 0$, che è quanto volevasi dimostrare.

(2): Si può procedere esattamente come nella dimostrazione precedente: usando la norma $\|\cdot\|_\infty$ e facendo vedere che se $A_k \in \text{Mat}(n \times m)$ ha elementi di matrice $a_{ij}^{(k)}$ e $\{A_k\}$ è una successione di Cauchy, allora lo sono le nm successioni $\{a_{ij}^{(k)}\}$, etc.

(3): L'asserto è immediato se si nota che ad ogni $u = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathcal{P}_n$ possiamo associare il vettore $v \equiv (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e che $|v|_1 = \|u\|$.

(4): Consideriamo il caso di ℓ^1 (il caso di ℓ^2 si tratta in maniera del tutto analoga ed il caso di ℓ^∞ è più semplice). Sia $x^{(k)} \in \ell^1$ una successione di Cauchy. Questo significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste k_0 tale che se $h, k \geq k_0$ allora

$$\|x^{(h)} - x^{(k)}\|_1 \equiv \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^{(h)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon. \quad (6.23)$$

Quindi, per ogni $i \geq 0$, ognuna delle successioni numeriche $\{x_i^{(k)}\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e dunque esiste $x_i \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$. D'altra parte, da (6.23) segue che, per ogni $N \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^N |x_i^{(k)} - x_i^{(h)}| \leq \varepsilon, \quad (6.24)$$

¹⁰ $\mathbb{Q}$ è uno spazio vettoriale con scalari in $\mathbb{Q}$.

e prendendo il limite per h che tende ad ∞ in tale relazione si ha (per $k \geq k_0$)

$$\sum_{i=0}^N |x_i^{(k)} - x_i| \leq \varepsilon. \quad (6.25)$$

Prendendo infine l'estremo superiore per $N \geq 0$ si ottiene che

$$\|x^{(k)} - x\|_1 \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0. \quad (6.26)$$

Quindi, per ogni intero $N > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N |x_i| &= \sum_{i=0}^N |x_i^{(k_0)} + (x_i - x_i^{(k_0)})| \leq \sum_{i=0}^N |x_i^{(k_0)}| + \sum_{i=0}^N |x_i - x_i^{(k_0)}| \\ &\leq \|x^{(k_0)}\|_1 + \|x - x^{(k_0)}\|_1 \leq \|x^{(k_0)}\|_1 + \varepsilon < \infty. \end{aligned}$$

Dunque $x \in \ell^1$ che, insieme a (6.26) implica l'asserto.

(5): Se $u^{(j)} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} (x - x_0)^k \in \mathcal{R}(x_0, r)$ è una successione di Cauchy, allora la successione $y^{(j)}$ con $y_i^{(j)} \equiv |a_i^{(j)}| r^i$ è una successione di Cauchy in ℓ^1 e l'asserto deriva dal punto precedente.

(6): L'affermazione deriva immediatamente dal punto (vi) dell'Osservazione 6.5 e dal Teorema 1.9.

(7): Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy in $C^1(I)$ (rispetto alla norma (6.12)). Per il risultato precedente esistono due funzioni continue, u, v , in I tali che $\|u_n - u\|_{\infty}$ e $\|u'_n - v\|_{\infty}$ tendono a 0 quando n tende ad ∞ . Dobbiamo far vedere che u è derivabile e che $u' = v$ in I . Siano t e t_0 due punti in I , allora, per il teorema fondamentale del calcolo, $u_n(t) - u_n(t_0) = \int_{t_0}^t u'_n$; prendendo il limite per n che tende ad infinito in tale relazione e passando il segno di limite dentro al segno di integrale (lo possiamo fare per il Teorema 1.10), otteniamo $u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t v$. Quindi, ancora per il teorema fondamentale del calcolo, si ha che u è derivabile in t e che $u'(t) = v(t)$, che è quanto si voleva dimostrare¹¹.

(9): la dimostrazione è una ripetizione della dimostrazione di (6) e viene lasciata per esercizio.

(8)*: Dimostriamo infine che $C(I)$, con I compatto di $\mathbb{R}$, non è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^1}$ (la dimostrazione nel caso della norma $\|\cdot\|_{L^2}$ è del tutto analoga). Sia u_n la successione definita nel punto (v) dell'Osservazione 6.5 che abbiamo visto essere una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^1}$. Assumiamo per assurdo che esista $u \in C([-1, 1])$ tale che $u_n \rightarrow u$ in norma $\|\cdot\|_{L^1}$. Siano $I_1 = (-1, 0)$ e $I_2 = (0, 1)$. Poiché stiamo assumendo che $u_n \rightarrow u$ in norma $\|\cdot\|_{L^1}$, da (6.18), (6.19) segue che

$$\|u - \chi\|_{L^1} \leq \|u - u_n\|_{L^1} + \|u_n - \chi\|_{L^1} \rightarrow 0,$$

¹¹ Si noti che l'argomento dato funziona anche se t è uno degli estremi dell'intervallo.

cioè

$$\int_{-1}^0 |u| dx + \int_0^1 |1-u| dx = 0,$$

e quindi¹² $u = 0$ in $-1 \leq x \leq 0$ e $u = 1$ in $0 \leq x \leq 1$ contraddicendo l'assunzione che u sia continua in $x = 0$. ■

6.2 Serie di potenze di matrici

Il concetto di norma permette di estendere il “calcolo funzionale” ad insiemi più complicati di $\mathbb{R}^n$: in questo paragrafo vediamo come sia possibile estendere il concetto di funzione analitica di una variabile al concetto di *funzioni analitiche di matrici*.

Se $\|\cdot\|$ denota la “norma operatoriale” (6.5) su spazi di matrici, allora

$$\|I_n\| = 1; \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \quad \forall A \in \text{Mat}(n \times m), \forall B \in \text{Mat}(m \times p), \quad (6.27)$$

(il fatto che la norma operatoriale della matrice identità sia 1 deriva immediatamente dalle definizioni; se $x \in \mathbb{R}^p$ e $|x| = 1$, da (6.6) segue che $|(AB)x| = |A(Bx)| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\||x| = \|A\|\|B\|$).

In particolare, se $A \in \text{Mat}(n \times n)$, iterando la (6.27), si ottiene¹³

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, \quad \forall k \geq 0. \quad (6.28)$$

Sia ora X lo spazio di Banach delle matrici $\text{Mat}(n \times n)$ con la norma (6.5) e sia $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Sia $A \in \text{Mat}(n \times n)$ con $\|A\| < R$ e si consideri la successione di matrici

$$A^{(N)} \equiv \sum_{k=0}^N a_k A^k.$$

La successione $A^{(N)}$ è di Cauchy: se $M > N$, da (6.28), segue che

$$\begin{aligned} \|A^{(M)} - A^{(N)}\| &= \left\| \sum_{k=N+1}^M a_k A^k \right\| \leq \sum_{k=N+1}^M |a_k| \|A\|^k \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \|A\|^k \rightarrow 0, \quad (\text{per } N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Quindi la serie $\sum_{k \geq 0} a_k A^k$ converge (ovvero la successione $A^{(N)}$ converge) ad una unica matrice che verrà denotata *simbolicamente* $f(A)$.

¹²Essendo u e $1-u$ continue su $[-1, 1]$. Si ricordi 5.49.

¹³Come per i numeri A^0 è uguale, per definizione, a I_n per ogni matrice quadrata A .

Un esempio è dato dall'**esponenziale di una matrice**: la funzione $e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ è una serie di potenze con raggio di convergenza ∞ e dunque, per ogni matrice A , la serie $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge in X ed il suo limite definisce una matrice chiamata esponenziale di A :

$$e^A \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} . \quad (6.29)$$

Estendiamo alcune proprietà dell'esponenziale al caso matriciale. Se A, B sono due matrici in $\text{Mat}(n \times n)$, si definisce il **commutatore di A e B** la matrice $[A, B] \in \text{Mat}(n \times n)$ definita da

$$[A, B] \equiv AB - BA . \quad (6.30)$$

Si dice che *due matrici quadrate commutano* se il loro commutatore è nullo. Osserviamo che per due matrici che commutino vale la formula del binomio di Newton cioè:

$$[A, B] = 0 \implies (A + B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j} . \quad (6.31)$$

Ad esempio $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ ma siccome $AB = BA$ (essendo $[A, B] = 0$) si ottiene la formula nota del quadrato di un binomio $A^2 + 2AB + B^2$. Naturalmente se A e B non commutano la formula di Newton è, in generale, falsa: ad esempio

$$\begin{aligned} A &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies [A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ A^2 &= B^2 = 0, \quad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (A + B)^2 = I. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Il fatto che per due matrici che commutano valga la formula del binomio di Newton permette di adattare in maniera ovvia la dimostrazione di (2.60) e di ottenere il seguente "teorema di addizione per esponenziali di matrici":

$$[A, B] = 0 \implies e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A . \quad (6.33)$$

In particolare tale relazione implica che: se A e B commutano allora commutano anche le matrici e^A e e^B . Si noti anche che, poiché A e $-A$ commutano, si ha che

$$e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^0 = I ,$$

ovvero la matrice $\exp(A)$ è sempre invertibile e la sua matrice inversa è $\exp(-A)$.

Calcoliamo ora la derivata di e^{At} dove A è una matrice quadrata assegnata e t è una variabile reale¹⁴. Consideriamo dunque il rapporto incrementale in $t_0 \in \mathbb{R}$:

¹⁴ In generale, se X e Y sono spazi normati dotati di norme, rispettivamente, $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, si possono considerare funzioni $f: x \in E \subset X \rightarrow f(x) \in Y$ ovvero funzioni con variabile in X e a valori nello spazio normato Y . Le varie nozioni di topologia, continuità, limiti etc. sono già

poiché e^{At} e e^{As} commutano per ogni t ed s in $\mathbb{R}$, si ha, per ogni numero $h \neq 0$,

$$\frac{e^{A(t_0+h)} - e^{At_0}}{h} = e^{At_0} \frac{e^{Ah} - I}{h} = \frac{e^{Ah} - I}{h} e^{At_0}. \quad (6.34)$$

Inoltre¹⁵

$$\frac{e^{Ah} - I}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(Ah)^j}{h j!} \equiv A + hB(h),$$

ove $B(h) \equiv \sum_{j=2}^{\infty} h^{j-1} \frac{A^{j+2}}{(j+2)!}$. Per $|h| \leq 1$ si ha $\|B(h)\| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \|A\|^{j+2}/(j+2)! < \infty$ che è un numero indipendente da h ; quindi $h\|B(h)\| \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$ e questo è equivalente a dire che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} = A$, dunque, da (6.34) segue che

$$\left(e^{At}\right)' \Big|_{t=t_0} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t_0+h)} - e^{At_0}}{h} = Ae^{At_0} = e^{At_0} A. \quad (6.35)$$

Osservazione 6.8 (Equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti)

Dalla (6.35) segue che, per ogni $A \in \text{Mat}(n \times n)$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha¹⁶

$$\frac{d}{dt}(e^{At}x) = \left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)x = Ae^{At}x, \quad (6.36)$$

e quindi la funzione vettoriale $t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \equiv e^{At}x \in \mathbb{R}^n$ risolve il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie in $\mathbb{R}^n$ a coefficienti costanti con dato iniziale assegnato:

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad u(0) = x. \quad (6.37)$$

state date in 5.50 nel contesto più generale degli spazi metrici. Ricordiamo comunque che: f è **continua** in $x_0 \in E$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$ per ogni $x \in E$ con $\|x - x_0\|_X < \delta$; $f(x)$ **tende** a y_0 per x che tende a x_0 , e si denota $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\|f(x) - y_0\|_Y < \varepsilon$ per ogni $x \in E$ con $0 < \|x - x_0\|_X < \delta$. Se lo spazio “di partenza” X è $\mathbb{R}$ (e Y ha $\mathbb{R}$ come spazio degli scalari) anche la nozione di derivata di $f(t)$ si dà nel solito modo: ovvero $f'(t_0)$ è la **derivata** di f in t_0 se esiste il limite del rapporto incrementale (che è un elemento dello spazio normato Y) $(f(t) - f(t_0))/(t - t_0)$ per t che tende a t_0 . La nozione di derivata si estende al caso generale di funzioni tra spazi normati generalizzando la nozione di differenziale introdotta nel capitolo § 5: f è **differenziabile** in $x_0 \in E$, con E aperto di X , se esiste un'applicazione lineare e continua $df : X \rightarrow Y$ tale che per ogni $h \in X$ con $\|h\|$ sufficientemente piccolo, si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - df(h)\|_Y / \|h\|_X = 0.$$

¹⁵Si osservi che se $A^{(k)} \in \text{Mat}(n \times m)$ è una successione di matrici convergente alla matrice A (ovvero $\|A^{(k)} - A\| \rightarrow 0$) allora per ogni scalare a si ha che $aA^{(k)} \rightarrow aA$: infatti $\|aA^{(k)} - aA\| = |a| \|A^{(k)} - A\|$.

¹⁶Si osservi che se $t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow B(t) \in \text{Mat}(n \times m)$ tende, per $t \rightarrow t_0$, a B_0 (ovvero $\|B(t) - B_0\| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow t_0$) allora per ogni $x \in \mathbb{R}^m$, $\|B(t)x - B_0x\| \leq \|B(t) - B_0\| \|x\| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow t_0$ ovvero $B(t)x \rightarrow B_0x$ in $\mathbb{R}^n$.

Più in generale da (6.36) segue che, per ogni $t_0, t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \equiv e^{A(t-t_0)}x \in \mathbb{R}^n$ è soluzione di

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad u(t_0) = x. \quad (6.38)$$

Per maggiori informazioni sulle equazioni differenziali si veda § 8.

Un altro esempio notevole di funzione di matrice si ottiene considerando la serie geometrica $f(x) = \sum_{k \geq 0} x^k$ che ha raggio di convergenza 1 e che, per $|x| < 1$, converge a $(1-x)^{-1}$. Se allora $A \in \text{Mat}(n \times n)$ è tale che $\|A\| < 1$, la serie $\sum_{k \geq 0} A^k$ converge alla matrice denotata simbolicamente $(1-A)^{-1}$ ("simbolicamente" perché non ha senso, se $n > 1$, aggiungere un numero con una matrice). In effetti però si ha il seguente risultato: la matrice $(1-A)^{-1}$ (definita per $\|A\| < 1$) coincide con l'inversa di $(I-A)$ ovvero:

$$(1-A)^{-1} = (I-A)^{-1}$$

Infatti, poiché $\|A\| < 1$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k \rightarrow 0$ e dunque¹⁷

$$\begin{aligned} (1-A)^{-1}(I-A) &\equiv \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N A^k \right) (I-A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N (A^k(I-A)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} I - A^{N+1} = I. \end{aligned}$$

Osservazione 6.9 Da quanto detto segue che: se $A \in \text{Mat}(n \times n)$ è una matrice con norma (operatoriale) $\|A\| < 1$ allora la matrice $B \equiv I + A$ è invertibile e la sua inversa è data dalla serie

$$B^{-1} \equiv (I+A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k. \quad (6.39)$$

6.3 Un teorema di punto fisso

Nell'ambito degli spazi di Banach sussiste il seguente risultato di cui vedremo, in seguito, alcune applicazioni.

Teorema 6.10 Sia E un sottoinsieme chiuso¹⁸ (e non vuoto) di uno spazio di Banach X (dotato di norma $\|\cdot\|$) e sia Φ una funzione da E in E tale che, per un qualche $0 < \theta < 1$, valga

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leq \theta \|u - v\|, \quad \forall u, v \in E. \quad (6.40)$$

Allora esiste un unico $\bar{u} \in E$ tale che $\Phi(\bar{u}) = \bar{u}$.

¹⁷Si noti che se A e B sono due matrici quadrate e $AB = I$ allora $A = B^{-1}$; infatti da $AB = I$ segue che $(\det A)(\det B) = 1$ e quindi sia A che B sono invertibili e moltiplicando a destra ambo i membri della relazione $AB = I$ si ottiene $A = B^{-1}$ (e, invertendo ambo i membri di tale relazione, $A^{-1} = B$).

¹⁸Si ricordi che un chiuso è il complementare d'un aperto e che un aperto di uno spazio di Banach X è un insieme A tale che per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ per cui $B_r(x) = \{y \in X : \|y-x\| < r\} \subset A$; inoltre E è chiuso se e solo se ogni successione di Cauchy in E ammette limite in E ; per maggiori informazioni si veda 5.50 ed in particolare la Proposizione 5.54.

Una funzione Φ per cui vale (6.40) si chiama *contrazione*. Si noti che *ogni contrazione è continua* cioè se $\|v_k - v\| \rightarrow 0$ allora $\|\Phi(v_k) - \Phi(v)\| \leq \theta \|v_k - v\| \rightarrow 0$.

Tale teorema viene a volte chiamato “teorema di punto fisso in spazi di Banach” o anche “teorema delle contrazioni”. L’ipotesi che θ sia strettamente minore di uno è essenziale: $\Phi : x \in \mathbb{R} \rightarrow \Phi(x) \equiv 1 + x \in \mathbb{R}$, ($\mathbb{R}$ pensato come spazio di Banach con norma $|\cdot|$) verifica (6.40) con $\theta = 1$ ma ovviamente Φ non ha alcun punto fisso in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione Sia u_0 un *punto arbitrario* di E e definiamo la seguente successione per ricorrenza:

$$v_0 = u_0, v_1 = \Phi(v_0), \dots, v_k = \Phi(v_{k-1}), \dots \quad (6.41)$$

Poiché Φ manda E in se stesso tale successione è ben definita e $v_k \in E$ per ogni $k \geq 0$. Poiché Φ è una contrazione, si ha:

$$\|v_j - v_{j-1}\| = \|\Phi(v_{j-1}) - \Phi(v_{j-2})\| \leq \theta \|v_{j-1} - v_{j-2}\| \leq \theta^{j-1} \|v_1 - v_0\|.$$

Dunque, per ogni $k > h$ si ha

$$\begin{aligned} \|v_k - v_h\| &\leq \|v_k - v_{k-1}\| + \|v_{k-1} - v_h\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-h-1} \|v_{h+j+1} - v_{h+j}\| \leq \sum_{j=0}^{k-h-1} \theta^{h+j} \|v_1 - v_0\| \\ &\leq \theta^h \|v_1 - v_0\| \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j = \theta^h \frac{\|v_1 - v_0\|}{1 - \theta}. \end{aligned}$$

Tale quantità tende a 0 per $h \rightarrow \infty$ e ciò significa che la successione $\{v_k\}$ è di Cauchy. Poiché X è di Banach (e quindi completo) v_k converge a $\bar{u} \in X$ e poiché E è chiuso $\bar{u} \in E$. Quindi, per la continuità di Φ si ha che $\bar{u} = \lim v_k = \lim \Phi(v_{k-1}) = \Phi(\bar{u})$. Per dimostrare l’unicità, supponiamo, per assurdo, che $\bar{v} \in E$ sia un altro punto fisso per Φ : $\Phi(\bar{v}) = \bar{v}$. Si ha allora $\|\bar{u} - \bar{v}\| = \|\Phi(\bar{u}) - \Phi(\bar{v})\| \leq \theta \|\bar{u} - \bar{v}\| < \|\bar{u} - \bar{v}\|$ che è una contraddizione. ■

Osservazione 6.11 Si noti che tale teorema di punto fisso vale (parola per parola, dimostrazione compresa) in spazi metrici completi (si sostituiscano le parole “di Banach” con “metrico completo” e $\|a - b\|$ con $d(a, b)$, se $d(\cdot, \cdot)$ denota la distanza nello spazio metrico).

Esercizi e complementi

E 6.1 (i) Si trovino delle basi per gli spazi vettoriali (1)÷(3).

(ii) Si dimostri che gli spazi vettoriali in (4)÷(9) non sono finito dimensionali.

E 6.2 Sia $\|\cdot\|_r$ come in (6.9). (i) Dimostrare che se una serie di potenze $u = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$ ha raggio di convergenza $R > r > 0$ allora $\|u\|_r < \infty$.
(ii) Trovare due serie di potenze u e v con raggio di convergenza r ma con $\|u\|_r < \infty$ e $\|v\|_r = \infty$.

E 6.3 Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$) di dimensione n e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base.

(i) Dato $v \in V$ esiste ed è unico $x \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$ a seconda se V sia uno spazio vettoriale reale o complesso) tale che $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$; si definisca $\|v\| \equiv |x|$ e si dimostri che $\|\cdot\|$ definisce una norma su V .

(ii) Sia $\|\cdot\|$ una norma su V e per $x \in \mathbb{R}$ (rispettivamente, $x \in \mathbb{C}$) si definisca $\|x\| \equiv \|\sum_{j=1}^n x_j v_j\|$ e si dimostri che $\|\cdot\|$ è una norma su $\mathbb{R}^n$.

E 6.4 Si dimostri che tutte le norme su di un qualunque spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$) finito dimensionale sono equivalenti.

E 6.5 Si dimostri che se $\|\cdot\|$ è una norma su $\mathbb{R}$ allora esiste $c > 0$ tale che $\|x\| = c|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

E 6.6 Si calcoli la norma $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{2,2}$ della matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

E 6.7 (i) Dimostrare che per ogni matrice $A \in \text{Mat}(n \times n)$, $\|A\| \geq \max |\lambda_i|$ dove il massimo è preso sugli n autovalori di A .

(ii) Dimostrare che se $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, con $\lambda_i \in \mathbb{C}$, allora $\|A\| = \max |\lambda_i|$.

(iii) Dimostrare che se U è una matrice reale ortogonale (cioè $U^T \equiv$ trasposta di $U = U^{-1}$), allora $\|U\| = 1$.

(iv) Dimostrare che se A è (reale e) simmetrica allora $\|A\| = \max |\lambda_i|$ ($\equiv$ massimo modulo degli autovalori di A).

(v) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ dove $\varepsilon > 0$. Dimostrare che gli autovalori di A sono 0 e ε (e quindi A è diagonalizzabile) e che $\|A\| = \sqrt{1 + \varepsilon^2} > 1$. Questo dimostra che anche se A è diagonalizzabile (ma non simmetrica) può accadere che $\|A\| > \max |\lambda_i|$.

E 6.8 Si verifichi che una successione di funzioni converge uniformemente su $E \subset \mathbb{R}^n$ se e solo se è una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty, E}$.

E 6.9 Sia $u_k(x) \equiv \arctan(kx)$. Dimostrare che $\{u_k\}$ è una successione di Cauchy nello spazio normato $(C[-a, a], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$ (con $a > 0$) e far vedere che non esiste alcuna funzione $u \in C([-a, a], \mathbb{R})$ tale che $\|u_k - u\|_{L^1} \rightarrow 0$.

E 6.10 Si dimostri che gli spazi di successioni ℓ^2 e ℓ^∞ sono spazi di Banach.

E 6.11 Si dimostri che lo spazio normato dell'esempio (9) è uno spazio di Banach.

E 6.12 (Lo spazio $\text{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e si definisca il seguente sottoinsieme di $C(E, \mathbb{R}^m)$:

$$\text{Lip}(E, \mathbb{R}^m) \equiv \left\{ f \in C(E, \mathbb{R}^m) : \|f\|_{\text{Lip}} \equiv \sup_{x, y \in E, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} + \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty \right\}. \quad (6.42)$$

(i) Si dimostri che l'insieme $\text{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$ è strettamente contenuto in $C(E, \mathbb{R}^m)$.

(ii) Si dimostri che $(\text{Lip}(E, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\text{Lip}})$ è uno spazio di Banach.

Si noti che se $f \in \text{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$ allora f è uniformemente lipschitziana su E ovvero (per definizione) esiste una costante positiva C tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in E, \quad (6.43)$$

inoltre la costante più piccola per cui vale (6.43) è data da $\sup_{x, y \in E, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$.

E 6.13 (Spazi hölderiani $C^\alpha(E, \mathbb{R}^m)$ con $0 < \alpha < 1$) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e si definisca il seguente sottoinsieme di $C(E, \mathbb{R}^m)$:

$$C^\alpha(E, \mathbb{R}^m) \equiv \left\{ f \in C(E, \mathbb{R}^m) : \|f\|_{C^\alpha} \equiv \sup_{x, y \in E, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty \right\}; \quad (6.44)$$

una funzione f tale che $\exists C > 0$ e $0 < \alpha < 1$ per cui $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ per ogni $x, y \in A$ si dice **hölderiana** in A con esponente α .

(i) Si dimostri che l'insieme $C^\alpha(E, \mathbb{R}^m)$ è strettamente contenuto in $\text{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$.

(ii) Si dimostri che $(C^\alpha(E, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{C^\alpha})$ è uno spazio di Banach.

E 6.14 (Gli spazi $C^k(E, \mathbb{R}^m)$) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ compatto e k un intero positivo. La classe $C^k(E, \mathbb{R}^m)$ è stata definita in § 5.11. Se $f \in C^k(E, \mathbb{R}^m)$, definiamo

$$\|f\|_{C^k} \equiv \sum_{\beta \in \mathbb{N}, |\beta| \leq k} \sup_E |\partial_x^\beta f|. \quad (6.45)$$

(i) Si dimostri che

$$C^k(E, \mathbb{R}^m) \subsetneq C^h(E, \mathbb{R}^m) \subsetneq C^\alpha(E, \mathbb{R}^m), \quad \forall k > h \geq 1 > \alpha > 0.$$

(ii) Si dimostri che $(C^k(E, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{C^k})$ è uno spazio di Banach.

E 6.15 (Spazi $C^\alpha(E, \mathbb{R}^m)$ con $\alpha > 0$) Sia E un compatto di $\mathbb{R}^n$; sia α un numero positivo, sia $k \equiv [\alpha]$ la sua parte intera ed $r \equiv \{\alpha\}$ la sua parte frazionaria cosicché $\alpha = k + r$ con k intero non negativo e $0 \leq r < 1$. Se $k = 0$ o $r = 0$ gli spazi $C^\alpha(E, \mathbb{R}^m)$ sono stati definiti, rispettivamente, in 6.13 e 6.14. Se $k \geq 1$ e $r > 0$ poniamo

$$C^\alpha(E, \mathbb{R}^m) \equiv \left\{ f \in C^k(E, \mathbb{R}^m) : \partial_x^\beta f \in C^r(E, \mathbb{R}^m), \forall \beta \in \mathbb{N}, |\beta| = k \right\},$$

$$(\text{con } \alpha \equiv k + r, k \in \mathbb{Z}_+, 0 < r < 1). \quad (6.46)$$

Per $f \in C^\alpha(E, \mathbb{R}^m)$ [con α come in (6.46)] poniamo

$$\|f\|_{C^\alpha} \equiv \|f\|_{C^k} + \sum_{\beta \in \mathbb{N}, |\beta| = k} \|\partial_x^\beta f\|_{C^r}. \quad (6.47)$$

Si dimostri che (anche in tal caso) $(C^\alpha(E, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{C^\alpha})$ è uno spazio di Banach.

E 6.16 Sia E un intervallo compatto di $\mathbb{R}$ e sia

$$X \equiv \left\{ f \in C^\infty(E, \mathbb{R}) : \|f\| \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|f^{(k)}\|_{\infty, E}}{2^k} < \infty \right\}. \quad (6.48)$$

Dimostrare che $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach ma che X è un sottoinsieme proprio di $C^\infty(E, \mathbb{R})$.

E 6.17 Ripetere l'esercizio 6.16 sostituendo 2^k con una qualunque successione $\{a_k\}$ di numeri strettamente positivi.

E 6.18 (Lo spazio $C^\infty(E, \mathbb{R}^m)$) (i) (caso $n = m = 1$) Sia E un intervallo compatto di $\mathbb{R}$. Su $C^\infty(E, \mathbb{R})$ si consideri la seguente metrica

$$d(f, g) \equiv \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \frac{\|f^{(k)} - g^{(k)}\|_{\infty, E}}{1 + \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_{\infty, E}}. \quad (6.49)$$

Dimostrare che (C^∞, d) è uno spazio metrico completo.

(ii) Sia E un compatto di $\mathbb{R}^n$. Su $C^\infty(E, \mathbb{R}^m)$ si consideri la seguente metrica:

$$d(f, g) \equiv \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k k!} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta|=k} \frac{\|\partial_x^\beta f - \partial_x^\beta g\|_{\infty, E}}{1 + \|\partial_x^\beta f - \partial_x^\beta g\|_{\infty, E}}. \quad (6.50)$$

Dimostrare che $(C^\infty(E, \mathbb{R}^m), d)$ è uno spazio metrico completo.

E 6.19 Dimostrare che su $C(E, \mathbb{R}^m)$, E compatto di $\mathbb{R}^n$, la norma $\|\cdot\|_{\infty, E}$ e la norma $\|f\| \equiv \sup_{x, y \in E} |f(x) - f(y)| + \sup_E |f|$ sono equivalenti (si noti che la norma $\|\cdot\|$ è formalmente la norma $\|\cdot\|_{C^\alpha}$ definita in (6.13) con $\alpha = 0$).

E 6.20 Sia E un intervallo compatto di $\mathbb{R}$. Dimostrare che su $C^1(E, \mathbb{R})$ la norma $\|\cdot\|_{C^1}$ e la norma $\|f\| \equiv \sup_{x, y \in E} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} + \sup_E |f|$ sono equivalenti (si noti che la norma $\|\cdot\|$ è formalmente la norma $\|\cdot\|_{C^\alpha}$ definita in (6.13) con $\alpha = 1$).

E 6.21 Dimostrare che $C^1(E, \mathbb{R}^m)$, E compatto di $\mathbb{R}^n$, è un sottospazio chiuso di $\text{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$ (dotato della topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$).

E 6.22 Sia E un intervallo compatto di $\mathbb{R}$, $\alpha > 1$ e sia

$$X \equiv \left\{ f \in C(E, \mathbb{R}) : \|f\| \equiv \sup_{x, y \in E, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \sup_E |f| < \infty \right\}.$$

Dimostrare che $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach e che tale spazio, infatti, non è altro che $\mathbb{R}$.

C 6.23 (Disuguaglianze di Hölder e Minkowski)

La **disuguaglianza di Hölder** è una generalizzazione della disuguaglianza di Schwarz: siano x_i e y_i , $i = 1, \dots, n$ numeri reali o complessi, e siano p e q due numeri reali maggiori di 1 e coniugati cioè

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q > 1, \quad (6.51)$$

allora

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \equiv |x|_p |y|_q, \quad (6.52)$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

La dimostrazione di tale disuguaglianza è basata sulla convessità della funzione esponenziale, come si evince dal seguente

Lemma 6.12 Siano p e q come in (6.51). Allora per ogni s e t in $[0, \infty)$ si ha

$$st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}. \quad (6.53)$$

Dimostrazione Assumiamo che $st > 0$ altrimenti la disuguaglianza è ovvia. Dalla convessità della funzione $x \rightarrow \exp(x)$ segue

$$\begin{aligned} st &= \exp(\log s + \log t) = \exp\left(\frac{1}{p} p \log s + \frac{1}{q} q \log t\right) \\ &\leq \frac{1}{p} \exp(p \log s) + \frac{1}{q} \exp(q \log t) = \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

E' facile ora dimostrare la disuguaglianza di Hölder: se $|x|_p$ o $|y|_q$ sono nulli significa che $x = 0$ o $y = 0$, nel qual caso la disuguaglianza è vera (col segno $=$). Assumiamo dunque che $|x|_p \neq 0$ e $|y|_q \neq 0$. Definiamo

$$a_i \equiv \frac{|x_i|}{|x|_p}, \quad b_i \equiv \frac{|y_i|}{|y|_q},$$

cosicch  (6.52) risulti equivalente a

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1. \quad (6.54)$$

Usando n volte la (6.53), si ha

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n a_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

che   quanto volevasi dimostrare. $\blacksquare$

Una conseguenza importante della disuguaglianza di Hölder   la seguente **disuguaglianza di Minkowski** (che non   altro che la disuguaglianza triangolare per la norma $|\cdot|_p$):

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n. \quad (6.55)$$

Dimostrazione Se $p = 1$ sappiamo che la disuguaglianza   vera. Assumiamo dunque che p sia un numero reale $p > 1$. Assumiamo anche che sia x che y non siano nulli (cio  che $|x|_p \neq 0$ e $|y|_p \neq 0$) e definiamo i vettori $a, b \in \mathbb{R}_+^n$ come i vettori le cui componenti siano

$$a_i \equiv |x_i|, \quad b_i \equiv |y_i|.$$

E' evidente che

$$|x + y|_p \leq |a + b|_p, \quad |x|_p = |a|_p, \quad |y|_p = |b|_p. \quad (6.56)$$

Infine sia $q \equiv p(p-1)^{-1}$, cosicch  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora, essendo $(p-1)q = p$, si ha

$$\begin{aligned} |a + b|_p^p &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)(a_i + b_i)^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1} \\ &\leq (|a|_p + |b|_p) \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (|a|_p + |b|_p) (|a + b|_p)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

cio 

$$\left(|a + b|_p \right)^{p - \frac{p}{q}} \leq |a|_p + |b|_p$$

ed essendo $p - \frac{p}{q} = 1$ si ha l'asserto. ■

E 6.24 Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |x|_p = |x|_\infty. \quad (6.57)$$

Tale relazione *giustifica* il simbolo $|\cdot|_\infty$ per la norma del massimo sui moduli delle componenti.

E 6.25 Si dimostrino le seguenti propriet  del diametro¹⁹: (i) $\text{diam } A = 0$ se e solo se A   costituito da un solo punto. (ii) Se $A \subset B$ allora $\text{diam } A \leq \text{diam } B$. (iii) A   limitato se e solo il suo diametro   finito. (iv) $\text{diam } A = \text{diam } \bar{A}$. (vi) Se $A_{k+1} \subset A_k$ e $\lim \text{diam } A_k = 0$ allora $\cap_k A_k$ contiene al pi  un punto.

E 6.26 Si calcoli il diametro di $A \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0|_p < r\}$ per $1 \leq p \leq \infty$.

E 6.27 Si dimostri che gli spazi di successioni $\ell^p \equiv$ insieme delle successioni reali (o complesse) x tali che

$$\|x\|_p \equiv \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

sono spazi di Banach per ogni $1 \leq p \leq \infty$.

E 6.28 Si dica qual   la relazione (come insiemi) di ℓ^p e ℓ^q con $1 \leq p < q \leq \infty$.

¹⁹Si ricorda che se A   un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ il **diametro** di A   dato da $\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} |x - y|$.

E 6.29 (i) Si dimostri che su ℓ^1 le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ non sono equivalenti tra loro; si dimostri che su ℓ^2 le norme $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ non sono equivalenti.

(ii) Si dimostri che per ogni $p > q$, $\|\cdot\|_p$ è una norma su ℓ^q e che le norme $\|\cdot\|_q$ e $\|\cdot\|_p$ non sono equivalenti su ℓ^q .

C 6.30 (Norme $\|\cdot\|_{L^p}$) Sia $E \equiv [a, b]$ un intervallo. Se $f \in C(E, \mathbb{R})$, definiamo

$$\|f\|_{L^p} \equiv \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (6.58)$$

Allora $\|\cdot\|_{L^p}$ è una norma su $C(E, \mathbb{R})$.

Dimostrazione $\|\cdot\|_{L^p}$ soddisfa chiaramente l'omogeneità e (per 5.49) la non degenerazione. Per dimostrare la disuguaglianza triangolare, da 0.1 segue, per ogni $f, g \in C(E, \mathbb{R})$, che

$$\begin{aligned} \left(\int_E |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N |f(x^{(i)}) + g(x^{(i)})|^p \delta_N \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\delta_N \sum_{i=1}^N |f(x^{(i)}) + g(x^{(i)})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

dove $\delta_N = (b-a)/N$ e $x^{(i)} = a + i\delta_N$; quindi da (6.55) segue che

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^N |f(x^{(i)}) + g(x^{(i)})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^N |f(x^{(i)})|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^N |g(x^{(i)})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{i=1}^N |f(x^{(i)})|^p \delta_N^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^N |g(x^{(i)})|^p \delta_N^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ &= \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

E 6.31 Sia $1 \leq p \leq \infty$. Si dimostri che $C([a, b], \mathbb{R})$ con la norma L^p non è uno spazio di Banach.

E 6.32 Siano $\{a_k\}$, $\{A^{(k)}\}$, $\{B^{(k)}\}$, $\{x^{(k)}\}$ successioni in, rispettivamente, $\mathbb{R}$, $\text{Mat}(n \times m)$, $\text{Mat}(m \times p)$, $\mathbb{R}^p$ convergenti a, rispettivamente a , A , B , x . Dimostrare che $a_k A^{(k)} B^{(k)} x^{(k)} \rightarrow aAB$ e che $a_k A^{(k)} B^{(k)} x^{(k)} \rightarrow aABx$.

E 6.33 Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati e sia $\mathcal{L}(X, Y)$ l'insieme delle applicazioni lineari e continue $A: X \rightarrow Y$.

(i) Si dimostri che $\mathcal{L}(X, Y)$ è (in modo naturale) uno spazio vettoriale.

(ii) Si dimostri che $\|A\| \equiv \sup_{x \in X, x \neq 0} \|Ax\|_Y / \|x\|_X$ (per $A \in \mathcal{L}(X, Y)$) definisce una norma ("norma operatoriale") su $\mathcal{L}(X, Y)$.

(iii) Si dimostri che se X e Y sono di Banach, lo è anche $\mathcal{L}(X, Y)$.

(iv) Sia $A: X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare (a priori non necessariamente continua) e supponiamo che $\|A\| \equiv \sup_{x \in X, x \neq 0} \|Ax\|_Y / \|x\|_X < \infty$. Si dimostri che A è continua.

E 6.34 Sia X lo spazio di Banach $C([0, 1], \mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_{\infty, [0, 1]}$ e sia A l'“operatore” che a $f \in X$ associa la funzione $(Af)(x) \equiv \int_0^1 f(y)e^{-(x-y)^2} dy$. Dimostrare che $A \in \mathcal{L}(X, X)$ e stimare la norma operatoriale di A (si veda 6.33 per le definizioni).

E 6.35 Sia X lo spazio di Banach ℓ^∞ (con la norma $\|x\|_\infty \equiv \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$) e sia

$$S : x \equiv \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \rightarrow Sx \equiv \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

- (i) Si dimostri che $S \in \mathcal{L}(\ell^\infty, \ell^\infty)$ e se ne calcoli la norma (operatoriale).
- (ii) Dimostrare che esiste un “inverso destro” ovvero esiste $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, \ell^\infty)$ tale che $ST = I$ (ove $I : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ è l'identità) ma che non esiste alcun “inverso sinistro” (ovvero R tale che $RS = I$).
- (iii) Trovare un sottospazio di ℓ^∞ su cui S sia invertibile.

E 6.36 Si calcoli la matrice esponenziale e^{At} , con: (i) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ($a \in \mathbb{R}$); (ii) $A = \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, ($a, b \in \mathbb{R}$); (iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, ($ab > 0$); (iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, ($ab < 0$); (v) $A = \begin{pmatrix} c & a \\ b & c \end{pmatrix}$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

E 6.37 (i) Dimostrare che se $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è una matrice diagonale allora $e^\Lambda = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

(ii) Dimostrare che se $v \in \mathbb{R}^n$ è un autovettore per $A \in \text{Mat}(n \times n)$ con autovalore λ (cioè $v \neq 0$ e $Av = \lambda v$), allora $e^A v = e^\lambda v$, cioè v è autovettore per e^A con autovalore e^λ .

(iii) Dimostrare che se $A \in \text{Mat}(n \times n)$ e $T \in \text{Mat}(n \times n)$ è invertibile allora

$$T^{-1}e^AT = e^{T^{-1}AT}. \quad (6.59)$$

Da (6.59) segue immediatamente che se A è una matrice diagonalizzabile (cioè $T^{-1}AT = \Lambda \equiv \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$), allora

$$e^A = Te^\Lambda T^{-1}. \quad (6.60)$$

E 6.38 Siano A e B le matrici di (6.32) e si dimostri che le tre matrici $e^A e^B$, $e^B e^A$ e e^{A+B} sono tutte diverse tra di loro.

E 6.39 (i) Sia $t \in (a, b) \rightarrow A(t) \in \text{Mat}(n \times m)$. Dimostrare che $A(t)$ è derivabile in $t_0 \in (a, b)$ (ossia $\exists \lim_{h \rightarrow 0} (A(t_0 + h) - A(t_0))/h$) se e solo se sono derivabili in t_0 gli elementi di matrice A_{ij} per ogni i, j , e che, in tal caso, si ha $(A')_{ij} = (A_{ij})'$.

(ii) Dimostrare che, se $A(t) \in \text{Mat}(n \times m)$, $B(t) \in \text{Mat}(m \times p)$, $v(t) \in \mathbb{R}^m$ sono derivabili, allora valgono le seguenti regole di derivazione

$$(AB)' = A'B + AB', \quad (Av)' = A'v + Av'. \quad (6.61)$$

(iii) Dimostrare che se $A(t) \in \text{Mat}(n \times n)$ è derivabile in t_0 e se $A(t_0)$ è invertibile allora $A^{-1}(t)$ è derivabile in t_0 e si ha

$$(A^{-1})'(t_0) = -A^{-1}(t_0) A'(t_0) A^{-1}(t_0). \quad (6.62)$$

(iv) I punti precedenti si generalizzano immediatamente al caso di funzioni regolari da $\mathbb{R}^n$ in $\text{Mat}(n \times m)$: se U è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $x \in U \rightarrow A(x) \in \text{Mat}(n \times m)$, $A(x)$ ha derivata parziale rispetto a x_k in $x_0 \in U$ se e solo se ammettono derivata parziale rispetto a x_k gli elementi di matrice A_{ij} per ogni i, j , e che, in tal caso, si ha $(\frac{\partial A}{\partial x_k})_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}$; se $A(x) \in \text{Mat}(n \times m)$, $B(x) \in \text{Mat}(m \times p)$, $v(x) \in \mathbb{R}^m$ ammettono derivata parziale rispetto a x_k in x_0 , allora $\frac{\partial(AB)}{\partial x_k} = \frac{\partial A}{\partial x_k} B + A \frac{\partial B}{\partial x_k}$, $\frac{\partial(Av)}{\partial x_k} = \frac{\partial A}{\partial x_k} v + A \frac{\partial v}{\partial x_k}$; se $A(x) \in \text{Mat}(n \times n)$ ha derivata parziale rispetto a x_k in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e se $A(x_0)$ è invertibile allora $A^{-1}(x)$ è derivabile in x_0 e si ha $\frac{\partial A^{-1}}{\partial x_k}(x_0) = -A^{-1}(x_0) \frac{\partial A}{\partial x_k}(x_0) A^{-1}(x_0)$.

E 6.40 Sia X_T lo spazio di Banach delle funzioni delle funzioni continue su $[-T, T]$ con norma uniforme $\|u\|_\infty \equiv \sup_{|t| \leq T} |u(t)|$ e sia $\Phi_a : X_T \rightarrow X_T$ definita come

$$(\Phi_a u)(t) \equiv a + t^2 + \int_0^t \sin u(s) \, ds.$$

Trovare $T > 0$ tale che Φ_a sia una contrazione da X_T in se stesso.

E 6.41 Sia $0 < \varepsilon$ e sia $X_\varepsilon \equiv \{u \in C([-1, 1], \mathbb{R}) : \sup_{|t| \leq 1} |u(t)| \leq \varepsilon\}$ e sia $\Phi(u) \equiv u^3 + \cos u - 1$.

(i) Trovare $\varepsilon_0 > 0$ tale che Φ sia una contrazione su X_ε .

(ii) Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\Phi \circ \dots \circ \Phi}_n \left(\frac{t^2 + t^3}{100} \right)$.

E 6.42 Sia X uno spazio di Banach e sia $x : t \in [a, b] \rightarrow x(t) \in X$ una funzione continua. Si dimostri che $x(t)$ è uniformemente continua (ossia che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che comunque si scelgano $t, t_0 \in [a, b]$ con $|t - t_0| < \delta$ allora $\|x(t) - x(t_0)\| < \varepsilon$).

E 6.43 (Integrazione in spazi di Banach) Sia X uno spazio di Banach e sia $x : t \in [a, b] \rightarrow x(t) \in X$ una funzione continua.

(i) Si dimostri che $x^{(k)} \equiv \sum_{j=0}^k \delta_k x(t_j^{(k)})$, con $t_j^{(k)} \equiv a + j\delta_k$ e $\delta_k \equiv (b-a)/k$, è una successione di Cauchy in X .

Si definisca $\int_a^b x(t) dt \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$.

(ii) Si dimostri la linearità dell'integrale e che

$$\left\| \int_a^b x(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|x(t)\| dt.$$

7 Funzioni implicite

7.1 Teorema delle funzioni implicite

Consideriamo il problema di trovare le soluzioni di un sistema di n equazioni (nelle incognite $y_1, \dots, y_n$) che contengano m parametri. In altre parole vogliamo trovare $y \in \mathbb{R}^n$ che soddisfi il sistema di n equazioni

$$F(y, x) = 0, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} F_1(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m) = 0 \\ F_2(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ F_n(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

al variare dei “parametri” $x \in \mathbb{R}^m$ avendo assegnato la funzione $F : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esempi semplici di natura geometrica sono dati dai grafici di funzioni.

(a) Sia $F(y, x) = y^3 - x$, ($n = m = 1$); in tal caso le soluzioni, al variare di $x \in \mathbb{R}$, di $F(y, x) = 0$ sono $y = \sqrt[3]{x}$ cioè l'insieme delle soluzioni di $F(y, x) = 0$, $\{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : F(y, x) = 0\}$, coincide con il grafico di $\sqrt[3]{x}$ ovvero con l'insieme $\{(\sqrt[3]{x}, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(b) Sia $F(y, x) = y^2 - x$ (ancora $n = m = 1$). Se $x < 0$ non esistono soluzioni di $F(y, x) = 0$; se $x = 0$, l'unica soluzione è data da $y = 0$; se $x > 0$ vi sono due soluzioni date da $y = \pm\sqrt{x}$. Quindi, fissato $x_0 > 0$, in un intorno (sufficientemente piccolo) di $(x_0, y_0) \equiv (x_0, \sqrt{x_0})$ vi è una *unica funzione di x che soddisfi identicamente $F(y(x), x) = 0$* , tale funzione essendo, ovviamente, $y(x) = +\sqrt{x}$ mentre in un intorno di $(x_0, y_0) \equiv (x_0, -\sqrt{x_0})$, avremo la soluzione $y(x) = -\sqrt{x}$. In un intorno di $(x_0, y_0) = (0, 0)$ invece non è possibile definire in maniera univoca le soluzioni di $F(y, x) = 0$ in termini di funzioni di x . Il punto $(0, 0)$ è dunque, rispetto al nostro problema, “singolare”: il numero di soluzioni varia tra 0 e 2 quando $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, comunque piccolo sia $\varepsilon > 0$. Notiamo anche che in tale punto singolare si ha $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Già da questi semplicissimi esempi si vede che una formulazione più propria del problema che ci stiamo ponendo è:

Dato un punto (y_0, x_0) tale che $F(y_0, x_0) = 0$, è possibile trovare una funzione $y = g(x)$ tale che $g(x_0) = y_0$ e tale che il grafico di g rappresenti localmente tutte le soluzioni di¹ $F(y, x) = 0$?

(c) Cambiamo punto di vista e diamo un esempio analitico con n ed m arbitrari. Consideriamo il sistema di equazioni *lineari* nelle incognite $y_1, \dots, y_n$ con coefficienti che dipendono da $x \in \mathbb{R}^m$:

$$A(x)y + b(x) = 0, \quad (7.2)$$

¹ Ovvero $F(g(x), x) = 0$ in un intorno di x_0 e l'insieme delle coppie $(g(x), x)$ al variare di x in tale intorno sono *tutte* le soluzioni di $F(y, x) = 0$ in un intorno di (y_0, x_0) .

dove $A(x) \in \text{Mat}(n \times n)$ e $b(x) \in \mathbb{R}^n$. E' evidente che tale sistema è unicamente risolubile se $\det A(x) \neq 0$, nel qual caso si ha

$$y = -A(x)^{-1}b(x) \quad (7.3)$$

e se $A(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue di x , così risulterà anche la funzione $y(x)$ definita dalla (7.3). Si noti che, se poniamo $F(y, x) = A(x)y + b(x)$, $A(x)$ coincide con la matrice jacobiana $\frac{\partial F}{\partial y}$ e dunque la condizione di risolubilità è che tale matrice jacobiana sia invertibile.

Alla luce di queste osservazioni, l'enunciato del seguente teorema potrebbe risultare alquanto naturale².

Teorema 7.1 (Teorema delle funzioni implicite)

(1) Sia $F : (y, x) \in \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow F(y, x) \in \mathbb{R}^n$ una funzione continua insieme alla sua matrice jacobiana $\frac{\partial F}{\partial y}$ in un intorno di (y_0, x_0) . Assumiamo che

$$F(y_0, x_0) = 0, \quad \text{e} \quad \det \frac{\partial F}{\partial y}(y_0, x_0) \neq 0. \quad (7.4)$$

Allora esiste una ed una sola funzione g continua in un intorno di x_0 , che soddisfi

$$g(x_0) = y_0, \quad \text{e} \quad F(g(x), x) \equiv 0 \quad (7.5)$$

per ogni x in tale intorno.

(2) Più precisamente, siano $\rho, r > 0$ tali che, se poniamo $Y_0 \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq \rho\}$ e $X_0 \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x_0| \leq r\}$, valgano le seguenti condizioni:

(i) F e $\frac{\partial F}{\partial y}$ sono continue su $Y_0 \times X_0$;

(ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(y_0, x_0)$ è invertibile e

$$\sup_{X_0} |F(y_0, x)| \leq \frac{\rho}{2\|T\|}, \quad T \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial y}(y_0, x_0) \right)^{-1}; \quad (7.6)$$

(iii):

$$\sup_{Y_0 \times X_0} \|I - T \frac{\partial F}{\partial y}(y, x)\| \leq \frac{1}{2} \quad (7.7)$$

dove $I \in \text{Mat}(n \times n)$ è la matrice identità. Allora esiste un'unica $g \in C(X_0, Y_0)$ che soddisfa (7.5) per ogni $x \in X_0$. Inoltre, il grafico $\{(y, x) = (g(x), x) : x \in X_0\}$ rappresenta tutte e sole le soluzioni di $F(y, x) = 0$ in $Y_0 \times X_0$.

²Almeno la parte (1) di tale enunciato.

³Cioè esiste un aperto $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ contenente (y_0, x_0) dove $F_i(y, x)$ e $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ sono continue per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$.

Osservazione 7.2 (i) Si noti che grazie alle ipotesi enunciate nella parte (1) del teorema, è sempre possibile trovare ρ e r per cui le tre condizioni della parte (2) valgano. Infatti la relazione (7.6) dice come va scelto r in funzione di ρ , ovvero determina $r = r(\rho)$; dopodiché la condizione (7.7) determina⁴ ρ . L'enunciato (2) è semplicemente una *formulazione quantitativa* di (1).

(ii) Da (7.7) e da § 6.2 segue che $\frac{\partial F}{\partial y}(y, x)$ è invertibile per ogni $(y, x) \in Y_0 \times X_0$; infatti, dalla parte finale di § 6.2, segue che se poniamo con $A \equiv I - T \frac{\partial F}{\partial y}$ la matrice $I - A = T \frac{\partial F}{\partial y}$ è invertibile, e quindi, essendo T invertibile, segue anche l'invertibilità di $\frac{\partial F}{\partial y}$.

(iii) (i) Il fattore $\frac{1}{2}$ che compare nelle condizioni (7.6) e (7.7) è alquanto arbitrario ed in effetti dalla dimostrazione del teorema segue facilmente (Esercizio 7.5) che le condizioni (7.6) e (7.7) possono venire sostituite, rispettivamente, con

$$\sup_{X_0} |F(y_0, x)| \leq \alpha \frac{\rho}{\|T\|}, \quad T \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial y}(y_0, x_0) \right)^{-1}; \quad (7.8)$$

e da

$$\sup_{Y_0 \times X_0} \|I - T \frac{\partial F}{\partial y}(y, x)\| \leq (1 - \alpha) \quad (7.9)$$

con $0 < \alpha < 1$ prefissato.

(iv) Le norme usate nella versione quantitativa (2) del teorema delle funzioni implicite sono state fissate per semplicità ma è immediato verificare nella dimostrazione che segue che *l'enunciato quantitativo in (2) vale per qualunque scelta delle norme in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ e con la relativa norma operatoriale su $\text{Mat}(n \times n)$* . Ad esempio, è spesso più conveniente nelle applicazioni usare le norme $|\cdot|_\infty$ in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ con la relativa norma $\|\cdot\|_{\infty, \infty}$ sulle matrici⁵ $n \times n$.

(v) Il nome “funzioni implicite” deriva dal fatto che la relazione (7.1), sotto le ipotesi (7.4), *definisce implicitamente* la funzione $y = g(x)$.

Dimostrazione Poniamo $G(y, x) = y - TF(y, x)$, cosicché $\frac{\partial G}{\partial y} = I - T \frac{\partial F}{\partial y}$. Allora, per ogni $y, z \in Y_0$ e $x \in X_0$, in virtù di (5.130), (5.142) e (7.7), si ha

$$\begin{aligned} |G(y, x) - G(z, x)| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial y}(z + t(y - z), x) [y - z] dt \right| \\ &\leq \sup_{Y_0 \times X_0} \left\| \frac{\partial G}{\partial y} \right\| |y - z| \leq \frac{1}{2} |y - z|. \end{aligned} \quad (7.10)$$

⁴Questa osservazione verrà, probabilmente, capita meglio facendo dei casi concreti; si veda, ad esempio 7.6, 7.7 e 7.8.

⁵Si ricordi, infatti, che la norma $\|\cdot\|_{\infty, \infty}$ si calcola immediatamente [si veda (6.15)] al contrario, in generale, della norma $\|\cdot\|_{2,2}$.

Sia, ora, $E \equiv C(X_0, Y_0)$. Si noti che E è un sottoinsieme chiuso dello spazio di Banach⁶ $C(X_0, \mathbb{R}^n)$ (dotato della norma uniforme $\|\cdot\|_{\infty, X_0}$). Sull'insieme E definiamo la seguente mappa Φ che associa ad una funzione $u \in C(X_0, Y_0)$ la funzione $\Phi(u)$ definita da

$$\Phi(u)(x) \equiv G(u(x), x) = u(x) - TF(u(x), x) . \quad (7.11)$$

Si noti che tale definizione è ben posta poiché i valori $u(x)$ cadono nella sfera chiusa Y_0 su cui $F(\cdot, x)$ è continua. Per ogni $u, v \in E$, e per ogni $x \in X_0$, da (7.10) (con $y = u(x)$ e $z = v(x)$) segue che

$$|\Phi(u)(x) - \Phi(v)(x)| \leq \frac{1}{2}|u(x) - v(x)| \quad (7.12)$$

e, prendendo l'estremo superiore su X_0 , vediamo che

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{\infty, X_0} \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_{\infty, X_0} . \quad (7.13)$$

Cioè Φ è una *contrazione* sullo spazio di Banach $C(X_0)$. Chiamiamo $u_0(x)$ la funzione costante $u_0(x) \equiv y_0$; tale funzione è ovviamente in E e da (7.13), la definizione di Φ e da (7.6), si ottiene⁷, per ogni $u \in E$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(u) - y_0\|_{\infty} &\leq \|\Phi(u) - \Phi(u_0)\|_{\infty} + \|\Phi(u_0) - y_0\|_{\infty} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\|u - u_0\|_{\infty} + \|TF(y_0, x)\|_{\infty} \\ &\leq \frac{1}{2}\|u - y_0\|_{\infty} + \|T\| \frac{\rho}{2\|T\|} \leq \rho , \end{aligned} \quad (7.14)$$

cioè $\Phi(u)(x) \in Y_0$ per ogni $x \in X_0$, il che equivale a dire che $\Phi(u) \in C(X_0, Y_0) = E$. Quindi Φ manda E in se stesso ed è una contrazione. Per il teorema di punto fisso 6.10 possiamo concludere che esiste una unica funzione $g \in C(X_0, Y_0)$ tale che $\Phi(g) = g$, ovvero $g - TF(g, x) = g$, ma questa relazione è equivalente a

$$F(g(x), x) = 0 , \quad \forall x \in X_0 . \quad (7.15)$$

Inoltre, ricordando la dimostrazione del Teorema 6.10, il punto fisso g può essere ottenuto come limite uniforme della successione $v^{(1)} \equiv \Phi(u_0), \dots, v^{(j)} \equiv \Phi(v^{(j-1)}), \dots$ e poiché $v^{(j)}(x_0) = y_0$ per ogni $j \geq 1$ (come si vede subito per induzione) si ha che $g(x_0) = y_0$.

Dimostriamo infine che il grafico $\{(y, x) = (g(x), x) : x \in X_0\}$ è l'insieme di *tutte* le soluzioni di $F(y, x) = 0$ in $Y_0 \times X_0$. Per dimostrare tale affermazione, supponiamo,

⁶ $u_k \in E$ significa $u_k \in C(X_0, \mathbb{R}^n)$ e $|u_k(x) - y_0| \leq \rho$ per ogni $x \in X_0$; se $\{u_k\}$ è di Cauchy allora, poiché $(C(X_0, \cdot), \|\cdot\|_{\infty, X_0})$ è uno spazio di Banach, esiste $u \in C(X_0, \mathbb{R}^n)$ tale che $\sup_{x \in X_0} |u_k(x) - u(x)| \rightarrow 0$ e quindi, per ogni $x \in X_0$, $|u(x) - y_0| = \lim_{k \rightarrow \infty} |u_k(x) - y_0| \leq \rho$ e quindi $u \in E$.

⁷Qui $\|\cdot\|_{\infty}$ denota, per brevità, $\|\cdot\|_{\infty, X_0}$.

per assurdo, che esista $\bar{x} \in X_0$ ed un $\bar{y} \in Y_0$ tale che $\bar{y} \neq \bar{g} \equiv g(\bar{x})$ e tale che $F(\bar{y}, \bar{x}) = 0$. Allora, dalla definizione di G e da (7.10) seguirebbe che

$$|\bar{y} - \bar{g}| = |G(\bar{y}, \bar{x}) - G(\bar{g}, \bar{x})| \leq \frac{1}{2} |\bar{y} - \bar{g}| \quad (7.16)$$

il che è assurdo (avendo noi assunto che $\bar{y} \neq \bar{g}$). ■

Esempio 7.3 Sia $F(y, x_1, x_2) = e^y - \sin(yx_1 + \frac{x_2\pi}{2})$, con $y \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, e sia $(y_0, x_0) \equiv (y_0, x_{01}, x_{02}) = (0, 1, 1)$. Mostriamo che il Teorema 7.1 è applicabile in un intorno di (y_0, x_0) e troviamo dei valori di ρ e r per cui (7.6) e (7.7) vengano soddisfatte.

$F(0, 1, 1) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = e^y - x_1 \cos(yx_1 + \frac{x_2\pi}{2})$, e $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1, 1) = 1$. Quindi il teorema è applicabile nell'intorno di (y_0, x_0) . Diamo ora delle stime concrete su ρ e r ; per semplificare tali stime useremo le seguenti disuguaglianze elementari⁸:

$$\begin{aligned} |1 - \cos y| &\leq \frac{y^2}{2}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \\ |e^y - 1| &\leq (e - 1)|y| < 2|y|, \quad \forall |y| \leq 1. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Poiché $F(y_0, x) = 1 - \sin \frac{x_2\pi}{2}$, scrivendo $x_2 = 1 + a$ con $|a| \leq r$ ed usando la prima disuguaglianza in (7.17) otteniamo

$$\begin{aligned} \sup_{x_0} |F(y_0, x)| &= \sup_{|x_2-1| \leq r} |1 - \sin \frac{x_2\pi}{2}| \\ &= \sup_{|a| \leq r} |1 - \sin \frac{(1+a)\pi}{2}| = \sup_{|a| \leq r} |1 - \cos \frac{a\pi}{2}| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi r}{2} \right)^2 < 2r^2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Quindi, poiché $T = 1$ (e quindi $\|T\| = 1$), la condizione (7.6) è soddisfatta se scegliamo $r = \rho/2$. Passiamo alla condizione (7.7). Per ogni $|y| \leq \rho$ e $|x - (1, 1)| \leq r$, scrivendo ancora $x_2 = 1 + a$ con $|a| \leq r$, usando la seconda disuguaglianza in (7.17) e maggiorando $|\sin t|$ con $|t|$, si ha

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{\partial F}{\partial y} \right| &= |e^y - 1 - x_1 \cos(yx_1 + \frac{x_2\pi}{2})| \leq |e^y - 1| + |x_1| |\sin(yx_1 + \frac{a\pi}{2})| \\ &\leq 2|y| + |x_1| (|y||x_1| + \frac{|a|\pi}{2}) \leq 2\rho + (1+r)[\rho(1+r) + \frac{r\pi}{2}] \end{aligned} \quad (7.19)$$

⁸ $|1 - \cos y| = \left| \int_0^y \sin t \, dt \right| \leq \int_0^{|y|} |\sin t| \, dt \leq \int_0^{|y|} t \, dt = \frac{|y|^2}{2}.$

Per $|y| \leq 1$, $\left| \frac{e^y - 1}{y} \right| \leq \sum_{k \geq 1} \frac{|y|^{k-1}}{k!} \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} = e - 1 < 2.$

quindi, per la definizione di r , si ottiene

$$\sup_{Y_0 \times X_0} |1 - T \frac{\partial F}{\partial y}| \leq 2\rho + (1 + \frac{\sqrt{\rho}}{2})[\rho(1 + \frac{\sqrt{\rho}}{2}) + \frac{\sqrt{\rho}\pi}{4}]$$

e quindi (7.7) è soddisfatta se prendiamo, ad esempio, $\rho = (1/16)$ (e quindi $r = (1/8)$).

Se la funzione F è più regolare, lo è anche la funzione g :

Proposizione 7.4 *Siano Y_0 e X_0 due sfere (aperte) di, rispettivamente, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ e sia k un intero positivo o $+\infty$. Supponiamo che $F \in C^k(Y_0 \times X_0, \mathbb{R}^n)$, che $\frac{\partial F}{\partial y}$ sia invertibile $\forall (y, x) \in Y_0 \times X_0$ e che $g \in C(X_0, Y_0)$ verifichi $F(g(x), x) = 0$ per ogni $x \in X_0$. Allora $g \in C^k(X_0)$ ed in particolare, per ogni $1 \leq j \leq m$ e per ogni $x \in X_0$, si ha*

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(g(x), x) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(g(x), x). \quad (7.20)$$

Dimostrazione Fissiamo $x \in X_0$, $1 \leq j \leq m$ e poniamo, per $t \in \mathbb{R}$:

$$\xi(t) \equiv x + te^{(j)}, \quad \eta(t) \equiv g(x + te^{(j)})$$

dove, come al solito $e^{(j)}$ è il versore (in $\mathbb{R}^m$) nella j -esima direzione. Per $|t|$ sufficientemente piccolo, diciamo $|t| \leq a$, si ha $(\eta(t), \xi(t)) \in Y_0 \times X_0$ e $(\eta(0), \xi(0)) = (g(x), x)$. Consideriamo ora la matrice

$$M(t) \equiv \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y}(\eta(0) + s(\eta(t) - \eta(0)), \xi(t)) ds$$

ed osserviamo che $t \in [-a, a] \rightarrow M(t) \in \text{Mat}(n \times n)$ è una funzione continua e che $M(0) = \frac{\partial F}{\partial y}(g(x), x)$. Ora, per (5.130),

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{F(\eta(t), \xi(t)) - F(\eta(0), \xi(0))}{t} \\ &= \frac{F(\eta(t), \xi(t)) - F(\eta(0), \xi(t))}{t} + \frac{F(\eta(0), \xi(t)) - F(\eta(0), \xi(0))}{t} \\ &= M(t) \frac{\eta(t) - \eta(0)}{t} + \frac{F(\eta(0), \xi(t)) - F(\eta(0), \xi(0))}{t}, \end{aligned}$$

e moltiplicando (a sinistra) tale relazione per $M(0)^{-1}$ e prendendo il limite per $t \rightarrow 0$, si ottiene (7.20). Sia ora $k > 1$ ed assumiamo induttivamente che $g \in C^{k-1}$. Essendo $F \in C^k$, dalla identità (7.20) e dall'analisi fatta in § 5.11 e in 6.39 segue che $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ è di classe C^{k-1} (per ogni j) il che è naturalmente equivalente a dire che $g \in C^k$. ■

Un importante corollario del teorema delle funzioni implicite è il seguente risultato che fornisce un criterio per decidere quando una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sia (localmente) invertibile.

Teorema 7.5 (Teorema della funzione inversa)

(1) Sia k un intero positivo o $+\infty$ e sia f una funzione C^k in un intorno di un punto $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ed a valori in $\mathbb{R}^n$. Se la matrice jacobiana $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$ è invertibile, allora esiste (ed è unica) la funzione inversa g di f . Tale funzione g è C^k in un intorno di $x_0 = f(y_0)$ e vale

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = T, \quad \text{con} \quad T \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y_0) \right)^{-1}. \quad (7.21)$$

(2) Più precisamente, sia ρ tale che

$$\sup_{Y_0} \|I - T \frac{\partial f}{\partial y}(y)\| \leq \frac{1}{2} \quad (7.22)$$

con $Y_0 \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq \rho\}$. Allora, se poniamo $r \equiv \rho(2\|T\|)^{-1}$ e $X_0 \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}$, esiste una unica $g \in C^k(X_0, Y_0)$ tale che $g(x_0) = y_0$, $f(g(x)) = x$ in X_0 e $g(f(y)) = y$ in Y_0 .

Dimostrazione Basta porre $F(y, x) = f(y) - x$. Per definizione di x_0 , $F(y_0, x_0) = 0$ e $F \in C^1(Y_0 \times X_0)$. Inoltre $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ e $F(y_0, x) = f(y_0) - x = x_0 - x$, quindi la condizione (7.6) è automaticamente soddisfatta grazie alla definizione di r . Da queste osservazioni, dal Teorema 7.1 e dalla Proposizione 7.4 seguono tutte le tesi del Teorema 7.5 tranne quella sull'identità $g(f(y)) = y$. Sia $\bar{y} \in g(X_0)$, ovvero sia $\bar{y} = g(\bar{x})$ per qualche $\bar{x} \in X_0$. Allora, essendo $f(g(x)) = x$ per $x \in X_0$, si ha che $f(\bar{y}) = \bar{x}$, da cui $g(f(\bar{y})) = g(\bar{x}) = \bar{y}$. ■

Corollario 7.6 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Allora f è invertibile su A con inversa C^1 se e solo se f è iniettiva e lo jacobiano $\frac{\partial f}{\partial y}(y)$ è invertibile per ogni $y \in A$.

Dimostrazione “se”: chiamiamo g , definita per $x \in B \equiv f(A)$, la funzione inversa di f (che esiste per ipotesi essendo f iniettiva su A). Se lo jacobiano $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$ è invertibile ($y_0 \in A$), dal Teorema 7.5 segue che $g \in C^1\{x_0\}$ con $x_0 \equiv f(y_0)$.

“solo se”: se $f(y_0) = x_0$ e $g \in C^1\{x_0\}$ è la funzione inversa di f , calcolando lo jacobiano in x_0 della relazione $f \circ g(x) = x$ (che vale in un intorno di x_0) si ottiene $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = I$ il che significa che la matrice $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0)$ è l'inversa della matrice $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$. ■

Si noti che le ipotesi di questo risultato non possono essere indebolite: la funzione $f: y \in (-1, 1) \rightarrow y^3 \in (-1, 1)$ è biunivoca su $(-1, 1)$, C^∞ ma il suo jacobiano (che in questo caso coincide con la derivata $f'(y) = 3y^2$) non è invertibile in $y = 0$ ed infatti la funzione inversa $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ è continua ma non è derivabile in $x = 0$.

⁹ $g(X_0)$ è l'insieme dei valori $g(x)$ per x che varia in X_0 .

7.2 Massimi e minimi vincolati

Vediamo, in questo paragrafo, un'interessante applicazione del teorema delle funzioni implicite che permette di risolvere, in certi casi, *problemi di massimo o minimo vincolati*.

Una maniera comune (e classica) di indicare sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ è quella di usare disuguaglianze: ad esempio il disco unitario chiuso centrato nell'origine in $\mathbb{R}^2$ è dato da $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. In generale se ϕ è una funzione continua da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, denotiamo con¹⁰

$$A_+ \equiv \{\phi > 0\}, E_+ \equiv \{\phi \geq 0\}, A_- \equiv \{\phi < 0\}, E_- \equiv \{\phi \leq 0\}, E_0 \equiv \{\phi = 0\}. \quad (7.23)$$

Vale allora la seguente

Proposizione 7.7 (i) $A_{\pm}$ sono insiemi aperti (non necessariamente connessi) di $\mathbb{R}^n$; (ii) $E_0, E_{\pm}$ sono insiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$; (iii) $E_{\pm} = A_{\pm} \cup E_0$, $\mathbb{R}^n = A_+ \cup A_- \cup E_0$ (il puntino denota "unione disgiunta"); (iv) $\partial A_{\pm} \subset E_0$ e $\partial E_{\pm} \subset E_0$; (v) se $n \geq 2$ e E_0 è limitato, allora o E_+ è un insieme compatto o lo è E_- .

Dimostrazione Le affermazioni (i)-(iv) sono una immediata conseguenza delle definizioni e della continuità di ϕ . Verifichiamo (v): per ipotesi esiste $R > 0$ tale che $E_0 \subset B_R(0)$. Sia x_0 un punto qualunque con $|x_0| > R$ e sia σ il segno di $\phi(x_0)$. Allora $E_{-\sigma}$ è compatto mentre non lo è E_{σ} : per provare tale affermazione basta far vedere che se $|x| > R$ allora il segno di $\phi(x)$ è σ cioè lo stesso di x_0 . Se così non fosse potremmo unire x e x_0 con una poligonale formata al più da due segmenti tutta contenuta in¹¹ $\{y : |y| > R\}$ e agli estremi di tale poligonale ϕ assumerebbe segni opposti. Supponiamo per semplicità che la poligonale sia formata dal solo segmento $\{x_0 + t(x - x_0) : t \in [0, 1]\}$. Allora la funzione $F(t) \equiv \phi(x_0 + t(x - x_0))$ è una funzione continua su $[0, 1]$ e $F(0)F(1) < 0$. Ma allora esisterebbe un $\tau \in (0, 1)$ tale che $F(\tau) = 0$ cioè esisterebbe uno ξ con $|\xi| > 2R$ tale che $\phi(\xi) = 0$ e questa è una contraddizione. ■

Supponiamo dunque che un insieme compatto in $\mathbb{R}^n$ sia dato come l'insieme $K \equiv \{x : \phi(x) \leq 0\}$ e sia f una funzione continua su K . Dal teorema di Weierstrass sappiamo che f ammette massimo e minimo su K ed il problema che ci poniamo è quello di sviluppare dei metodi che permettano di determinare i punti estremali ovvero i punti di massimo o minimo. Per far questo assumeremo un po' di regolarità ovvero assumiamo che f e ϕ siano di classe C^1 . Dal paragrafo § 5.11 sappiamo che se un punto estremo è interno a K allora vi si annulla il gradiente di f e questo permette di selezionare i punti interni candidati ad essere estremali. Cosa possiamo dire se gli estremali di f sono sulla frontiera di K , che per la Proposizione 7.7 è contenuta nell'insieme $E_0 \equiv \{x : \phi(x) = 0\}$? A tale proposito sussiste il seguente risultato dovuto a Lagrange. Prima una definizione:

¹⁰La notazione " $\{\phi > 0\}$ " è una forma abbreviata di " $\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) > 0\} = \phi^{-1}((0, \infty))$ " ed analogamente per le altre disuguaglianze.

¹¹Questa è la proprietà per cui è necessario avere $n \geq 2$.

Definizione 7.8 Sia $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Un punto $x_0 \in E_0 \equiv \{x : \phi(x) = 0\}$ si dice regolare per E_0 se $\nabla\phi(x_0) \neq 0$.

Proposizione 7.9 Siano ϕ e E_0 come nella Definizione 7.8 e sia f una funzione $C^1(E_0)$. Se x_0 è un punto regolare per E_0 ed è un massimo o un minimo relativo di f su E_0 , allora esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla\phi(x_0)$.

A volte, l'insieme $\{\phi = 0\}$ viene chiamato vincolo.

Dimostrazione Poiché x_0 è regolare, una delle derivate parziali di ϕ è non nulla in x_0 . Supponiamo, tanto per fissare le idee, che sia la prima variabile: $\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$. Chiamiamo y la variabile x_1 e z il resto delle variabili, cioè $z = (x_2, \dots, x_n)$; $y_0 \equiv x_{01}$ e $z_0 \equiv (x_{02}, \dots, x_{0n})$. Dunque $\frac{\partial\phi}{\partial y}(y_0, z_0) \neq 0$ e per il teorema delle funzioni implicite e per la Proposizione 7.4, il luogo degli zeri di ϕ in un intorno di (y_0, z_0) è il grafico $\{(g(z), z) : z \in D\}$ di una funzione C^1 in un intorno D di z_0 . Dunque se x_0 è, ad esempio, un massimo locale per f su E_0 significa che esiste $r > 0$ tale che $f(y_0, z_0) \geq f(g(z), z)$ per ogni $z \in D \cap B_r(z_0)$. Dunque dal § 5.11 segue che il gradiente della funzione $z \rightarrow f(g(z), z)$ è nullo in z_0 :

$$\frac{\partial}{\partial z} f(g(z), z)|_{z=z_0} = 0,$$

ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y_0, z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}((y_0, z_0) = 0, \quad (7.24)$$

relazione che, in vista di (7.20), diviene

$$\frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, z_0) \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}(y_0, z_0) \right)^{-1} \frac{\partial\phi}{\partial z}(y_0, z_0). \quad (7.25)$$

Ma questo significa che per $i = 2, \dots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lambda \frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \quad \lambda \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}(x_0) \right)^{-1}. \quad (7.26)$$

Per $i = 1$ la (7.26) è ovviamente vera. ■

La Proposizione appena dimostrata implica immediatamente il seguente

Corollario 7.10 (Metodo dei moltiplicatori di Lagrange)

Siano ϕ e E_0 come nella Definizione 7.8 e sia f una funzione $C^1(E_0)$. Esiste $x_0 \in E_0$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla\phi(x_0)$ se e solo se (x_0, λ_0) è un punto critico per la funzione di $(n+1)$ variabili $F(x, \lambda) \equiv f(x) - \lambda\phi(x)$.

Esempio 7.11 Sia $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i$, $M > 0$ e sia $B \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n x_i = M\}$. L'insieme B è compatto e si vuole determinare il massimo ed il minimo (assoluti) di f su B . Poiché $f \geq 0$ su B , i punti della frontiera in cui una delle coordinate è nulla (e sui quali $f = 0$) sono punti di minimo assoluto. Poiché

$f_{x_j} = \prod_{i \neq j} x_i$, ∇f non si annulla mai all'interno di B ; dunque il massimo di f è raggiunto su $A \equiv \partial B \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \text{ per ogni } i \text{ e } \sum_{i=1}^n x_i = M\}$. Per trovare i punti critici su A usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Sia $F(x, \lambda) \equiv f(x) - \lambda \phi(x)$ con $\phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i - M$. Poichè $F_{x_j} = \prod_{i \neq j} x_i - \lambda$ (e $x_i > 0$ su A) $F_{x_j} = 0$ su A se e solo se $f(x) = \lambda x_j$ per ogni j . Dunque $x_1 = \dots = x_n$. Il massimo è dunque raggiunto su x_0 dove $x_{0j} = M/n$. Vale dunque

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad x_i \geq 0, \quad (7.27)$$

relazione nota come *disuguaglianza aritmetico-geometrica*.

Il metodo sopra esposto si generalizza facilmente al caso di più vincoli ovvero nel caso in cui la funzione ϕ che definisce il vincolo sia una funzione *vettoriale* $\phi \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (con $m < n$) in modo tale che

$$E_0 \equiv \{\phi = 0\} = \bigcap_{i=1}^m \{\phi_i = 0\}.$$

Infatti, l'analogo della Definizione 7.8 è

Definizione 7.12 Sia $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Un punto $x_0 \in E_0 \equiv \{x : \phi(x) = 0\}$ si dice regolare per E_0 se la matrice jacobiana $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0)$ ha rango massimo (e cioè uguale ad m).

A questo punto la Proposizione 7.9 diviene

Proposizione 7.13 Siano ϕ e E_0 come nella Definizione 7.12 e sia f una funzione $C^1(E_0)$. Se x_0 è un punto regolare per E_0 ed è un massimo o un minimo relativo di f su E_0 , allora esiste un vettore $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tale che $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0)\right)^T \lambda$.

La dimostrazione è una ripetizione parola per parola della dimostrazione della Proposizione 7.9 (con la giusta interpretazione dei simboli!). Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange diventa:

Corollario 7.14 (Metodo dei moltiplicatori di Lagrange II) Siano ϕ e E_0 come nella Definizione 7.12 e sia f una funzione $C^1(E_0)$. Esiste $x_0 \in E_0$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ tale che $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0)\right)^T \lambda_0$ se e solo se (x_0, λ_0) è un punto critico per la funzione di $(n+m)$ variabili $F(x, \lambda) \equiv f(x) - \lambda \cdot \phi(x)$.

Esercizi e complementi

E 7.1 Data la funzione $F(y, x) = x^2 + x^4 y^2 + \sin xy$ determinare i punti dove è possibile applicare il Teorema delle Funzioni Implicite.

E 7.2 Sia F la funzione:

$$F(y, x) = x + x^3 y^2 + y + \frac{\sin xy - xy}{x}.$$

Dire se è possibile applicare il Teorema delle funzioni implicite in $(0, 0)$ ed in caso affermativo calcolare $y'(0)$ e $y''(0)$.

E 7.3 Sia $f(x, y) \equiv (\sin(x - y^2), x^4 + \tan y)$. Si enunci il teorema della funzione inversa, si dimostri che f è invertibile in un intorno di $(0, 0)$ e si trovi una sfera su cui è definita la funzione inversa.

E 7.4 (i) Si dica quante funzioni continue $(x, y) \rightarrow z(x, y)$ soddisfano l'equazione $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$ nell'intorno di $(x, y) = (0, 0)$.

(ii) Si calcolino le derivate parziali delle funzioni di cui al punto (i) (sempre in un intorno dell'origine).

E 7.5 Si verifichi che le condizioni (7.6) e (7.7) nel Teorema 7.1 possono essere sostituite da (7.8) e (7.9) con un qualunque $\alpha \in (0, 1)$.

E 7.6 (i) Sia $F(y, x) = y^2 + x^2 - 1$, con $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ e si fissi $(y_0, x_0) = (1, 0)$. Si trovino ρ ed r tali che (7.6) e (7.7) valgano.

(ii) Si dimostri che il valore $r = (1/\sqrt{2})$ è il valore massimo che si può ottenere anche se si usano (7.8) e (7.9) facendo variare $\alpha \in (0, 1)$.

E 7.7 Sia $F : (y, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow F(y, x) \in \mathbb{R}^2$ definita come

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2, x) &= \sin x + e^x y_1 + x \sin(y_1 y_2), \\ F_2(y_1, y_2, x) &= 3|x| + y_2 + y_1^4, \end{aligned} \quad (7.28)$$

e sia $(y_0, x_0) \equiv (y_{01}, y_{02}, x_0) = (0, 0, 0)$. Si dica se il Teorema 7.1 è applicabile in un intorno di (y_0, x_0) e se sì si trovino dei valori di ρ e r per cui (7.6) e (7.7) vengano soddisfatte.

E 7.8 Si consideri la funzione $f : y \in \mathbb{R}^2 \rightarrow f(y) = (f_1(y), f_2(y)) \in \mathbb{R}^2$ definita come

$$f_1 = y_1 + y_1^2 \cos y_2, \quad f_2 = y_2 + y_1^2. \quad (7.29)$$

Si dica se la funzione f è invertibile in un intorno di $y_0 = (0, 0)$ e se sì, si dia una stima di ρ in modo tale che valga (7.22).

C 7.9 Un semplice corollario del teorema della funzione inversa è il seguente

Teorema 7.15 (Teorema della applicazione aperta)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ ed assumiamo che $\det \frac{\partial f}{\partial y}(y) \neq 0$ per ogni $y \in A$. Allora f è una "applicazione aperta", ovvero, per ogni aperto $B \subset A$ l'insieme $f(B) \equiv \{f(y) : y \in B\}$ è un insieme aperto.

Dimostrazione Sia B un sottoinsieme aperto di A e sia $\bar{x} = f(\bar{y})$ per un qualche $\bar{y} \in B$. Per il teorema della funzione inversa, sulla sfera aperta $\overset{\circ}{X}_0$ attorno a $\bar{x}$ è definita l'inversa di f , g , che manda $\overset{\circ}{X}_0$ in $Y_0 \subset B$. Ma questo significa che $\overset{\circ}{X}_0 \subset f(B)$ ovvero che l'insieme $f(B)$ è aperto. ■

E 7.10 Si studi il luogo dei punti $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{2} - \cos x = E\}$ al variare del parametro reale E .

E 7.11 Si mostri con un esempio che l'inclusione $\partial A_{\pm} \subset E_0$ nel punto (iv) della Proposizione 7.7 può essere un'inclusione in senso stretto.

E 7.12 Determinare i valori massimi e minimi assunti dal volume di un parallelepipedo (in $\mathbb{R}^3$) di superficie totale assegnata.

E 7.13 Trovare quale triangolo di perimetro assegnato ha area massima utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

E 7.14 Si discutano i massimi e minimi relativi ed assoluti (qualora esistano) della funzione $f(x, y) = xy^2(x + y - 1)$ nel dominio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$.

E 7.15 Si trovino il massimo ed il minimo di $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i$ sulla sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ $B^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

E 7.16 Sia $M > 0$. Studiare i punti critici di $f = \prod_i x_i$ su $E \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i x_i = M\}$.

E 7.17 Sia $E_0 \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2\}$ e sia K_r il quadrato chiuso di lato $2r$ centrato nell'origine. Dimostrare che nell'intorno di $(0, 0)$ è applicabile il teorema delle funzioni implicite se e solo se non esiste $r > 0$ tale che $E_0 \cap K_r$ possa essere espresso come grafico di una funzione delle x o delle y .

E 7.18 Sia $\varepsilon \geq 0$ e $f(x) \equiv x + \varepsilon g(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e $g \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, dove $D \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. Trovare $\varepsilon_0 > 0$ tale che f sia invertibile (con inversa C^1) su D .

8 Equazioni differenziali ordinarie

8.1 Introduzione

Una equazione differenziale ordinaria è una equazione che coinvolge una funzione (eventualmente vettoriale) di una variabile e le sue derivate.

Esempio 8.1 Un caso semplice è dato dall'equazione

$$u'(t) = f(t) \quad (8.1)$$

ed il problema è: "assegnata $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, trovare funzioni u (derivabili) che soddisfino (8.1)". Se f è una funzione continua su di un intervallo I , $f \in C(I)$, troviamo immediatamente, dal teorema fondamentale del calcolo, che tutte le soluzioni di (8.1) sono date da

$$u(t) = c + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau, \quad (8.2)$$

dove c è una costante arbitraria e t e t_0 sono punti in I . In particolare, se si richiede che u prenda un valore assegnato u_0 all'istante¹ $t = t_0$, l'unica soluzione di (8.1) è data da (8.2) con $c = u_0$.

Esempio 8.2 (Sistemi lineari a coefficienti costanti) Tutte e sole le soluzioni $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ dell'equazione differenziale

$$u' = Au \quad (8.3)$$

con A matrice reale $n \times n$ sono date da $u(t) = e^{At}u_0$ (con $u_0 \in \mathbb{R}^n$). Che tali funzioni risolvano (8.3) è stato già osservato nel § 6.2 [si vedano (6.36) e (6.37)]. Dimostriamo che non vi sono altre soluzioni (in altre parole ogni soluzione derivabile $u(t)$ di (8.3) ha la forma $e^{At}u_0$ per un opportuno $u_0 \in \mathbb{R}^n$). Sia E un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $u \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ una soluzione arbitraria di (8.3). Sia $t_0 \in E$ e definiamo $v(t) = e^{At_0}c$ con $c \equiv e^{-At_0}u(t_0)$ (in modo tale che $u(t_0) = v(t_0)$). Facciamo vedere che u e v debbono coincidere su E . Supponiamo, infatti, per assurdo, che u e v siano diverse cioè che, se chiamiamo $w \equiv u - v$, w non sia identicamente nulla in E . Sia $I \subset E$ il più grande intervallo contenente t_0 per cui $w(t) = 0$ per ogni $t \in I$. Secondo la nostra ipotesi I non coincide con E e quindi almeno uno dei suoi estremi è un punto $\tau \in E$. Poichè $w(t)$ è continua, $w(\tau) = 0$. La funzione w soddisfa $w' = Aw$ e $w(\tau) = 0$. Supponendo che τ sia l'estremo destro di I (il ragionamento nell'altro caso è perfettamente analogo), integriamo la relazione $w' = Aw$ tra τ e $t > \tau$ con $t \leq \tau + \varepsilon$ ed ε sufficientemente piccolo. Allora²

$$|w(t)| = \left| A \int_{\tau}^t w(s) ds \right| \leq \|A\| \left(\sup_{[\tau, \tau+\varepsilon]} |w| \right) \varepsilon \quad (8.4)$$

¹Spesso, nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie, la variabile indipendente viene indicata con t , essendo interpretata come una variabile temporale.

²Si ricordi 5.46 [in particolare il punto (ii) e la (5.142)] e si osservi che, dalla definizione di integrale di funzione vettoriale, segue che $A \int_a^b f(t) dt = \int_a^b A f(t) dt$ (con $A \in \text{Mat}(n \times n)$ e $t \rightarrow f(t) \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$).

ovvero (prendendo l'estremo superiore su $t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$)

$$\sup_{[\tau, \tau + \varepsilon]} |w| \leq \|A\| \varepsilon \sup_{[\tau, \tau + \varepsilon]} |w|$$

il che, se scegliamo ε tale che $\|A\| \varepsilon < 1$, è assurdo a meno che $\sup_{[\tau, \tau + \varepsilon]} |w| = 0$; ma in tal caso si contraddice la definizione di I e dunque I ed E debbono coincidere.

■

Da questa discussione segue anche che il problema “ai valori iniziali”

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad u(t_0) = u_0, \quad (8.5)$$

(dove $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \text{Mat}(n \times n)$ sono assegnati) ammette l'unica soluzione derivabile $u(t) = e^{(t-t_0)A}u_0$.

Esempio 8.3 Troviamo ora tutte le funzioni u (derivabili) che soddisfino l'equazione differenziale

$$u' = u^2. \quad (8.6)$$

Innanzitutto, la funzione identicamente nulla $u \equiv 0$ soddisfa (8.6). Cerchiamo, quindi, altre soluzioni che ad un certo istante t_0 assumano un valore $u_0 \neq 0$. Poiché cerchiamo $u \in C^1$, u sarà in particolare continua; esisterà dunque un intorno di t_0 in cui la $u \neq 0$ e mantiene il segno di u_0 ; dividendo per u^2 (per t in tale intorno) ed integrando tra t_0 e t , otteniamo da (8.6)

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{u^2} u' d\tau = \int_{t_0}^t d\tau = t - t_0. \quad (8.7)$$

Ma da (8.6), vediamo che $u' > 0$ quindi la funzione $t \rightarrow u(t)$ è invertibile, e possiamo cambiare variabile di integrazione nell'integrale a sinistra di (8.7), e se u denota il valore $u(t)$ e u_0 il valore di $u(t)$ al tempo t_0 , otteniamo

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{u^2} u' d\tau = \int_{u_0}^u \frac{1}{v^2} dv = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u} \quad (8.8)$$

e cioè

$$u(t) = \left(t_0 - t + \frac{1}{u_0} \right)^{-1}. \quad (8.9)$$

Si ha, di nuovo, che se il valore $u_0 \neq 0$ è stato assegnato, (8.9) è l'unica soluzione di (8.6) che soddisfi anche $u(t_0) = u_0$. Si noti inoltre che (8.9) è definita per $t \neq \bar{t}$ con $\bar{t} = t_0 + \frac{1}{u_0}$; e quindi l'unica soluzione di (8.6) con “valore iniziale” $u(t_0) = u_0$ è definita per $t < \bar{t}$, se $u_0 > 0$, e per $t > \bar{t}$, se $u_0 < 0$; come abbiamo già osservato, se $u_0 = 0$ la soluzione non è del tipo (8.9) ma è la soluzione identicamente nulla.

Esempio 8.4 Abbiamo visto negli esempi precedenti che, assegnato un “valore iniziale” ovvero assegnato u_0 tale che $u(t_0) \equiv u_0$, si ha un’unica soluzione delle equazioni differenziale (8.1), (8.3) e (8.6). Consideriamo ora il seguente esempio:

$$u' = u^{\frac{2}{3}}, \quad u(0) = 0. \quad (8.10)$$

Si verifica immediatamente che $u(t) \equiv 0$ e $v(t) = \frac{t^3}{27}$ sono entrambe soluzioni di (8.10): in questo esempio dunque *non basta assegnare il dato iniziale per avere una unica soluzione*. Notiamo che la funzione $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ non è molto regolare in³ $x = 0$.

Esempio 8.5 Si consideri l’equazione differenziale che regola l’evoluzione di un “oscillatore armonico”, cioè di un punto materiale di massa m , vincolato a muoversi su una retta, e collegato, tramite una molla perfettamente elastica ad un certo punto prefissato O . Se $x = x(t)$ denota la coordinata del punto al tempo t (e $x = 0$ corrisponde al “polo” O), dalla “legge della dinamica di Newton” (forza = massa $\times$ accelerazione) e dalla “legge di Hooke” sulle forze elastiche si ottiene⁴

$$m\ddot{x} = -kx \quad (8.11)$$

dove $k > 0$ denota la costante di elasticità della molla. Si vede immediatamente che, per ogni a e b (costanti), la funzione $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, con $\omega = \sqrt{k/m}$, è soluzione di (8.11). Se assegniamo, la posizione x_0 e la velocità v_0 dell’oscillatore al tempo $t = 0$, otteniamo la soluzione $x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$. Rimane, per ora, in sospenso la questione se tali soluzioni siano *tutte* le soluzioni di (8.11).

Esempio 8.6 Un altro esempio, assai più complicato del precedente, tratto dalla meccanica, è dato da un sistema di “due pendoli piani accoppiati” la cui evoluzione è regolata dal *sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \sin x_1 &= \varepsilon [\sin(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2)] \\ \ddot{x}_2 + \sin x_2 &= \varepsilon [\sin(x_1 + x_2) - \cos(x_2 - x_1)] \end{aligned} \quad (8.12)$$

Il moto dei pendoli si svolge all’interno di un piano verticale prefissato e $x_1(t), x_2(t)$ misurano, in radianti, lo spostamento, al tempo t , dei pendoli dalla posizione dell’“equilibrio stabile” (ossia del punto più basso che il pendolo possa raggiungere); i parametri dimensionali (accelerazione di gravità, masse dei pendoli, *etc.*) sono stati posti uguali ad 1; $\varepsilon > 0$ è un parametro che misura la taglia di una certa forza di interazione tra i due pendoli. In questo caso *non è possibile descrivere in maniera semplice tutte le soluzioni di (8.12) anche per ε molto piccoli*: la descrizione qualitativa, per tempi lunghi, delle soluzioni di equazioni differenziali del tipo (8.12) è un interessante ed attivo campo di ricerca della analisi matematica.

³ f è analitica nell’intorno di un qualunque $x_0 \neq 0$, è continua su tutto $\mathbb{R}$ ma non è derivabile in $x = 0$.

⁴ Useremo indifferentemente le notazioni $\dot{u}$, u' , $\frac{du}{dt}$, per indicare la derivata di $u(t)$ rispetto a t .

Si definisce **ordine** di una equazione differenziale (o di un sistema di equazioni differenziali), l'ordine massimo con cui appare la derivata della funzione incognita (o di una delle funzioni incognite, nel caso di sistemi). Gli esempi 8.1, 8.2, 8.3 sono dunque esempi di una equazione differenziale del primo ordine; (8.11) è una equazione del secondo ordine, mentre (8.12) è un sistema di due equazioni del secondo ordine.

Una differenza sostanziale fra gli esempi discussi sopra è che 8.1, 8.2, 8.5 sono esempi *lineari*⁵ al contrario di 8.3 e 8.6 che sono *non lineari*.

E' utile notare che tutti gli esempi sopra considerati (e tutti gli esempi che considereremo in seguito) possono essere descritti da *un sistema di equazioni differenziali ordinarie*⁶ del prim'ordine della forma

$$u' = f(u, t) \quad (8.13)$$

dove u ed f saranno, in generale, funzioni di, rispettivamente, 1 ed $n+1$ variabili ed a valori in $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, il sistema (8.12), assume la forma (8.13) se poniamo: $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ ed $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ con $u_1 = x_1$, $u_2 = \dot{x}_1$, $u_3 = x_2$, $u_4 = \dot{x}_2$ e $f_1(u) = u_2$, $f_2(u) = -\sin u_1 + \varepsilon[\sin(u_1 + u_3) + \cos(u_1 - u_3)]$, $f_3 = u_4$, $f_4(u) = -\sin u_3 + \varepsilon[\sin(u_1 + u_3) - \cos(u_3 - u_1)]$. Come secondo importante esempio si consideri l'equazione scalare, lineare ed omogenea di ordine n per la funzione incognita $t \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \quad (8.14)$$

dove $(\cdot)^{(k)}$ denota $\frac{d^k}{dt^k}(\cdot)$ e le $a_i(t)$ sono funzioni continue di t assegnate. Ponendo $u = (u_1, \dots, u_n)$, con $u_1 \equiv x$, $u_2 \equiv x'$, ..., $u_n \equiv x^{(n-1)}$ si verifica subito che (8.14) può essere riscritta come il sistema in $\mathbb{R}^n$ dato da

$$u' = A(t)u, \quad \text{con} \quad A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Abbiamo visto, negli esempi 8.1÷8.3 che se assegnamo il valore iniziale $u(t_0)$ della funzione incognita si ottiene una unica soluzione. In generale, il problema di trovare una $u \in C^1(\{t_0\}, \mathbb{R}^n)$ che verifichi, per t in un intorno di t_0 il sistema

$$u' = f(u, t), \quad u(t_0) = u_0 \quad (8.16)$$

⁵Le funzioni incognite e le loro derivate appaiono linearmente nelle equazioni; inoltre la (8.3) è lineare ed *omogenea*, cioè non vi è compare un "termine noto".

⁶L'aggettivo "ordinarie" si riferisce al fatto che la variabile indipendente è una, cosicché compaiono solo le derivate "ordinarie" delle funzioni incognite. Al contrario, un'equazione per la funzione incognita $u(x_1, x_2)$ del tipo: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \sin u$ è un esempio di equazione differenziale *alle derivate parziali*.

per una data⁷ $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed un dato vettore u_0 in $\mathbb{R}^n$, prende il nome **problema di Cauchy** o **problema ai valori iniziali** per la funzione incognita u .

8.2 Un teorema “generale” di esistenza ed unicità

Abbiamo visto nell'Esempio 8.4 che se la funzione f non è abbastanza regolare si possono trovare più soluzioni del problema di Cauchy $u' = f(u)$, $u(0) = u_0$. La classe funzionale “giusta” nel nostro contesto è la classe delle funzioni lipschitziane⁸ di cui ricordiamo la definizione:

Definizione 8.7 Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *lipschitziana* in $y \in A$, se esistono due numeri positivi L e δ tali che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad (8.17)$$

per ogni $x \in A$ con $|x - y| \leq \delta$. Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *uniformemente lipschitziana* in A se esiste $L > 0$ tale che (8.17) valga per ogni x e y in A .

Naturalmente una funzione lipschitziana su A è ivi continua⁹. Esempi di funzioni uniformemente lipschitziane su una m -sfera chiusa, $D = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x_0| \leq r\}$, sono tutte le funzioni $C^1(D, \mathbb{R}^n)$, e come costante di Lipschitz si può prendere $L = \max_{x \in D} \|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\|$. Possiamo ora enunciare il seguente *teorema di esistenza ed unicità per soluzioni di sistemi di equazioni differenziali* la cui dimostrazione sarà una immediata conseguenza del teorema di punto fisso del § 6.

Teorema 8.8 Siano r, T_0 due numeri positivi e sia $f \in C(D \times I, \mathbb{R}^n)$, dove $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - u_0| \leq r\}$ e $I = [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$. Assumiamo che esista $L > 0$ tale che

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in D, \quad \forall t \in I. \quad (8.18)$$

Sia $M \geq \max_{D \times I} |f(x, t)|$ e sia $T \leq T_0$ tale che

$$TL < 1, \quad TM \leq r, \quad (8.19)$$

allora esiste una ed una sola soluzione $u \in C^1([t_0 - T, t_0 + T], D)$ che soddisfi (8.16).

Si noti che l'ipotesi (8.18) dice che $f(\cdot, t)$ è uniformemente lipschitziana in D e che la costante di Lipschitz può essere scelta *indipendente da t* in I .

Dimostrazione Innanzitutto osserviamo che il problema di Cauchy (8.16) ovvero il problema di trovare una funzione u di classe C^1 in un intorno I di t_0 che soddisfi

⁷Ipotesi opportune sulla f , che garantiscano la risolubilità di (8.16), verranno date in seguito.

⁸Per informazioni sulle funzioni lipschitziane dal punto di vista degli spazi di Banach si veda 6.12.

⁹Ovviamente non è vero il viceversa: $x \in \mathbb{R} \rightarrow |x|^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$ è continua in 0 ma non è ivi lipschitziana.

(8.16) è *equivalente* al problema di trovare una funzione $u \in C(I)$ che verifichi la seguente *equazione integrale*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(u(\tau), \tau) d\tau. \quad (8.20)$$

Infatti (8.20) si ottiene immediatamente da (8.16) integrando ambo i membri di (8.16) tra t_0 e t , mentre se vale (8.20) si ha che $u(t_0) = u_0$ e dal teorema fondamentale del calcolo (applicato componente per componente) segue che $u \in C^1$ e che $u' = f(u(t), t)$.

Sia ora $E \equiv C(I_0, D)$ con $I_0 \equiv [t_0 - T, t_0 + T]$. Come osservato nel corso della dimostrazione del teorema delle funzioni implicite, E è un sottoinsieme chiuso e non vuoto dello spazio di Banach $C(I_0, \mathbb{R}^n)$ dotato della norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Su E definiamo la seguente trasformazione

$$v \in E \rightarrow \phi(v): \quad \phi(v)(t) \equiv u_0 + \int_{t_0}^t f(v(\tau), \tau) d\tau. \quad (8.21)$$

Per il teorema fondamentale del calcolo $\phi(v) \in C(I_0, \mathbb{R}^n)$. Inoltre da (8.18) segue che, per ogni $v, w \in E$ e per ogni $t \in I_0$,

$$\begin{aligned} |\phi(v)(t) - \phi(w)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(v(\tau), \tau) - f(w(\tau), \tau)] d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(v(\tau), \tau) - f(w(\tau), \tau)| d\tau \right| \\ &\leq LT \|v - w\|_\infty. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Prendendo l'estremo superiore su I_0 di tale relazione, si ottiene

$$\|\phi(v) - \phi(w)\|_\infty \leq LT \|v - w\|_\infty. \quad (8.23)$$

Quindi, poiché per definizione di T , $LT < 1$, ϕ è una contrazione. Inoltre per come è stato definito M , per ogni $v \in E$ e per ogni $t \in I_0$ si ha $v(t) \in D$ e

$$|\phi(v)(t) - u_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(v(\tau), \tau)| d\tau \right| \leq MT \leq r. \quad (8.24)$$

Prendendo l'estremo superiore su $t \in I_0$ si ha che $\|\phi(v) - u_0\|_\infty \leq r$, il che significa che ϕ manda E in sé stesso. L'asserto segue ora dal teorema delle contrazioni e dall'osservazione iniziale. ■

Osservazione 8.9 Usando direttamente lo schema iterativo descritto nella dimostrazione del teorema di punto fisso (ma senza usare l'enunciato di tale teorema) si ottengono stime migliori sui tempi di esistenza locale. Si può infatti dimostrare¹⁰ che il Teorema 8.8 vale *senza l'ipotesi* $TL < 1$. Dunque il tempo di esistenza può essere definito come $T \equiv \min\{T_0, r/M\}$.

¹⁰Esercizio 8.18.

8.3 Dipendenza dai dati iniziali

Il Teorema 8.8 fornisce un'unica soluzione (locale nel tempo) di (8.16). L'unicità deriva dall'aver fissato il valore iniziale $u_0 = u(t_0)$. Quindi la soluzione dipende da u_0 ; per sottolineare tale dipendenza, chiameremo $\varphi(t; u_0)$ la soluzione di (8.16). Quindi¹¹

$$\varphi(t_0; u_0) = u_0, \quad \partial_t \varphi = f(\varphi, t). \quad (8.25)$$

Una questione assai importante, anche dal punto di vista pratico, è come dipendono le soluzioni di (8.16) dai dati iniziali. E' infatti augurabile che se il dato iniziale u_0 è vicino ad un certo valore $\bar{u}$, così siano anche le relative soluzioni, $\varphi(t; u_0)$ e $\varphi(t; \bar{u})$, almeno per tempi brevi. Infatti si ha il seguente risultato.

Proposizione 8.10 *Data f come nel Teorema 8.8, siano $s > 0$ e $D_0 \subset D$ una sfera chiusa tali che per ogni $\bar{u} \in D_0$ esista una funzione $C^1([t_0 - s, t_0 + s], D)$ $t \rightarrow \varphi(t; \bar{u})$, che soddisfi $\partial_t \varphi = f(\varphi, t)$ e $\varphi(t_0; \bar{u}) = \bar{u}$. Allora la funzione $\bar{u} \in D \rightarrow \varphi(t; \bar{u})$ è lipschitziana con costante di Lipschitz $e^{L|t-t_0|}$:*

$$|\varphi(t; \bar{u}) - \varphi(t; u_0)| \leq e^{L|t-t_0|} |\bar{u} - u_0|, \quad \forall t \in I, \quad \forall \bar{u}, u_0 \in D_0, \quad (8.26)$$

dove $I \equiv [t_0 - s, t_0 + s]$.

In particolare $\varphi(t; \bar{u})$ è continua come funzione di $\bar{u}$. Infatti è facile vedere che φ è uniformemente lipschitziana (e quindi continua) come funzione di $(1+n)$ variabili¹².

Per dimostrare la proposizione abbiamo bisogno del seguente risultato.

Lemma 8.11 (Gronwall) *Sia I un intervallo, $\delta, \alpha \in (0, \infty)$ e $g \in C(I)$ una funzione continua e positiva tale che, per un qualche $t_0 \in I$,*

$$g(t) \leq \delta + \alpha \left| \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right|, \quad \forall t \in I. \quad (8.27)$$

Allora, per ogni $t \in I$, si ha

$$g(t) \leq \delta e^{\alpha|t-t_0|}. \quad (8.28)$$

¹¹Si noti che, sebbene in (8.25) appaia il segno di derivata parziale $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, essendo φ una funzione di $(1+n)$ variabili, l'equazione differenziale in (8.25), è naturalmente una equazione ordinaria e non una equazione alle derivate parziali, (perché le altre derivate parziali di φ non appaiono nell'equazione differenziale).

¹²Da (8.26), se $M = \sup_{D \times I} |f|$, si ha

$$\begin{aligned} |\varphi(t; u) - \varphi(\bar{t}; \bar{u})| &\leq |\varphi(t; u) - \varphi(\bar{t}; u)| + |\varphi(\bar{t}; u) - \varphi(\bar{t}; \bar{u})| = \left| \int_{\bar{t}}^t \partial_t \varphi(\tau; u) d\tau \right| + e^{Ls} |\bar{u} - u| \\ &= \left| \int_{\bar{t}}^t f(\varphi(\tau; u), \tau) d\tau \right| + e^{Ls} |\bar{u} - u| \leq |t - \bar{t}| M + e^{Ls} |\bar{u} - u|. \end{aligned}$$

Dimostrazione Supponiamo prima che $t \geq t_0$. Sia $G(t) \equiv \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau$; allora $G \in C^1(I)$ e $G(t_0) = 0$ ed, in più, dal teorema fondamentale del calcolo e da (8.27), consegue

$$G' = g \leq \delta + \alpha G. \quad (8.29)$$

Moltiplicando tale relazione per $e^{-\alpha t}$, vediamo che essa è equivalente alla disegualianza

$$(Ge^{-\alpha t})' \leq \delta e^{-\alpha t}. \quad (8.30)$$

Integrando (8.30) tra t_0 e t e ricordando che $G(t_0) = 0$ si ottiene

$$G(t)e^{-\alpha t} \leq \delta \frac{e^{-\alpha t_0} - e^{-\alpha t}}{\alpha}, \quad (8.31)$$

ovvero $G \leq \delta \alpha^{-1}(e^{\alpha(t-t_0)} - 1)$. Ricordando che $g \leq \delta + \alpha G$, si ottiene l'asserto (quando $t \geq t_0$). Nel caso $t < t_0$, si ha che $g(t) \leq \delta + \alpha \int_t^{t_0} g(\tau) d\tau$, e ponendo, come prima, $G(t) \equiv \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau = -\int_t^{t_0} g(\tau) d\tau$, si ottiene che $G' = g \leq \delta - \alpha G$ che è equivalente a $(Ge^{\alpha t})' \leq \delta e^{\alpha t}$. Integrando tale relazione tra t e t_0 , si ottiene $-G\alpha \leq \delta[e^{\alpha(t_0-t)} - 1]$ da cui segue che $g \leq \delta e^{\alpha(t_0-t)} = \delta e^{\alpha|t-t_0|}$. ■

Dimostrazione (della Proposizione 8.10) Ricordando che risolvere (8.16) è equivalente a risolvere

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(u(\tau), \tau) d\tau \quad (8.32)$$

e per l'ipotesi di lipschitzianità di f , si ha, per ogni $\bar{u}, u_0 \in D_0$,

$$\begin{aligned} |\varphi(t; \bar{u}) - \varphi(t; u_0)| &= |\bar{u} - u_0 + \int_{t_0}^t [f(\varphi(\tau; \bar{u}), \tau) - f(\varphi(\tau; u_0), \tau)] d\tau| \\ &\leq |\bar{u} - u_0| + L \left| \int_{t_0}^t |\varphi(\tau; \bar{u}) - \varphi(\tau; u_0)| d\tau \right|. \end{aligned} \quad (8.33)$$

La (8.26) segue immediatamente dal lemma di Gronwall. ■

Da (8.26) segue che due soluzioni inizialmente vicine potrebbero allontanarsi l'una dall'altra, per $t > t_0$, ad un tasso *esponenziale*. Ed in effetti tale fenomeno può realmente accadere: basti pensare al caso scalare $u' = au$ con $a > 0$. Allora $\varphi(t; u_0) = e^{at}u_0$ e $|\varphi(t; u_0) - \varphi(t; 0)| = e^{at}|u_0|$. Questa semplice osservazione mostra anche che la costante lipschitziana in (8.26) è ottimale.

Osservazione 8.12 La Proposizione 8.10 può essere estesa in vari modi; ad esempio si ha¹³

Se f è continua in un intorno di (u_0, t_0) e se è $x \rightarrow f(x, t) \in C^k(\{u_0\})$ allora φ è $C^k(u_0, t_0)$.

¹³Esercizio 8.19.

8.4 Intervalli di esistenza

Consideriamo una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed un punto $(u_0, t_0) \in \overset{\circ}{A}$. Se, in un intorno di (u_0, t_0) , f risulta continua (come funzione di (x, t)) e lipschitziana (in x uniformemente in t), sappiamo che esiste una ed una sola soluzione $u(t)$ di (8.16). A priori tale funzione $u(t)$ è definita solo localmente in t cioè in un intorno sufficientemente piccolo di t_0 . E' naturale chiedersi "quanto" possiamo estendere tale soluzione. Più precisamente poniamo la seguente

Definizione 8.13 *Data una funzione f definita su di un insieme $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ed a valori in $\mathbb{R}^n$, definiamo $\mathcal{D}_f$ l'insieme (aperto) dei punti $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$ tali che esista una sfera chiusa $D \subset A$ centrata in $\bar{x}$ ed un intervallo chiuso I centrato¹⁴ in $\bar{t}$, per cui $f \in C(D \times I)$ e per cui valga (8.18). Sia $(u_0, t_0) \in \mathcal{D}_f$ e sia $u(t)$, con $t \in [t_0 - s, t_0 + s]$ (per un qualche $s > 0$) una soluzione C^1 di (8.16); definiamo $I_f(t_0; u_0)$ come il più grande intervallo aperto contenente t_0 tale che: (i) esista una estensione C^1 di $u(t)$ a tutto¹⁵ $I_f(t_0; u_0)$; (ii) per ogni $\tau \in I_f(t_0; u_0)$, $(u(\tau), \tau) \in \mathcal{D}_f$.*

Se $(u_0, t_0) \in \mathcal{D}_f$, per il Teorema 8.8 esiste una ed una sola soluzione $u \in C^1(I)$, quindi il fatto che per ogni $\tau \in I_f(t_0; u_0)$ si abbia $(u(\tau), \tau) \in \mathcal{D}_f$ implica che u soddisfa l'equazione differenziale $u' = f(u, t)$ su tutto l'intervallo $I_f(t_0; u_0)$. Quindi $I_f(t_0; u_0)$ è il più grande intervallo per cui esista una (ed una sola) soluzione di (8.16). La soluzione $u(t)$ di (8.16) definita per $t \in I_f(t_0; u_0)$ viene a volte chiamata la **soluzione massimale** (rispetto al dato iniziale assegnato).

La seguente proposizione dà un criterio sufficiente su f affinché $I_f(t_0; u_0)$ coincida con tutto $\mathbb{R}$.

Proposizione 8.14 *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ e supponiamo che esista una costante $c > 0$ per cui*

$$|f(x, t)| \leq c(1 + |x|), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (8.34)$$

Allora per ogni $(u_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ esiste una ed una sola soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ del sistema (8.16).

Dimostrazione Si osservi che poiché $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ si ha che $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{n+1}$. Fissiamo $(u_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e, procedendo per assurdo, supponiamo che $I_f(t_0; u_0) \equiv (a, b) \neq \mathbb{R}$ cioè che o $a > -\infty$ o $b < \infty$. Consideriamo il caso $b < \infty$ (l'altro caso si tratta in maniera del tutto analoga). Sia $u(t)$ la soluzione massimale su $I_f(t_0; u_0)$. Facciamo innanzitutto vedere che $u(t)$ rimane limitata quando $t \rightarrow b$. Poiché $u(t)$ verifica (8.20), dalla (8.34) segue che $|u(t)|$ soddisfa, per $t_0 \leq t < b$,

$$|u(t)| \leq \delta + c \int_{t_0}^t |u(\tau)| d\tau, \quad (8.35)$$

¹⁴Cioè esistono $r, s > 0$ tali che $D = \{x : |x - \bar{x}| \leq r\}$, e $I = [\bar{t} - s, \bar{t} + s]$.

¹⁵Questo significa che esiste una funzione $\bar{u} \in C^1(I_f(t_0; u_0))$ tale che $\bar{u}(t) = u(t)$ per ogni t in $(t_0 - s, t_0 + s)$; per semplicità indicheremo tale estensione ancora con la lettera u .

con $\delta \equiv |u_0| + (b - t_0)c$. Quindi, dal Lemma di Gronwall (con $\alpha = c$) segue che

$$\sup_{t_0 \leq t < b} |u(t)| \leq \delta e^{c|b-t_0|} \equiv R < \infty. \quad (8.36)$$

Sia ora

$$T_0 \equiv b - t_0, \quad L \equiv \sup_{\bar{B}_{2R} \times [t_0 - T_0, t_0 + T_0]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right|. \quad (8.37)$$

Fissiamo $t_0 < \bar{t} < b$ e $\bar{u} \equiv u(\bar{t})$. Si noti che se

$$D \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \bar{u}| \leq R\}, \quad (8.38)$$

da (8.36) segue che $D \subset \bar{B}_{2R}$ e quindi che

$$\sup_{D \times [\bar{t} - T_0, \bar{t} + T_0]} |f(x, t)| \leq c(1 + 2R) \equiv M. \quad (8.39)$$

Inoltre, con L definito in (8.37) vale la (8.18). Se scegliamo

$$T \equiv \min \left\{ \frac{1}{2L}, \frac{R}{c(1 + 2R)} \right\},$$

vediamo che le condizioni (8.19) del Teorema 8.8 (con dati iniziali $\bar{t}$ e $u(\bar{t}) = \bar{u}$) sono verificate e che T non dipende da $\bar{u}$ e $\bar{t}$. Prendendo $\bar{t}$ tale che $b - \bar{t} < T/2$ arriviamo ad una contraddizione (perché potremmo estendere la soluzione per valori di $t > b$ contraddicendo la definizione di $I_f(t_0; u_0)$). ■

Come applicazione consideriamo l'equazione lineare non omogenea

$$u' = A(t)u + b(t), \quad u(t_0) = u_0 \quad (8.40)$$

dove $A \in C(\mathbb{R}, \text{Mat}(n \times n))$ e $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ con¹⁶

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| \leq \alpha, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |b(t)| \leq \beta, \quad (8.41)$$

per qualche costante α e β . Naturalmente $f(x, t) \equiv A(t)x + b(t)$ è uniformemente lipschitziana in x con costante di Lipschitz α : $|f(x, t) - f(y, t)| = |A(t)(x - y)| \leq \|A(t)\| |x - y| \leq \alpha |x - y|$. Inoltre, se definiamo $c = \max\{\alpha, \beta\}$, otteniamo

$$|A(t)x + b(t)| \leq \|A(t)\| |x| + |b(t)| \leq \alpha |x| + \beta \leq c(1 + |x|). \quad (8.42)$$

Quindi, per la Proposizione 8.14, esiste per tutti i tempi una ed una sola soluzione $u(t)$ di (8.40) di classe $C^1(\mathbb{R})$.

In particolare, se A è indipendente dal tempo e $b = 0$, (8.41) è sempre verificata e possiamo prendere $\alpha = \|A\|$, $\beta = 0$, $c = \|A\|$.

¹⁶Cioè A è una matrice $n \times n$ i cui elementi di matrice sono funzioni continue su $\mathbb{R}$ e b è un vettore le cui componenti sono funzione continue su $\mathbb{R}$.

Osservazione 8.15 Si noti che la Proposizione 8.14 può essere facilmente estesa al caso in cui f non sia definita su tutto $\mathbb{R}^{n+1}$. Ad esempio, consideriamo (8.40) con $A(t)$ e $b(t)$ continue su di un intervallo aperto (a, b) . Allora per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo $A(t)$ e $b(t)$ saranno continue e limitate su $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Con ragionamenti analoghi a quelli usati nella dimostrazione della Proposizione 8.14 si vede facilmente che le soluzioni di (8.40) sono estendibili a tutto $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ e, quindi, per l'arbitrarietà di ε , esse sono estendibili a (a, b) .

8.5 Struttura delle soluzioni di sistemi lineari

Consideriamo il **sistema lineare omogeneo**

$$u' = A(t)u, \quad (8.43)$$

con $A(t)$ matrice $(n \times n)$ con elementi a_{ij} che siano funzioni continue su di un intervallo¹⁷ I . In virtù dell'Osservazione 8.15 sappiamo che le soluzioni di (8.43) sono definite (ed uniche) in tutto l'intervallo I . Sebbene, in generale, non sia possibile risolvere esplicitamente sistemi lineari (a coefficienti variabili), non è difficile descrivere la struttura della classe delle soluzioni di tali sistemi.

Se u e v sono due soluzioni di (8.43), lo è anche la combinazione lineare $au(t) + bv(t)$ per ogni valore complesso delle costanti¹⁸ a e b .

Definizione 8.16 k soluzioni di (8.43), $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}$, si dicono *linearmente dipendenti* in I se esistono k numeri complessi non tutti nulli, $a_1, a_2, \dots, a_k$ tali che la funzione vettoriale $t \rightarrow \sum_{j=1}^k a_j u^{(j)}(t)$ è identicamente nulla in I .

Osservazione 8.17 Nel caso in cui (8.43) descriva un'equazione scalare di grado n , si vede subito che la Definizione 8.16 è equivalente a richiedere che la funzione scalare $t \rightarrow \sum_{j=1}^k a_j u_1^{(j)}(t)$ (con $u_1^{(j)}(t)$ soluzione dell'equazione scalare) è identicamente nulla in I .

Osservazione 8.18 Supponiamo che $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}$ siano k soluzioni di (8.43), tali che $\sum_{j=1}^k a_j u^{(j)}(t_0) = 0$ per un $t_0 \in I$ e per qualche scelta di costanti $a_1, \dots, a_k$ non tutte nulle. Allora la funzione $t \rightarrow v(t) \equiv \sum_{j=1}^k a_j u^{(j)}(t)$ è soluzione di (8.43) con dato iniziale nullo, $v(t_0) = 0$. Quindi, poiché anche la funzione identicamente nulla soddisfa il medesimo problema di Cauchy¹⁹, per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy si ha che $v \equiv 0$ in I , cioè $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}$ sono *linearmente dipendenti*.

¹⁷I casi $I = \mathbb{R}$ o $I = (-\infty, b)$, $I = (a, \infty)$ sono ammissibili.

¹⁸ La funzione complessa $z(t) = u(t) + iv(t)$ (con u e v funzioni $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, I intervallo di $\mathbb{R}$) è soluzione di (8.43) se lo sono sia $u(t)$ che $v(t)$ (il che è equivalente a definire $z'(t) = u' + iv'$ che, a sua volta, coincide con il limite del rapporto incrementale $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h}$ con h reale); per maggiori informazioni sulle funzioni complesse di variabile reale si veda 1.25.

¹⁹Cioè (8.43) e $u(t_0) = 0$.

Il prossimo risultato ci dice che non ci possono essere più di n soluzioni indipendenti²⁰.

Proposizione 8.19 *Siano $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$, n soluzioni indipendenti di (8.43). Allora per ogni soluzione u di (8.43) esistono $a_j \in \mathbb{C}$ tali che $u = \sum_{j=1}^n a_j u^{(j)}$.*

Prima di dimostrare questa affermazione, facciamo delle osservazioni notazionali. Date n soluzioni $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$ di (8.43), formiamo la matrice che ha come colonne le componenti delle $u^{(j)}$:

$$U(t) = [u^{(1)}, \dots, u^{(n)}] \quad \text{cioè} \quad U_{ij} = u_i^{(j)}. \quad (8.44)$$

Allora

$$AU = A[u^{(1)}, \dots, u^{(n)}] = [Au^{(1)}, \dots, Au^{(n)}] \quad (8.45)$$

infatti, se $A = (a_{ij})$: $(AU)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} U_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} u_k^{(j)} = (Au^{(j)})_i$. Quindi la matrice $U(t)$ soddisfa

$$U' = [u^{(1)'}, \dots, u^{(n)'}] = [Au^{(1)}, \dots, Au^{(n)}] = AU.$$

Inoltre, $\det U \neq 0$ se e solo se le soluzioni $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ sono linearmente indipendenti e per l'Osservazione 8.18 questo accade se e solo se $\det U(t_0) \neq 0$ per un qualche $t_0 \in I$. Infine notiamo che se $c \in \mathbb{C}^n$ allora

$$U(t)c = \sum_{j=1}^n c_j u^{(j)}(t) \quad (8.46)$$

come si vede subito calcolando la i -esima componente dei vettori a sinistra e a destra di tale relazione.

Dimostrazione (della Proposizione 8.19) Poiché $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ sono linearmente indipendenti, per una delle osservazioni fatte sopra, segue che la matrice $U(t)$ è invertibile per ogni $t \in I$. Sia $u(t)$ soluzione di (8.43) con $u(t_0) = u_0$ e sia $v(t) = U(t)c$ con $c = U(t_0)^{-1}u_0$. Allora per (8.46) $v(t)$ è soluzione di (8.43) e $v(t_0) = u_0$. Quindi per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy si ha che $v(t) = u(t)$ per ogni $t \in I$. ■

Definizione 8.20 *Una matrice $U(t) \equiv [u^{(1)}, \dots, u^{(n)}]$ non singolare²¹ che soddisfi $U' = AU$ si chiama matrice fondamentale (per il sistema (8.43)); la funzione $w(t) \equiv \det U$ prende il nome di "wronskiano" (della matrice U o delle soluzioni $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$); una matrice fondamentale per (8.43) tale che $U(t_0) = I_n$ (dove I_n è la matrice identità) si chiama soluzione fondamentale di (8.43) (relativa al tempo t_0).*

²⁰ k soluzioni di (8.43), $\{u^{(j)}\}$, saranno linearmente indipendenti in I se $\sum_{j=1}^k a_j u^{(j)}(t) = 0$ implica che $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

²¹ Cioè con $\det U \neq 0$.

Dunque se U è una matrice fondamentale, la soluzione fondamentale di (8.43) rispetto al tempo t_0 è data da $V(t) = U(t)U(t_0)^{-1}$ ed in termini della soluzione fondamentale V , la soluzione di (8.43) con $u(t_0) = u_0$, è data semplicemente da $V(t)u_0$.

Osservazione 8.21 Matrici fondamentali, ovvero n soluzioni indipendenti di (8.43) esistono sempre: siano $u^{(j)}(t)$ le soluzioni di

$$u' = A(t)u, \quad u(t_0) = e^{(j)} \quad (8.47)$$

dove $e^{(j)}$ è il versore in $\mathbb{R}^n$ che ha come componenti tutti 0 tranne la j -esima componente che è 1. L'esistenza e l'unicità su tutto I di tali soluzioni è garantito dal Teorema 8.8 e dalla Osservazione 8.15. Allora $V(t) \equiv [u^{(1)}, \dots, u^{(n)}]$ è la soluzione fondamentale di (8.43).

Osservazione 8.22 Dalla Proposizione 8.19 e dall'osservazione precedente segue che *l'insieme di tutte le soluzioni di (8.43) formano uno spazio vettoriale di dimensione n ed una base di tale spazio vettoriale è data da n soluzioni indipendenti $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ (per esempio dalle soluzioni di (8.47)).*

L'analisi fatta per i sistemi omogenei può essere usata per discutere i **sistemi lineari non omogenei**

$$u' = A(t)u + b(t) \quad (8.48)$$

con $A(\cdot)$ e $b(\cdot)$ funzioni continue su I a valori, rispettivamente, in $\text{Mat}(n \times n)$ ed in $\mathbb{R}^n$. Ancora per l'Osservazione 8.15, sappiamo che, per ogni u_0 esiste una ed una sola soluzione in tutto l'intervallo I di (8.48) con $u(t_0) = u_0$. Per risolvere il problema di Cauchy per (8.48) (cioè (8.40)) *dobbiamo conoscere la soluzione fondamentale²² del problema omogeneo $u' = A(t)u$ ed una qualunque soluzione particolare di (8.48)*. Supponiamo infatti che V sia la soluzione fondamentale di $u' = Au$ e che $p(t)$ sia una qualunque soluzione di (8.48), allora si verifica immediatamente che

$$u(t) = p(t) + V(t)(u_0 - p(t_0)) \quad (8.49)$$

è la soluzione di (8.40).

Nel caso particolare in cui A sia indipendente dal tempo, la soluzione fondamentale (relativa a t_0) è $V(t) = e^{A(t-t_0)}$ e la soluzione di

$$u' = Au + b(t), \quad u(t_0) = u_0$$

è data da

$$u(t) = e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} b(\tau) d\tau + e^{A(t-t_0)} u_0. \quad (8.50)$$

²²Si ricordi che conoscere la soluzione fondamentale V di (8.43) è equivalente a conoscere una qualunque matrice fondamentale U essendo queste legate da $V(t) = U(t)U(t_0)^{-1}$.

Esercizi e complementi

E 8.1 Si dimostri che se u è soluzione di (8.5) allora vale la stima $|u(t)| \leq \|u_0\| e^{\|A\| |t|}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

C 8.2 (Equazioni lineari a coefficienti costanti II) Si consideri l'equazione differenziale scalare di ordine n a coefficienti costanti

$$Lx \equiv x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0; \quad (8.51)$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ (o anche²³ $a_i \in \mathbb{C}$).

(i) Se

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \quad (8.52)$$

è facile vedere che $P(\lambda) = \det(\lambda - A)$ dove A è la matrice definita in (8.15). $P(\lambda)$ prende il nome di **polinomio caratteristico** dell'equazione (8.51).

(ii) Poichè $\frac{d^j}{dt^j} e^{\lambda t} = \lambda^j e^{\lambda t}$ si ha che, se λ_0 è una radice (in generale complessa) di $P = 0$ (ovvero se $P(\lambda_0) = 0$) allora $e^{\lambda_0 t}$ è soluzione di (8.51). Infatti $L(e^{\lambda_0 t}) = P(\lambda_0)e^{\lambda_0 t} = 0$.

(iii) Si dice che λ_0 è una radice di ordine m di $P = 0$ se esiste un polinomio (a coefficienti complessi) $g(\lambda)$ tale che $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda)$ e $g(\lambda_0) \neq 0$.

Allora, se λ_0 è una radice di ordine m di $P = 0$, $t^j e^{\lambda_0 t}$ è soluzione di (8.51) per ogni $0 \leq j \leq m$. Infatti, se $z(t; \lambda) \equiv e^{\lambda t}$ allora

$$Lz = z P(\lambda) = z (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda),$$

e l'asserto si ottiene derivando rispetto a λ (e calcolando in λ_0) tale relazione.

Da (ii), (iii) e dal teorema fondamentale dell'algebra²⁴ segue che vi sono n soluzioni distinte della forma $t^j e^{\lambda t}$ di (8.51) dove se λ è una radice semplice di $P(\lambda) = 0$ allora $j = 0$, mentre se λ è una radice di ordine $m \leq n$, allora $0 \leq j \leq m$.

Se λ è una radice di ordine m di $P = 0$ e se i coefficienti a_i sono reali allora anche $\bar{\lambda}$ è una radice di ordine m . Dunque²⁵ $L(t^j e^{\bar{\lambda} t}) = 0$ ovvero anche $t^j e^{\bar{\lambda} t}$ è soluzione di (8.51). Poichè l'equazione (8.51) è lineare si che, se $z \equiv t^j e^{\lambda t}$, anche $(z + \bar{z})/2 \equiv \operatorname{Re}(z)$ e $(z - \bar{z})/(2i) \equiv \operatorname{Im}(z)$ sono soluzioni. In altri termini, se $\lambda \equiv \alpha + i\beta$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) è una radice di ordine m di $P = 0$, sono soluzioni di (8.51) le $2m$ funzioni reali $t^j e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $t^j e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ per $0 \leq j \leq m$.

(iv) Poichè le soluzioni $t^j e^{\lambda t}$ (al variare di j e λ) sono tra loro indipendenti, da § 8.5 segue che tutte le soluzioni di (8.51) sono delle combinazioni lineari delle funzioni $t^j e^{\lambda t}$ (ovvero, nel caso $a_i \in \mathbb{R}$, sono delle combinazioni lineari di $t^j e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $t^j e^{\alpha t} \sin(\beta t)$).

E 8.3 Si dimostri l'affermazione fatta nell'Osservazione 8.17.

E 8.4 Dimostrare che se $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ con D sfera chiusa in $\mathbb{R}^n$, allora f è uniformemente lipschitziana in D e come costante di Lipschitz può prendersi

$$L = \sup_{x \in D} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right\|. \quad (8.53)$$

²³Si ricordi la nota 18.

²⁴Se $P(z)$ è un polinomio complesso di ordine n , l'equazione $P(z) = 0$ ha n soluzioni in $\mathbb{C}$ (contando le molteplicità).

²⁵Si ricordi che $\overline{e^\alpha} = e^{\bar{\alpha}}$.

E 8.5 Si dimostri che le funzioni

$$u_1(t) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ t^3/27, & \text{se } t > 0, \end{cases} \quad u_2(t) \equiv \begin{cases} t^3/27, & \text{se } t \leq 0, \\ 0, & \text{se } t > 0, \end{cases} \quad (8.54)$$

sono (altre) soluzioni di (8.10).

C 8.6 (Equazioni a variabili separabili) Si consideri l'equazione differenziale (scalare)

$$u' = f(u)g(t), \quad u(t_0) = u_0, \quad (8.55)$$

dove f è una funzione continua in un intorno di u_0 e g è una funzione continua in un intorno di t_0 .

(i) Se $f(u_0) = 0$, $u(t) \equiv u_0$ è soluzione di (8.55) e se assumiamo in più che f sia lipschitziana in u_0 , allora $u(t) \equiv u_0$ è l'unica soluzione di (8.55).

(ii) Assumiamo ora che $f(u_0) \neq 0$. Poiché la funzione f è continua e la funzione u è C^1 , esiste un intorno di t_0 tale che $f(u(t)) \neq 0$ e mantiene il segno di u_0 . Dividendo, in (8.55) per $f(u)$ otteniamo

$$\frac{u'}{f(u)} = g(t) \quad (8.56)$$

integrando fra t_0 e t , usando il teorema del cambio di variabili per integrali in $\mathbb{R}$, e ricordando che $u(t_0) = u_0$, otteniamo

$$\int_{t_0}^t \frac{u'(\tau)}{f(u(\tau))} d\tau = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{f(v)} dv = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau. \quad (8.57)$$

D'altra parte la funzione $F(u) \equiv \int_{u_0}^u \frac{1}{f(v)} dv$ è C^1 e $F'(u_0) = \frac{1}{f(u_0)} \neq 0$ dunque F è invertibile. Quindi l'unica soluzione di (8.55) è data da $G(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau)$ dove G denota la funzione inversa di F .

E 8.7 (Equazioni scalari, lineari del prim'ordine) Si dimostri che se $a(t)$ e $b(t)$ sono due funzioni continue sull'intervallo I e $t_0 \in I$, l'unica soluzione $u \in C^1(I)$ di

$$u' = a(t)u + b(t), \quad u(t_0) = u_0 \quad (8.58)$$

è data da

$$u(t) = e^{g(t)} \left(\int_{t_0}^t e^{-g(\tau)} b(\tau) d\tau + u_0 \right) \quad (8.59)$$

dove $g(t) \equiv \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$.

E 8.8 (i) Dimostrare che se A è una matrice (indipendente dal tempo), $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$, con I intervallo in $\mathbb{R}$, allora il vettore $u(t)$ definito come

$$u(t) = e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} b(\tau) d\tau \quad (8.60)$$

soddisfa

$$u' = Au + b, \quad u(t_0) = 0. \quad (8.61)$$

(ii) Perché tale metodo non può essere generalizzato al caso di sistemi lineari a coefficienti non costanti?

E 8.9 (i) Sia $A \equiv \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ e si calcoli e^A .

(ii) Si verifichi che se $G(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & \sin \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} d\tau$, allora $GG' \neq G'G$ e $G'e^G \neq (e^G)' \neq e^{G'}G'$.

(iii) Si faccia vedere tramite un esempio che la formula (8.59) può non valere per sistemi lineari in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.

E 8.10 Sia $t \in I \rightarrow A(t)$ una funzione continua dall'intervallo I a valori matrici ($n \times n$) e sia $G(t) \equiv \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ con $t_0, t \in I$. Assumendo che G e A commutino, cioè che $AG = GA$, si dimostri che l'unica soluzione $u \in C^1(I)$ di

$$u' = A(t)u + b(t), \quad u(t_0) = u_0 \quad (8.62)$$

dove $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione continua assegnata è data da

$$u(t) = e^{G(t)} \left(\int_{t_0}^t e^{-G(\tau)} b(\tau) d\tau + u_0 \right). \quad (8.63)$$

E 8.11 (Equazioni scalari conservative del second'ordine) Sia $V \in C^1(I, \mathbb{R})$, I intervallo di $\mathbb{R}$ e si consideri, per $x_0 \in I$, la seguente equazione differenziale del secondo ordine (e non lineare):

$$\ddot{x} + V'(x) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0. \quad (8.64)$$

(i) Si dimostri che se

$$E(t) \equiv \frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 + V(x(t))$$

denota l'«energia al tempo t » della funzione $x(t)$ e se $t \in (a, b) \rightarrow x \in I$ è soluzione di (8.64), allora

$$E(t) = E(t_0) \equiv \frac{1}{2} v_0^2 + V(x_0), \quad \forall t \in (a, b).$$

(ii) Si riconduca la soluzione dell'equazione (8.64) alla soluzione di un'equazione a variabili separabili (Es. 8.6).

E 8.12 Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = f(t), \quad t \in I, \quad (8.65)$$

dove I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e a, b e f sono funzioni continue su I .

(i) Si trovi una soluzione di (8.65) assumendo che si conoscano le soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0. \quad (8.66)$$

(ii) Si dimostri che tutte le soluzioni di (8.65) hanno la forma

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + p \quad (8.67)$$

dove u_1 e u_2 sono soluzioni indipendenti di (8.66) e $p(t)$ è una qualunque soluzione di (8.65).

(iii) Si scrivano esplicitamente (in termini di f) tutte le soluzioni di (8.65) nel caso in cui i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ siano costanti: $a(t) \equiv a$ e $b(t) \equiv b$.

E 8.13 Sia $x(t)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = f(t), \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1, \quad (8.68)$$

dove f è una funzione continua su $\mathbb{R}$ con $\int_{\mathbb{R}} |f| dt < \infty$ e si trovi, se esiste, il $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

E 8.14 Sia u il punto fisso della contrazione Φ_a definita in 6.40. Quale equazione differenziale soddisfa u ?

E 8.15 Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \dot{x}^2 + \sinh x = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = \alpha. \quad (8.69)$$

(i) Si trovi $T > 0$ tale che esista un'unica soluzione di (8.69) per $|t| \leq T$.

(ii) Si denoti con $x(t; \alpha)$ la soluzione di (8.69) per $|t| \leq T$ e si calcoli il limite $\lim_{\alpha \rightarrow 0} x(t; \alpha)$ per ogni $|t| \leq T$.

(iii) Il limite definito al punto (ii) è uniforme in $t \in [-T, T]$?

E 8.16 Sia $y(x)$ la soluzione di $(1-x)y' = 1+x-y$, $y(0) = 0$. Usando l'equazione differenziale si calcolino tutte le derivate di $y(x)$ in $x = 0$; determinare il raggio di convergenza della serie di Taylor di $y(x)$ e si concluda che in un intorno di $x = 0$ la soluzione $y(x)$ è analitica.

E 8.17 Sia $T > 0$ e sia $f \in C^1(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, con A aperto di $\mathbb{R}^n$ e f T -periodica: $f(x, t+T) = f(x, t)$ per ogni $(x, t) \in A \times \mathbb{R}$. Dimostrare che se $x(t)$ è soluzione di $\dot{x} = f(x, t)$, $x(0) = x_0$ e se $x(T) = x_0$ allora x è T -periodica ovvero $x(t+T) = x(t)$ per ogni t .

E 8.18 (Teorema di Picard) Iterando direttamente la mappa ϕ in (8.21), si dia una dimostrazione del Teorema 8.8 senza usare il teorema di punto fisso. Si dimostri che, in tal modo, il Teorema 8.8 vale senza l'ipotesi $TL < 1$. Dunque il tempo di esistenza può essere definito come $T \equiv \min\{T_0, r/M\}$.

E 8.19 (Dipendenza C^k dai dati iniziali) Si dimostrino i seguenti risultati sulla dipendenza regolare dai dati iniziali delle soluzioni di equazioni differenziali. Usando le notazioni del Teorema 8.8 si ha:

(i) Se f e f_x sono continue su $D \times I$ allora la soluzione $u(t) \equiv \varphi(t; x)$ di (8.16) con $u_0 \equiv x$ è di classe $C^1(\{x, u_0\})$.

(ii) Se tutte le derivate di f rispetto a x_j di ordine $k \geq 1$ sono continue su $D \times I$ allora la soluzione $u(t) \equiv \varphi(t; x)$ di (8.16) con $u_0 \equiv x$ è di classe $C^k(\{x, u_0\})$.

C 8.20 (Stabilità in sistemi lineari a coefficienti costanti)

Consideriamo il sistema (omogeneo) di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$u' = Au \quad (8.70)$$

con $A \in \text{Mat}(n \times n)$ matrice indipendente dal tempo.

Definizione 8.23 Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di equilibrio per (8.70), se la funzione costante $u(t) \equiv x_0$ è soluzione di (8.70).

Quindi x_0 è un punto di equilibrio per (8.70) se e solo se $Ax_0 = 0$; dunque 0 è *sempre* un punto d'equilibrio per (8.70) e $x_0 \neq 0$ è un equilibrio se e solo se x_0 è un autovettore di A con autovalore nullo. Il problema che ora ci poniamo è come evolvono dati iniziali vicini ad un punto di equilibrio, ossia come si comportano, per $t \gg 1$, le soluzioni $e^{At}x$ di (8.70), quando il dato iniziale x è vicino ad x_0 .

Definizione 8.24 Un punto di equilibrio x_0 per (8.70) si dice *stabile* (secondo Liapunov) se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $|e^{At}x - x_0| \leq \varepsilon$ per ogni $t > 0$ e per ogni $|x - x_0| \leq \delta$. Un punto di equilibrio stabile x_0 si dice *asintoticamente stabile* se $\exists \delta > 0$ tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x = x_0$, per ogni $|x - x_0| \leq \delta$. Un punto di equilibrio asintoticamente stabile si chiama anche "attrattore" per (8.70).

Se x_0 è un autovettore con autovalore nullo, allora tutta la retta $\ell_{x_0} \equiv \{sx_0 : s \in \mathbb{R}\}$ è formata da punti di equilibrio essendo $A(sx_0) = sAx_0 = 0$. Quindi se esiste un autovettore x_0 con autovalore nullo, non ci può essere alcun punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Se x_0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile, necessariamente $x_0 = 0$ e A non ha alcun autovettore con autovalore nullo. Inoltre se 0 è asintoticamente stabile, allora $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Sia infatti $\delta > 0$ quello della definizione di stabilità asintotica, e sia $x \neq 0$ un qualunque vettore di $\mathbb{R}^n$, allora se poniamo $a = \frac{\delta}{2|x|}$, il vettore ax ha norma uguale a $\frac{\delta}{2}$ ed è quindi all'interno della sfera di raggio δ centrata nell'origine. Allora, $|e^{At}x| = a^{-1}|e^{At}(ax)| \rightarrow 0$, se $t \rightarrow \infty$.

Si noti che, facendo un eventuale cambio di coordinate ($y = x - x_0$), possiamo sempre ridurci al caso in cui il punto di equilibrio sia l'origine.

Se A possiede un autovettore con autovalore avente parte reale strettamente positiva, allora 0 è un *punto di equilibrio instabile*: infatti è facile vedere che se $Av = \lambda v$, allora $e^{At}v = e^{\lambda t}v$. Dunque se $Av = \lambda v$ e $\operatorname{Re} \lambda > 0$, allora per ogni $\delta > 0$, possiamo trovare, all'interno della sfera di raggio δ attorno all'origine, un vettore w tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{At}w| = \infty$: basta prendere $w = av$ con $a = \frac{\delta}{2|v|}$. In tal caso $|e^{At}w| = a|e^{At}v| = a|e^{\lambda t}v| = a|v|e^{t \operatorname{Re} \lambda} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. E questo dimostra che l'origine è instabile.

Concludiamo questa discussione con un criterio sufficiente affinché 0 sia un punto di equilibrio stabile o asintoticamente stabile.

Proposizione 8.25 Supponiamo che A sia diagonalizzabile e che tutti gli autovalori abbiano parte reale minore o uguale a 0. Allora l'origine $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile. Se A è diagonalizzabile e tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa, allora $x = 0$ è asintoticamente stabile.

Dimostrazione Sappiamo che se $T \in \operatorname{Mat}(n \times n)$ è una matrice invertibile, allora $T^{-1}e^{AT} = e^{T^{-1}AT}$; inoltre se $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ è la matrice diagonale avente sulla diagonale i numeri complessi $d_1, \dots, d_n$, allora $\|D\| = \max |d_i|$. Sia, dunque, T la matrice che diagonalizza A : $T^{-1}AT = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dalle osservazioni appena fatte segue che

$$\begin{aligned} \|e^{At}v\| &= \|TT^{-1}e^{At}TT^{-1}v\| = \|Te^{T^{-1}At}T^{-1}v\| = \|Te^{At}T^{-1}v\| \\ &\leq \|T\| \|e^{At}\| \|T^{-1}\| \|v\| = \|T\| \|T^{-1}\| \|v\| \max_{1 \leq i \leq n} e^{(\operatorname{Re} \lambda_i)t}. \end{aligned}$$

Da tale stima segue subito l'asserto. ■

In effetti, utilizzando la forma canonica di Jordan, si dimostra in maniera del tutto analoga la stessa affermazione senza l'ipotesi di diagonalizzabilità per A .

E 8.21 (Corda vibrante con estremi fissi) L'evoluzione dello spostamento verticale di una corda elastica (di lunghezza, a riposo, unitaria) con estremi fissi, che oscilla (senza attrito e senza forze esterne) in un piano, soddisfa, in prima approssimazione, la seguente equazione differenziale alle derivate parziali

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (8.71)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad (8.72)$$

dove $u = u(x, t)$ denota la posizione, all'istante t (in un piano cartesiano $x, y = u$), del punto della corda che a riposo coincide con il punto $(x, y) = (x, 0)$ e c è una costante che dipende dalle caratteristiche fisiche della corda.

Il problema (classico) di Cauchy per (8.71), (8.72) consiste nel trovare

$$u \in C^2((0, 1) \times (0, \infty)), \quad \text{con} \quad u, u_t \in C([0, 1] \times [0, \infty)),$$

che soddisfici (8.71), (8.72) e le seguenti condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad (8.73)$$

dove u_0 e v_0 sono funzioni assegnate (sufficientemente regolari e tali che $u_0(0) = u_0(1) = v_0(0) = v_0(1) = 0$). Le condizioni "al contorno" (8.72) si chiamano **condizioni di Dirichlet**.

Definiamo il seguente spazio di funzioni

$$C_{\text{dis}}^k((0, 1)) \equiv \{f \in C^k([0, 1]) : f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0 \quad \forall i \text{ pari e } i \leq k\}. \quad (8.74)$$

Si risolva il problema di Cauchy per (8.71), (8.72) supponendo che i dati iniziali u_0 e v_0 siano di classe $C_{\text{dis}}^\infty((0, 1))$.

E 8.22 Si risolva il problema di Cauchy per (8.71), (8.72) supponendo che i dati iniziali u_0 e v_0 siano:

(i) $u_0 = \sin^3 x, v_0 = 0$.

(ii) $u_0 = 0, v_0 = \sin^p x$ con $p = 1, 3, 4$.

E 8.23 Discutere il problema di Cauchy per (8.71), (8.72) con $u_0 = \sin^2 x$ e $v_0 = 0$.

E 8.24 Per una funzione $u(x, t)$ di classe C^1 si definisce l'energia al tempo t la quantità

$$E(t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 (u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t)) dx. \quad (8.75)$$

(i) **(Conservazione dell'energia per la corda elastica)** Si dimostri che se

$$u \in C^2((0, 1) \times (0, \infty)) \cap C([0, 1] \times [0, \infty))$$

è soluzione di (8.72) allora

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \forall t > 0 \quad (8.76)$$

e quindi che $E(t) \equiv E(0)$.

(ii) (**Unicità**) Si usi il punto (i) per dimostrare che la soluzione del problema di Cauchy per (8.71), (8.72) con dati iniziali in C_{dis}^∞ è unica.

E 8.25 (Equazione del calore) La temperatura di un filo metallico di lunghezza unitaria con gli estremi tenuti a temperatura costante, che (per semplicità) supporremo uguale a 0, soddisfa la seguente equazione alle derivate parziali

$$u_t - k u_{xx} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (8.77)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad (8.78)$$

dove $u(x, t)$ denota la temperatura al tempo t del punto del filo di coordinata uguale ad x e $k > 0$ è la cosiddetta "conduttività".

Il problema (classico) di Cauchy per (8.77), (8.78) consiste nel trovare u tale che

$$u \in C([0, 1] \times [0, \infty)), \quad \text{con} \quad u_t, u_x, u_{xx} \in C((0, 1) \times (0, \infty)),$$

tale che soddisfi (8.77), (8.78) e la *condizione iniziale*

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (8.79)$$

dove u_0 è una funzione assegnata (sufficientemente regolare e tale che $u_0(0) = u_0(1) = 0$). Le condizioni "al contorno" (8.78) si chiamano **condizioni di Dirichlet**.

Si risolva il problema di Cauchy per (8.77), (8.78) supponendo che il dato iniziale u_0 appartenga a $C_{\text{dis}}^1((0, 1))$.

E 8.26 Si risolva il problema di Cauchy per (8.77), (8.78) con dato iniziale $u_0 = \sin^p x$ con $p = 1, 2, 3, 4$.

9 Integrazione in $\mathbb{R}^n$

In questo capitolo verrà discussa la teoria moderna della integrazione cioè la teoria di H. Lebesgue. Nella esposizione di tale teoria non verrà seguito l'approccio originale di Lebesgue (in cui si introduce prima la teoria della misura e poi si definisce l'integrale) bensì seguiremo il punto di vista "funzionale" presentato, per la prima volta, nel bellissimo trattato del 1952 di F. Riesz e B.Sz. Nagy intitolato "*Leçon d'analyse fonctionnelle*". Nella sezione § 9.4, per completezza, verrà descritta la teoria dell'integrazione secondo Riemann.

9.1 Rettangoli in $\mathbb{R}^n$

Un **rettangolo** R in $\mathbb{R}^n$ è il prodotto cartesiano di n intervalli $I_i \subset \mathbb{R}$: $R = I_1 \times \cdots \times I_n$. Esempi di rettangoli in $\mathbb{R}^2$ sono:

$$\begin{aligned} [0, 1]^2 &\equiv [0, 1] \times [0, 1] \equiv \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}; \\ [-\pi, \pi) \times (-1, +\infty) &\equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x_1 < \pi, x_2 > -1\}; \\ [0, 1] \times \{3\} &\equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 3\}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Gli intervalli il cui prodotto cartesiano forma un rettangolo vengono anche chiamati **lati** del rettangolo. I rettangoli $(n - 1)$ -dimensionali che formano la frontiera di un rettangolo in $\mathbb{R}^n$ sono chiamate **facce**¹. I punti che siano intersezioni di n facce si chiamano **vertici**. Un rettangolo si dice **degenere** se ha interno vuoto e **non degenere** altrimenti. L'ultimo esempio in (9.1) è degenere essendo uno dei suoi lati formato dal solo punto $\{3\} = [3, 3]$ (in dimensione 2 lati e facce coincidono).

Nell'analisi che segue avranno particolare importanza gli insiemi dati dall'unione disgiunta di un numero finito di rettangoli limitati: tali insiemi prendono il nome di **insiemi elementari**. Se E è un insieme elementare, per definizione, esistono $N < \infty$ rettangoli R_i a due a due disgiunti tali che $E = \bigcup_{i=1}^N R_i$; la collezione di tali rettangoli, $\mathcal{P} \equiv \{R_1, \dots, R_N\}$, prende il nome di **partizione** di E . Un insieme elementare E ammette ovviamente infinite partizioni distinte; date due partizioni di E , $\mathcal{P} \equiv \{R_1, \dots, R_N\}$ e $\mathcal{P}' \equiv \{R'_1, \dots, R'_M\}$, diremo che $\mathcal{P}$ è **più fine** di $\mathcal{P}'$ (in simboli $\mathcal{P}' \prec \mathcal{P}$) se per ogni i esiste j tale che $R_i \subset R'_j$.

Proposizione 9.1 *Se A e B sono insiemi elementari in $\mathbb{R}^n$, lo sono anche $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.*

L'idea della dimostrazione è assai semplice: una volta proiettate sugli assi coordinati tutte le facce dei rettangoli la cui unione forma A e B , è chiaro che $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$ (se non vuoti) sono dati dall'unione disgiunta di rettangoli formati dal prodotto cartesiano di intervalli aventi come estremi due delle proiezioni contigue².

¹Ad esempio il rettangolo compatto $E = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ (con $-\infty < a_i < b_i < \infty$) ha $2n$ facce: per ogni j tra 1 ed n vi sono due "facce opposte" date da $E \cap \{x_j = a_j\}$ e da $E \cap \{x_j = b_j\}$.

²Tali proiezioni possono essere definite formalmente come segue. Sia $A = \bigcup_{i=1}^{N_1} R_i^{(1)}$ e $B = \bigcup_{i=1}^{N_2} R_i^{(2)}$ con $R_i^{(k)}$ rettangoli di $\mathbb{R}^n$ (e $R_i^{(k)} \cap R_j^{(k)} = \emptyset$ se $i \neq j$). Sia $R_i^{(k)} = I_{i1}^{(k)} \times \cdots \times I_{in}^{(k)}$

Passiamo alla definizione della **misura** n -dimensionale (o, più precisamente, “misura euclidea n -dimensionale³”) di rettangoli e di insiemi elementari in $\mathbb{R}^n$. Siano I_i intervalli di $\mathbb{R}$ e sia $E = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$. Se E è degenere poniamo

$$\text{mis}_n E = 0, \quad (9.2)$$

se E è non degenere ed uno degli intervalli I_i non è limitato poniamo

$$\text{mis}_n E \equiv \infty, \quad (9.3)$$

ed infine se E è limitato definiamo la sua misura come il prodotto della lunghezza dei suoi lati I_i cioè se gli estremi di I_i sono $a_i \leq b_i$, la misura di E è data da

$$\text{mis}_n E \equiv \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n). \quad (9.4)$$

Se E è un insieme elementare e se $\{R_1, \dots, R_N\}$ è una partizione di E poniamo

$$\text{mis}_n E \equiv \sum_{i=1}^N \text{mis}_n R_i. \quad (9.5)$$

Osservazione 9.2 (i) La misura di $E = I_1 \times \cdots \times I_n$ non dipende dal fatto che gli intervalli I_i contengano o meno gli estremi.

(ii) Dalle definizioni date segue che la misura di un rettangolo degenere è zero anche se uno degli intervalli I_i non è limitato; ad esempio $\text{mis}_2(\{-1\} \times \mathbb{R}) = 0$.

(iii) Considerando l'insieme vuoto un rettangolo degenere (si pensi, ad esempio, un rettangolo con uno dei lati della forma $(a, a) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < a\}$) si ha che $\text{mis}_n \emptyset = 0$.

(iv) *L'intersezione di due rettangoli è un rettangolo* mentre l'unione di due rettangoli, in generale, non lo è. Questa osservazione motiva l'introduzione degli insiemi elementari che costituiscono, invece, una classe chiusa rispetto alle fondamentali operazioni insiemistiche.

(v) *La definizione di misura di un insieme elementare E non dipende dalla particolare partizione di E .* Supponiamo infatti che $\mathcal{P} \equiv \{R_1, \dots, R_N\}$ e $\mathcal{P}' \equiv \{R'_1, \dots, R'_M\}$ siano due partizioni di E . Se R_{ij} sono i rettangoli dati da $R_i \cap R'_j$ si ha che $\cup_j R_{ij} = R_i$ e quindi $E = \cup_{i,j} R_{ij}$ il che significa che $\mathcal{P}'' \equiv \{R_{ij} : 1 \leq i \leq N \text{ e } 1 \leq j \leq M\}$ è un'altra partizione di E ed inoltre⁴ $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}''$ e $\mathcal{P}' \prec \mathcal{P}''$. E' anche chiaro che

$$\text{mis}_n R_i = \sum_j \text{mis}_n R_{ij}, \quad \text{mis}_n R'_j = \sum_i \text{mis}_n R_{ij}.$$

con $I_{ij}^{(k)}$ intervalli limitati di $\mathbb{R}$ aventi per estremi $a_{ij}^{(k)} \leq b_{ij}^{(k)}$. Le proiezioni delle j -esime facce dei rettangoli sono date dall'ordinamento dei punti $P_j = \{a_{ij}^{(k)}, b_{ij}^{(k)} : k = 1, 2; 1 \leq i \leq N_k\}$ (e naturalmente due punti ξ e ξ' in P_j corrispondono a “proiezioni contigue” se tra ξ e ξ' non ci sono altri punti di P_j).

³ Naturalmente, nel caso $n = 1, 2, 3$ tale misura viene più comunemente chiamata, rispettivamente, lunghezza, area, volume.

⁴ La partizione $\mathcal{P}''$ viene a volte chiamata **partizione unione** generata da $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$.

Quindi

$$\sum_i \text{mis}_n R_i = \sum_i \sum_j \text{mis}_n R_{ij} = \sum_j \sum_i \text{mis}_n R_{ij} = \sum_j \text{mis}_n R'_j ,$$

che è quanto volevasi dimostrare. ■

(vi) Normalmente, quando non vi sia ambiguità, ometteremo l'indice n dal simbolo mis_n , e denoteremo semplicemente $\text{mis } E$ la misura n -dimensionale del rettangolo n -dimensionale E .

9.2 Funzioni a scalini

Fissiamo un rettangolo non degenere (non necessariamente limitato o aperto o chiuso) $E \subset \mathbb{R}^n$ (ad esempio si può prendere $E = \mathbb{R}^n$). Una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **a scalini** se f ha la forma

$$f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{R_i} , \quad (9.6)$$

dove $N \geq 1$ è un intero, c_i sono numeri reali, R_i sono rettangoli *limitati* contenuti in E a due a due disgiunti e χ_R , come al solito, denota la funzione *caratteristica* (o "indicatrice") dell'insieme $R \subset \mathbb{R}^n$ ovvero $\chi_R(x) = 1$ se $x \in R$ e $\chi_R(x) = 0$ altrimenti. E' chiaro che la rappresentazione (9.6) non è unica (ad esempio $\chi_{[-1,1]} = \chi_{[-1,0]} + \chi_{(0,1]}$). Si noti che, in particolare, le funzioni a scalini sono limitate⁵ e a supporto compatto.

Osservazione 9.3 (i) Se $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ è un rettangolo con I_i intervalli di $\mathbb{R}$ si ha

$$\chi_R(x) = \chi_{I_1}(x_1) \cdots \chi_{I_n}(x_n) .$$

Da tale relazione segue che f è a scalini se e solo se f ha la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f_{i1}(x_1) \cdots f_{in}(x_n) \quad (9.7)$$

con f_{ij} funzioni a scalini di una variabile.

(ii) Se f_1 e f_2 sono funzioni a scalini si può sempre supporre che esse siano costanti sugli stessi rettangoli R_i ovvero che $f_k = \sum_{i=1}^N c_i^{(k)} \chi_{R_i}$.

[Infatti se $f_k = \sum_{i=1}^{N_k} c_i^{(k)} \chi_{R_i^{(k)}}$, sia $A_k \equiv \cup_i R_i^{(k)}$. Dalle definizioni date segue che $\mathcal{P}^{(k)} \equiv \{R_i^{(k)}\}$ è una partizione di A_k e se $\mathcal{P}''$ denota la partizione unione generata da⁶ $\mathcal{P}^{(1)}$ e $\mathcal{P}^{(2)}$ allora $f_k = \sum_{R \in \mathcal{P}''} c_R \chi_R$ dove $c_R = c_i^{(k)}$, per qualche i e k a seconda che $R \in \mathcal{P}$ o $R \in \mathcal{P}'$.]

⁵Ricordiamo che una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice limitata se $-\infty < \inf_E f \leq \sup_E f < \infty$ o, equivalentemente, $\sup_E |f| < \infty$.

⁶Si ricordi la nota 4.

Definizione 9.4 Dato un rettangolo non degenero $E \subset \mathbb{R}^n$ denotiamo con $S(E)$ la classe delle funzioni a scalini da E in $\mathbb{R}$. Se $f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{R_i} \in S(E)$, si chiama integrale di f su E il numero

$$\int_E f \equiv \sum_{i=1}^N c_i \operatorname{mis}_n R_i \quad (9.8)$$

Modificando nella maniera ovvia la dimostrazione nel punto (v) dell'Osservazione 9.2, si vede subito che la Definizione 9.4 non dipende dalla particolare rappresentazione di f . Per il simbolo $\int_E f$ si usano anche le seguenti notazioni equivalenti

$$\int_E f \equiv \int_E f(x) dx \equiv \int_E f(x) dx_1 \cdots dx_n \equiv \int_E f(y) dy_1 \cdots dy_n.$$

Dalle definizioni date, dalle Osservazioni 9.2 e 9.3 e dalla Proposizione 9.1 seguono immediatamente le proprietà raccolte nella seguente⁸

Proposizione 9.5 (i) L'insieme $S(E)$ è un reticolo ed un'algebra ovvero, per ogni $f, g \in S(E)$ e per ogni $a \in \mathbb{R}$ le funzioni⁹

$$\sup\{f, g\}, \quad \inf\{f, g\}, \quad af, \quad f+g, \quad fg$$

sono ancora elementi di $S(E)$.

(ii) L'integrale (9.8) è un funzionale lineare e positivo su $S(E)$ ovvero se $f, g \in S(E)$ e a e b sono numeri reali, allora

$$\begin{aligned} \int_E (af + bg) &= a \int_E f + b \int_E g, \\ \int_E f &\geq 0, \quad \forall f \geq 0. \end{aligned} \quad (9.9)$$

(iii) Nel caso $E \equiv \mathbb{R}^n$ l'integrale (9.8) è invariante per traslazioni ovvero per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e per ogni funzione a scalini $f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - x_0) dx. \quad (9.10)$$

Si noti che la linearità e la positività implicano che se f e g sono due funzioni a scalini su E allora

$$f \geq g \quad \implies \quad \int_E f \geq \int_E g. \quad (9.11)$$

⁷Sia $f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{R_i} = \sum_{j=1}^M c'_j \chi_{R'_j}$, sia $\mathcal{P}'' = \{R_{ij}\}$ la partizione unione generata da $\{R_i\}$ e $\{R'_j\}$ (cioè $R_{ij} = R_i \cap R'_j$) e sia $c_{ij} = f|_{R_{ij}}$ il valore di f su R_{ij} . Allora $c_{ij} = c_i = c_j$ su R_{ij} e $c_i \operatorname{mis}_n R_i = \sum_j c_{ij} \operatorname{mis}_n R_{ij}$ e $c_j \operatorname{mis}_n R_j = \sum_i c_{ij} \operatorname{mis}_n R_{ij}$. Si noti anche che $f = \sum_{ij} c_{ij} \chi_{R_{ij}}$.

⁸Esercizio 9.1.

⁹Le funzioni $\sup\{f, g\} : x \rightarrow \sup\{f(x), g(x)\}$ e $\inf\{f, g\} : x \rightarrow \inf\{f(x), g(x)\}$ prendono il nome, rispettivamente, di inviluppo superiore ed inferiore delle funzioni f, g .

Dal punto (i) della precedente Proposizione segue che se f è a scalini lo è anche $|f| = \sup\{f, -f\}$ e da (9.11), segue che

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|. \quad (9.12)$$

9.3 Insiemi di misura nulla

La nozione fondamentale su cui è basata la teoria moderna dell'integrazione è quella di *insieme di misura nulla*, nozione che caratterizza esattamente quegli insiemi che possono essere trascurati dal punto di vista della misura e della integrazione.

Definizione 9.6 *Un insieme $Q \subset \mathbb{R}^n$ si dice di misura nulla se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia (al più) numerabile di cubi¹⁰ aperti $\{K_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ tale che¹¹*

$$Q \subset \bigcup_{j \geq 1} K_j, \quad \text{e} \quad \sum_{j \geq 1} \text{mis}(K_j) \leq \varepsilon. \quad (9.13)$$

Ad esempio l'insieme $\mathbb{Q}^n$ dei vettori $x \in \mathbb{R}^n$ a componenti razionali è un insieme di misura nulla. Infatti, poiché $\mathbb{Q}^n$ è numerabile $\mathbb{Q}^n = \{r_j\}_{j \geq 1}$ e, dato $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere come K_j il cubo aperto centrato in r_j di lato $(\varepsilon j^{-2})^{\frac{1}{n}}$. Allora $\text{mis}(K_j) = \varepsilon j^{-2}$ e

$$\sum_{j \geq 1} \text{mis}(K_j) \leq \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} \right) \varepsilon, \quad (9.14)$$

il che è chiaramente equivalente a dire che $\mathbb{Q}^n$ è di misura nulla.

Osservazione 9.7 (i) Ovviamente un sottoinsieme di un insieme di misura nulla è di misura nulla.

(ii) Un'unione numerabile di insiemi di misura nulla è di misura nulla.

Dimostrazione di (ii). Sia $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di misura nulla e sia $\varepsilon > 0$. Allora per ogni $j \geq 1$ esistono cubi aperti $K_i^{(j)}$ tali che $Q_j \subset \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} K_i^{(j)}$ e $\sum_{i \geq 1} \text{mis} K_i^{(j)} \leq \varepsilon 2^{-j}$. La famiglia $\{K_i^{(j)}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$, come è ben noto, è numerabile ed una numerazione può essere fatta come segue: definiamo $K_1 \equiv K_1^{(1)}$ e, per ogni intero $r \geq 1$, definiamo¹² $K_{r^2+1} \equiv K_{r+1}^{(1)}$, $K_{r^2+2} \equiv K_{r+1}^{(2)}$, ..., $K_{r^2+r+1} \equiv K_{r+1}^{(r+1)}$,

¹⁰Naturalmente un cubo è un rettangolo con tutti i lati uguali; il cubo aperto di centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e lato r è dato da $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0|_\infty < r/2\}$.

¹¹Normalmente, una famiglia (non necessariamente numerabile) di insiemi aperti, la cui unione contenga un insieme Q , si chiama un *ricoprimento (aperto) di Q* ; si ricorda che $\mathbb{Z}_+$ denota l'insieme degli interi positivi $\{1, 2, 3, \dots\}$.

¹²La seguente numerazione corrisponde alla numerazione di $\{(i, j) \in \mathbb{Z}_+^2\}$ fatta considerando i quadrati di vertici $(1, 1)$, $(r+1, 1)$, $(r+1, r+1)$ e $(1, r+1)$ e numerando successivamente i lati "esterni" nel verso che va da $(r+1, 1)$ a $(r+1, r+1)$ e poi da $(r+1, r+1)$ a $(1, r+1)$.

$K_{r^2+r+2} \equiv K_r^{(r+1)}, \dots, K_{r^2+2r+1} \equiv K_1^{(r+1)}$. Si noti che secondo tale numerazione, per ogni $N \geq 1$, $\{K_1, \dots, K_{N^2}\} \equiv \{K_j^{(i)} : 1 \leq i, j \leq N\}$. Allora, per ogni $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^N \text{mis } K_r &\leq \sum_{r=1}^{N^2} \text{mis } K_r = \sum_{i,j \leq N} \text{mis } K_j^{(i)} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \text{mis } K_j^{(i)} \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{\infty} \text{mis } K_j^{(i)} \leq \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon}{2^j} \leq \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(iii) Nella definizione di insieme di misura nulla, i cubi possono essere sostituiti da rettangoli:

$Q \subset \mathbb{R}^n$ è di misura nulla se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento di Q al più numerabile formato da rettangoli aperti la somma delle cui misure non eccede ε .

Infatti: il "solo se" è ovvio (essendo i cubi dei rettangoli speciali). Per verificare il "se", osserviamo dapprima che dato un rettangolo R limitato e dato $\varepsilon > 0$ è possibile ricoprire R con un numero finito di cubi aperti la somma della cui misure non eccede $\text{mis } R + \varepsilon$. Ora se $Q \subset \cup R_j$ con R_j rettangoli aperti e $\sum \text{mis } R_j \leq \varepsilon$, basta ricoprire ogni rettangolo R_j con cubetti $K_i^{(j)}$ ($i = 1, \dots, N_j$) tali che $\sum_i \text{mis } K_i^{(j)} \leq \text{mis } R_j + 2^{-j}\varepsilon$. Il ricoprimento numerabile $\{K_i^{(j)}\}$ è allora tale che $\sum_{i,j} \text{mis } K_i^{(j)} \leq 2\varepsilon$ e quindi Q è di misura nulla.

(iv) Un rettangolo degenerare è un insieme di misura nulla.

Sia R limitato e degenerare. Possiamo assumere che, ad esempio, l'ultimo lato sia dato dal punto $[a, a]$. Allora esiste $d > 0$ tale che $R \subset R' \equiv [-d, d]^{n-1} \times \{a\}$ e quindi $R \subset [-d, d]^{n-1} \times [(a-\varepsilon)/(2d)^{n-1}, (a+\varepsilon)/(2d)^{n-1}]$ la cui misura è 2ε . Quindi R è di misura nulla. Se R è degenerare ma non limitato si ha che $R = \cup_j (R \cap [-j, j]^n)$ e l'asserto deriva allora da quanto appena dimostrato e dal punto (ii).

(v) Una caratterizzazione che ci sarà utile in seguito degli insiemi di misura nulla è la seguente:

" $Q \subset \mathbb{R}^n$ è di misura nulla se e solo se esiste un ricoprimento numerabile di Q fatto da cubi aperti K_i la somma delle cui misure è finita e tale che ogni punto di Q appartiene ad un numero infinito di cubi K_j ."

Dimostrazione Assumiamo che $Q \subset \cup_{i \geq 1} K_i$ e $\sum_{i \geq 1} \text{mis } K_i < \infty$ e sia $\varepsilon > 0$. Essendo la serie a termini positivi e convergente, esiste $N > 0$ tale che $\sum_{i \geq N} \text{mis } K_i \leq \varepsilon$ e d'altra parte $Q \subset \cup_{i \geq N} K_i$ (poiché ogni punto di Q appartiene ancora ad un numero infinito di cubi, avendone noi esclusi solo un numero finito). Quindi Q è di misura nulla.

Assumiamo che Q sia di misura nulla. Allora per ogni $i \geq 1$ esiste un ricoprimento di Q di cubi aperti $K_j^{(i)}$ tale che $\sum_{j \geq 1} \text{mis } K_j^{(i)} \leq 2^{-i}$. Prendendo l'insieme numerabile di cubi aperti $\{K_j^{(i)} : i, j \geq 1\}$ si ottiene un ricoprimento di Q con le proprietà richieste. $\blacksquare$

(vi) Se $K \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme compatto allora K è di misura nulla se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un insieme elementare che contiene K e di misura non superiore ad ε .

Dimostrazione “se”: Sia $E \equiv \bigcup_{j=1}^N R_j$ l'insieme elementare aperto di misura minore di ε che contenga K . La collezione $\{R_j\}$ non è un ricoprimento aperto di K (poiché non tutti i rettangoli R_j saranno, in generale, aperti), ma ingrandendo di una quantità sufficientemente piccola ogni lato di ogni rettangolo R_j è possibile trovare rettangoli aperti $\tilde{R}_j \supset R_j$ tali che¹³ $\sum_j \text{mis}_n \tilde{R}_j \leq 2\varepsilon$ il che implica che E è un insieme di misura nulla.

“solo se”: Sia $\{R_i : i \in \mathbb{N}\}$ un ricoprimento di K con R_i rettangoli aperti e tale che $\sum_{i \geq 0} \text{mis}_n R_i < \varepsilon$. Poiché K è compatto esistono $i_1, \dots, i_N$ tale che $K \subset \bigcup_{j=1}^N R_{i_j}$ e ovviamente $\sum_{j=1}^N \text{mis}_n R_{i_j} < \varepsilon$. L'insieme $E \equiv \bigcup_{j=1}^N R_{i_j}$ è, per la Proposizione 9.1, elementare e l'asserto è dimostrato. ■

Una proprietà importante degli insiemi di misura nulla è che l'immagine di un insieme di misura nulla, secondo una trasformazione “sufficientemente regolare”, è ancora un insieme di misura nulla:

Proposizione 9.8 *Sia $Q \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di misura nulla e sia $F : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione uniformemente lipschitziana su Q . Allora $F(Q)$ è un insieme di misura nulla.*

Dimostrazione Dato $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento di cubi aperti, $\{K_j\}$, di Q per cui $\sum \text{mis} K_j \leq \varepsilon$ e possiamo assumere che $K_j \cap Q \neq \emptyset$ per ogni j (altrimenti eliminiamo semplicemente K_j). Fissiamo un $x^{(j)} \in K_j \cap Q$ e chiamiamo r_j il lato di K_j cosicché $\text{mis}(K_j) = r_j^n$. Definiamo K'_j il cubo aperto di centro $F(x^{(j)})$ e lato $r'_j \equiv 2Lr_j$, dove L è la costante di Lipschitz di F su Q rispetto la norma $|\cdot|_\infty$ su $\mathbb{R}^n$, cioè: $|F(x) - F(y)|_\infty \leq L|x - y|_\infty$ per ogni $x, y \in Q$. Allora $F(K_j \cap Q) \subset K'_j$, infatti se $x \in K_j \cap Q$, si ha che $|x - x^{(j)}|_\infty \leq r_j$ e quindi $|F(x) - F(x^{(j)})|_\infty \leq L|x - x^{(j)}|_\infty \leq (Lr_j) = r'_j/2$, ovvero $F(x) \in K'_j$. Quindi $\{K'_j\}$ è un ricoprimento di $F(Q)$: se $y \in F(Q)$ allora esiste $x \in Q$ tale che $y = F(x)$, ma, poiché Q è ricoperto dai cubi K_j , esisterà un cubo K_{j_0} che contiene x , ma allora K'_{j_0} contiene y . Inoltre

$$\sum_j \text{mis}(K'_j) = \sum (2Lr_j)^n = (2L)^n \sum r_j^n = (2L)^n \sum \text{mis}(K_j) \leq (2L)^n \varepsilon, \quad (9.15)$$

e dall'arbitrarietà di ε segue l'asserto. ■

Osservazione 9.9 (i) Tale risultato non vale più se assumiamo F semplicemente continua: in 9.9 di fine sezione viene dato un esempio (la cosiddetta “curva di Peano”) di una funzione continua $F : I \equiv [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la cui immagine sia tutto il cubo unitario $[0, 1]^2$ e quindi trasforma il segmento I che ha misura

¹³Dato $\sigma > 0$, se c e d sono i due estremi di un qualunque lato di R_j , il corrispondente lato di $\tilde{R}_j$ sarà $(c - \sigma, d + \sigma)$. Prendendo σ sufficientemente piccolo la misura di $\tilde{R}_j$ sarà arbitrariamente vicina alla misura di R_j .

(bidimensionale) nulla, nel cubo (quadrato) unitario che ha misura (bidimensionale) uguale ad uno.

(ii) Un corollario della Proposizione 9.8 è:

Ogni spazio affine¹⁴ $A \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione $m < n$ è un insieme di misura nulla.

Infatti: $V_0^m \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$, per il punto (iv) dell'Osservazione 9.7, è un insieme di misura nulla. Sia ora V un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $m < n$ e sia $A \equiv x_0 + V$ per un qualche $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sia $\{v^{(1)}, \dots, v^{(m)}\}$ una base per V e sia $\{v^{(m+1)}, \dots, v^{(n)}\}$ un completamento di tale base in $\mathbb{R}^n$ (ovvero $\{v^{(1)}, \dots, v^{(n)}\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$). Sia T la matrice $(n \times n)$ avente come i -esima colonna il vettore $v^{(i)}$. Se V_0^m è definito come sopra, si ha che $V = TV_0^m$ e quindi, se $F(x) \equiv x_0 + Tx$, segue che $F(V_0^m) = A$. D'altra parte F è una trasformazione lipschitziana di $\mathbb{R}^n$ e quindi dal fatto che V_0^m è di misura nulla e dalla Proposizione 9.8 segue che anche A è un insieme di misura nulla.

9.4 L'integrale di Riemann in $\mathbb{R}^n$

Discuteremo ora la teoria classica della integrazione secondo Riemann in¹⁵ $\mathbb{R}^n$. I paragrafi successivi saranno indipendenti dal contenuto di questo paragrafo (a parte, naturalmente, nei punti in cui si confronterà l'integrale di Lebesgue con quello di Riemann).

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un rettangolo *limitato* e non degenero.

Definizione 9.10 Una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *integrabile secondo Riemann* se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni a scalini $f_1, f_2 \in S(E)$ tali che

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \quad \forall x \in E, \quad \text{e} \quad \int_E (f_2 - f_1) \leq \varepsilon. \quad (9.16)$$

In tal caso si ha¹⁶

$$\sup_{\{f_1 \in S(E) : f_1 \leq f\}} \int_E f_1 = \inf_{\{f_2 \in S(E) : f_2 \geq f\}} \int_E f_2, \quad (9.17)$$

e tale numero è, per definizione, l'integrale (di Riemann) di f su E e si denota $\int_E f$. L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su E si denota con $\mathcal{R}(E)$.

Osservazione 9.11 (i) Poiché le funzioni a scalini sono limitate, dalla definizione data segue che se f è integrabile secondo Riemann su E allora f è *limitata* su E .

(ii) Chiaramente ogni funzione a scalini è integrabile secondo Riemann (ed il valore dell'integrale di Riemann coincide con la definizione data precedentemente).

¹⁴ Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si chiama **spazio affine** se esiste un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ed un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^n$ tale che $A = x_0 + V$ (ovvero per ogni $a \in A$ esiste $v \in V$ tale che $a = x_0 + v$).

¹⁵ Per una breve discussione dell'integrazione di Riemann in una variabile si veda 0.1.

¹⁶ Siano s_1 e s_2 i membri, rispettivamente, di destra e di sinistra di (9.17). Da (9.11) segue che $s_1 \leq s_2$ e da (9.16) segue che $s_2 - s_1 \leq \int_E (f_2 - f_1) \leq \varepsilon$. Dall'arbitrarietà di ε segue (9.17).

(iii) E' utile, a volte, formulare l'integrabilità secondo Riemann in termini della "oscillazione". Sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un insieme tale che $D \cap A \neq \emptyset$; si definisce l'**oscillazione di f sull'insieme D** la quantità

$$\text{osc}(f, D) \equiv \sup_{D \cap A} f - \inf_{D \cap A} f = \sup_{x, y \in D \cap A} |f(x) - f(y)|. \quad (9.18)$$

Se $x \in A$ si definisce l'**oscillazione di f in x** la quantità

$$\text{osc}(f, x) \equiv \inf_{\delta > 0} \text{osc}(f, B_\delta(x)) \equiv \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{y \in A: |y-x| < \delta} f(y) - \inf_{y \in A: |y-x| < \delta} f(y) \right). \quad (9.19)$$

Dunque, la continuità di f in x è equivalente a: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\text{osc}(f, B_\delta(x)) < \varepsilon$; o anche: f è continua in x se e solo se $\text{osc}(f, x) = 0$. L'integrabilità di f su E è equivalente a: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione di E , $\{R_1, \dots, R_N\}$, tale che

$$\sum_{j=1}^N \text{osc}(f, R_j) \text{mis } R_j \leq \varepsilon. \quad (9.20)$$

Infatti se vale (9.20) scegliamo $c_j^{(1)} \equiv \inf_{R_j} f$ e $c_j^{(2)} \equiv \sup_{R_j} f$ e se

$$f_k \equiv \sum_{j=1}^N c_j^{(k)} \chi_{R_j}, \quad (9.21)$$

si ottiene immediatamente l'integrabilità di f su E . Viceversa se f è integrabile secondo Riemann su E , esistono $f_i \in S(E)$ per cui vale (9.16). In vista del punto (ii) dell'Osservazione 9.3, f_1 e f_2 possono essere scelte in maniera tale che siano entrambe costanti sugli stessi rettangoli R_j di una opportuna partizione di E . Da tale scelta segue (9.20).

(iv) Dalle definizioni date segue facilmente che i punti (i) e (ii) della Proposizione 9.5 valgono anche nel caso in cui $S(E)$ venga sostituito da¹⁷ $\mathcal{R}(E)$; dunque anche (9.11) e (9.12) valgono per $f \in \mathcal{R}(E)$.

Il prossimo risultato (dovuto a Lebesgue e a Vitali) caratterizza completamente la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un rettangolo limitato (e non degenere).

¹⁷Esercizio 9.2. Dimostriamo, a titolo d'esempio, che $\sup\{f, g\} \in \mathcal{R}(E)$ se $f, g \in \mathcal{R}(E)$: dato $\varepsilon > 0$ siano f_1, f_2, g_1, g_2 funzioni a scalini in E tali che $f_1 \leq f \leq f_2$, $g_1 \leq g \leq g_2$ e $\int_E (f_2 - f_1) \leq \varepsilon$ e $\int_E (g_2 - g_1) \leq \varepsilon$. Dalla Proposizione 9.5 segue che le funzioni $\varphi = \sup\{f_1, g_1\}$ e $\psi = \sup\{f_2, g_2\}$ sono a scalini; inoltre $\varphi \leq \sup\{f, g\} \leq \psi$. Dal punto (ii) dell'Osservazione 9.3 possiamo assumere che $f_1, f_2, g_1, g_2, \varphi, \psi$ siano costanti sugli stessi rettangoli. Sia R uno di tali rettangoli e supponiamo che $f_2 \geq g_2$ su R . Allora $\int_R (\psi - \varphi) \leq \int_R (f_2 - f_1)$. Infatti se $f_1 \geq g_1$ si ha che $\int_R (\psi - \varphi) = \int_R (f_2 - f_1)$; ma se $g_1 \geq f_1$ si ha $\int_R (\psi - \varphi) = \int_R (f_2 - g_1) \leq \int_R (f_2 - f_1)$. Naturalmente se $g_2 \geq f_2$ su R allora $\int_R (\psi - \varphi) \leq \int_R (g_2 - g_1)$. Sommando su tutti i rettangoli si ha che $\int_E (\psi - \varphi) \leq 2\varepsilon$ che equivale all'asserto.

Teorema 9.12 (Lebesgue, Vitali) Una funzione limitata $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann su E se e solo se l'insieme dei punti di E in cui f è discontinua è un insieme di misura nulla.

Osservazione 9.13 (i) In particolare le funzioni continue sono integrabili su rettangoli compatti. Data l'ovvia importanza di tale affermazione ne daremo ora una dimostrazione diretta (cioè senza invocare il teorema di Lebesgue–Vitali).

Sia f una funzione continua sul rettangolo compatto $E \subset \mathbb{R}^n$ (quindi f è uniformemente continua su E). Dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon / \text{mis } E$ per ogni $x, y \in E$ con $|x - y| \leq \delta$. Sia ora $\mathcal{P}$ una qualunque partizione di E in rettangoli R_j ($j = 1, \dots, N$) di diametro¹⁸ non superiore a δ . Se f_k è come in (9.21) è chiaro che f_1 e f_2 verificano (9.16) e quindi che f è integrabile secondo Riemann su E .

(ii) Nelle stesse condizioni del punto (i), se f è abbastanza regolare [ad esempio $f \in C^1(E)$] allora è possibile dare una semplice stima dell'errore che si commette nell'approssimare l'integrale di f con (opportune) somme finite. Più esplicitamente, sia $f \in C^1(E)$ (non identicamente costante), sia $\delta = \varepsilon \left((\text{mis } E) \sup_E |\nabla f| \right)^{-1}$, sia $\{R_j\}_{1 \leq j \leq N}$ una partizione di E con $\text{diam}(R_i) \leq \delta$, e siano, infine, $x^{(j)}$ punti arbitrariamente fissati in R_j . Allora¹⁹

$$\begin{aligned} \left| \int_E f(x) \, dx - \sum_{j=1}^N f(x^{(j)}) \text{mis } R_j \right| &= \left| \sum_{j=1}^N \int_{R_j} (f(x) - f(x^{(j)})) \, dx \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \int_{R_j} |f(x) - f(x^{(j)})| \, dx \\ &\leq \delta \left(\sup_E |\nabla f| \right) \text{mis } E \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Questa osservazione è, di solito, alla base del calcolo approssimato degli integrali fatto dai computer.

Dimostrazione (del Teorema 9.12) Chiamiamo $D(f)$ l'insieme dei punti di E in cui f è discontinua ed osserviamo che se $Q_j \equiv \{x \in E : \text{osc}(f, x) \geq 1/j\}$ allora $D(f) = \bigcup_j Q_j$. Ricordando il punto (ii) dell'Osservazione 9.7, è sufficiente dunque dimostrare:

“ f è integrabile su $E \iff Q_j$ è un insieme di misura nulla per ogni j ”.

Si noti che Q_j è chiuso (e quindi, essendo $Q_j \subset E$, è compatto).

Dimostriamo “ $\implies$ ”: Siano $j, \varepsilon > 0$ allora esiste una partizione finita di E in rettangoli R_i tale che $\sum_i \text{osc}(f, R_i) \text{mis } R_i \leq \varepsilon/j$. Sia $\mathcal{R} \equiv \{R_i : R_i \cap Q_j \neq \emptyset\}$

¹⁸Per la definizione ed alcune proprietà del diametro si veda 6.25.

¹⁹Si ricordi che $|f(x) - f(y)| = \left| \int_0^1 \nabla f(y + t(x - y)) \cdot (x - y) \, dt \right| \leq (\sup_E |\nabla f|) |x - y|$.

(cosicché, se $R \in \tilde{\mathcal{R}}$ allora $\text{osc}(f, R) \geq 1/j$). Allora

$$\sum_{R \in \tilde{\mathcal{R}}} \text{mis } R = j \sum_{R \in \tilde{\mathcal{R}}} \frac{\text{mis } R}{j} \leq j \sum_{R \in \tilde{\mathcal{R}}} \text{osc}(f, R) \text{mis } R \leq \varepsilon.$$

Se $N \equiv \#\tilde{\mathcal{R}}$, prendendo dei rettangoli aperti $K_R \supset R$ tali che $\text{mis } K_R \leq \text{mis } R + \varepsilon/N$ si ha che $Q_j \subset \bigcup_{R \in \tilde{\mathcal{R}}} K_R$ e $\sum_{R \in \tilde{\mathcal{R}}} \text{mis } K_R \leq 2\varepsilon$. Dunque Q_j è un insieme di misura nulla (punto (iii) dell'Osservazione 9.7).

Dimostriamo ora " $\Leftarrow$ ": Sia $\varepsilon > 0$ e sia $j > 2/\varepsilon$ e sia $Q \equiv Q_j$. Poiché Q è di misura nulla esiste un ricoprimento numerabile di Q formato da cubi aperti K_i tali che $\sum \text{mis } K_i \leq \varepsilon$. Essendo Q compatto esistono $K_{i_1}, \dots, K_{i_s}$ che ricoprono Q (e ovviamente $\sum_{h=1}^s \text{mis } K_{i_h} \leq \varepsilon$). Sia D la chiusura di $(E \setminus \bigcup_{h=1}^s K_{i_h})$. Per ogni $x \in D$ si ha $\text{osc}(f, x) \leq 1/j < \varepsilon/2$. Per ogni $x \in D$ sia $\hat{C}(x)$ un cubo chiuso di centro x tale che $\text{osc}(f, \hat{C}(x)) \leq \varepsilon$ (l'esistenza di tali cubi deriva dalla definizione di oscillazione e dal fatto che $\text{osc}(f, x) < \varepsilon/2$). Chiaramente $\bigcup_{x \in D} \hat{C}(x) \supset D$ e quindi esistono $C_1, \dots, C_N$, con $C_i \equiv \hat{C}(x^{(i)})$ per qualche $x^{(i)} \in D$, tali che $D \subset \hat{C}_1 \cup \dots \cup \hat{C}_N$. Costruiamo ora una partizione (finita) di E in rettangoli R in maniera tale che o $R \subset K_{i_h}$ per qualche h oppure $R \cap K_{i_h} = \emptyset$ per ogni h : chiamiamo $\mathcal{R}_1$ l'insieme dei rettangoli che verificano la prima alternativa, $\mathcal{R}_2$ l'insieme dei rimanenti rettangoli e $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Da tali scelte segue che $E = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$, $\sum_{R \in \mathcal{R}_1} \text{mis } R \leq \varepsilon$ e $\text{osc}(f, R) \leq \varepsilon$ per ogni $R \in \mathcal{R}_2$. Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{R \in \mathcal{R}} \text{osc}(f, R) \text{mis } R &\leq \sum_{R \in \mathcal{R}_1} \text{osc}(f, R) \text{mis } R + \sum_{R \in \mathcal{R}_2} \text{osc}(f, R) \text{mis } R \\ &\leq 2 \sup_E |f| \varepsilon + \varepsilon \text{mis } E. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definizione 9.14 (Misura di Peano-Jordan) *Un insieme $A \subset E$ (con E rettangolo limitato e non degenero) si dice misurabile secondo Peano-Jordan se la funzione caratteristica di A , χ_A , è integrabile secondo Riemann su E ; in tal caso si definisce la misura (secondo Peano-Jordan) di A come*

$$\text{mis}_n A \equiv \int_E \chi_A. \quad (9.22)$$

Si noti che se A è un insieme elementare tale definizione coincide con quella data in § 9.1 [si veda (9.5)]. Dunque la misura di Peano-Jordan è un'estensione della misura euclidea.

Dal Teorema 9.12 e dal fatto che l'insieme di discontinuità di una funzione caratteristica di un insieme A coincide con la frontiera di²⁰ A segue che

Proposizione 9.15 *Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se la frontiera di A è un insieme di misura nulla.*

²⁰Si veda il punto (iv) della Proposizione 5.2.

Osservazione 9.16 (i) Dal punto (vi) dell'Osservazione 9.7 e dal fatto che la frontiera di un insieme limitato è compatta segue che la precedente Proposizione può essere riformulata così : $A \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano–Jordan se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un insieme elementare di misura non superiore ad ε che contenga ∂A .

(ii) Dal punto (iii) dell'Osservazione 9.11 (cioè dai punti (i) e (ii) della Proposizione 9.5 nella versione per funzioni integrabili secondo Riemann) segue che²¹: se A e B sono insiemi misurabili secondo Peano–Jordan allora lo sono anche $A \cap B$, $A \cup B$ e $A \setminus B$.

(iii) Non è difficile verificare che²² se A è un insieme misurabile secondo Peano–Jordan, lo sono anche $\bar{A}$, $\overset{\circ}{A}$ e ∂A .

(iv) Naturalmente esistono insiemi di misura nulla che non sono misurabili secondo Peano–Jordan: ad esempio $\mathbb{Q}^n \cap E$ (con E rettangolo limitato) è un insieme di misura nulla non misurabile secondo Peano–Jordan²³. Però²⁴: se A è misurabile secondo Peano–Jordan allora A è di misura nulla se e solo se $\text{mis}_n A = 0$.

Costruiamo ora “induttivamente” una classe di insiemi in $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Peano–Jordan particolarmente importante per le applicazioni. Tale classe verrà denotata con $\mathcal{N}^n$ ed i suoi elementi saranno chiamati **insiemi C -normali**. In una dimensione $\mathcal{N}^1$ coincide con gli intervalli limitati (come, ad esempio, $(-1, 2]$). Per $n \geq 2$, $\mathcal{N}^n$ è dato dagli insiemi della forma

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \forall x \in A\}, \quad (9.23)$$

dove $A \in \mathcal{N}^{n-1}$ e $\alpha \leq \beta$ sono due funzioni uniformemente continue su A ; i segni di “ $\leq$ ” in (9.23) possono essere sostituiti (uno o entrambi) con “ $<$ ” ed il ruolo della variabile y può essere sostituito da quello di una qualunque²⁵ x_i ; a volte, un insieme come in (9.23) viene detto *normale rispetto all'asse delle y* .

La dimostrazione che gli insiemi C -normali siano misurabili secondo Peano–Jordan è basata sul seguente

Lemma 9.17 (i) Sia A un insieme limitato di $\mathbb{R}^{n-1}$ e sia $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua su A . Allora il grafico di α , $G_\alpha \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : y = \alpha(x) \text{ per } x \in A\}$ è un insieme di misura nulla.

(ii) Se $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ è un insieme di misura nulla allora, per ogni $a < b$, $Q \times [a, b]$ è un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^n$.

²¹ Si osservi che $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$, $\chi_{A \setminus B} = \chi_A (1 - \chi_B)$.

²² Esercizio 9.5.

²³ Esercizio 9.6.

²⁴ Esercizio 9.7.

²⁵ Ad esempio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -e^y \leq x < e^y, \forall y \in (-1, 4]\} \in \mathcal{N}^2$; si ricordi che le funzioni uniformemente continue su di un insieme A limitato coincidono con le restrizioni ad A di funzioni continue su $\bar{A}$.

Dimostrazione (i): Sia E' un rettangolo limitato di $\mathbb{R}^{n-1}$ contenente al suo interno A . Dato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che $|\alpha(x) - \alpha(x')| < \varepsilon / \text{mis}_{n-1} E'$ per ogni $x, x' \in A$ con $|x - x'| < \delta$. Sia ora $\{R'_1, \dots, R'_N\}$ una partizione di E' tale che $\text{diam } R'_i < \delta$ per ogni i e siano $\{R'_{i_j}\}$ tutti i rettangoli della partizione con intersezione non vuota con A : chiaramente $A \subset \cup_j R'_{i_j}$. Se $a_j \equiv \inf_{R'_{i_j} \cap A} \alpha$ e $b_j \equiv \sup_{R'_{i_j} \cap A} \alpha$, si ha che $|b_j - a_j| \leq \varepsilon$. Siano ora $R_j \equiv R'_{i_j} \times [\alpha_j, \beta_j]$. E' chiaro che $G_\alpha \subset \cup_j R_j$ ed inoltre $\sum_j \text{mis}_n R_j = \sum_j (\text{mis}_{n-1} R'_{i_j}) (b_j - a_j) \leq (\varepsilon / \text{mis}_{n-1} E') \sum_j (\text{mis}_{n-1} R'_{i_j}) \leq \varepsilon$. Poichè $\cup_j R_j$ è un insieme elementare, dal punto (vi) dell'Osservazione 9.7 segue che G_α è un insieme di misura nulla.

(ii): Sia $\varepsilon > 0$. Se $\{R'_j\}$ è un ricoprimento di rettangoli aperti di Q tale $\sum_j \text{mis}_{n-1} R'_j \leq \varepsilon$ e se $R_j \equiv R'_j \times (a-1, b+1)$ allora $\{R_j\}$ è un ricoprimento di rettangoli aperti di $Q \times [a, b]$ e $\sum_j \text{mis}_n R_j = \sum_j (\text{mis}_{n-1} R'_j) (2+b-a) \leq (2+b-a)\varepsilon$ il che equivale a dire che $Q \times [a, b]$ è un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^n$. ■

Proposizione 9.18 *Un insieme C -normale è misurabile secondo Peano-Jordan.*

Dimostrazione Per induzione su n . Per $n = 1$ è vero. Sia $n > 1$ ed assumiamo l'asserto vero per $1, \dots, n-1$. L'asserto per n deriva immediatamente dalla Proposizione 9.15 e dal lemma precedente osservando che, se B è un insieme C -normale come in (9.23), allora²⁶

$$\partial B = \{(x, \alpha(x)) : x \in \overline{A}\} \cup \{(x, \beta(x)) : x \in \overline{A}\} \cup \{(x, y) : x \in \partial A \text{ e } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}, \quad (9.24)$$

dove α e β denotano le estensioni a tutto $\overline{A}$ delle funzioni date²⁷. ■

Passiamo ora a discutere l'integrazione di funzioni su insiemi misurabili:

Definizione 9.19 *Sia $A \subset E$ un insieme misurabile secondo Peano-Jordan con E rettangolo limitato di $\mathbb{R}^n$. Una funzione limitata $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann su A se la funzione definita come*

$$f_A(x) \equiv \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A, \end{cases} \quad (9.25)$$

è integrabile secondo Riemann su E . In tal caso si pone

$$\int_A f \equiv \int_E f_A. \quad (9.26)$$

Chiaramente tale definizione non dipende dal "rettangolo di riferimento" E . La classe fondamentale (dal punto di vista dell'integrazione secondo Riemann) è la classe delle funzioni continue. In tale ambito dimostreremo i due seguenti risultati.

²⁶Esercizio 9.8.

²⁷Si veda la Proposizione 5.13.

Proposizione 9.20 Sia $A \subset E$ un insieme misurabile secondo Peano-Jordan con E rettangolo limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e continua. Allora f è integrabile su A .

Proposizione 9.21 Sia $B \in \mathcal{N}^n$ come in (9.23) e sia $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Allora la funzione

$$x \in A \rightarrow g(x) \equiv \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy, \quad (9.27)$$

è una funzione uniformemente continua e

$$\int_B f = \int_A g \equiv \int_A \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (9.28)$$

Osservazione 9.22 (i) Poiché la funzione $g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$ definita nella Proposizione è uniformemente continua sull'insieme $A \in \mathcal{N}^{n-1}$ la formula (9.28) può essere iterata riducendo il calcolo dell'integrale n -dimensionale $\int_B f$ al calcolo successivo di n integrali unidimensionali.

(ii) Se $B_1, \dots, B_N$ sono insiemi disgiunti in $\mathcal{N}^n$, e f è uniformemente continua su $B_1 \cup \dots \cup B_N$, dall'additività dell'integrale di Riemann segue che²⁸

$$\int_{B_1 \cup \dots \cup B_N} f = \sum_{j=1}^N \int_{B_j} f. \quad (9.29)$$

Esempio 9.23 (i) Calcoliamo l'integrale di $f(x, y) \equiv e^{x-y}$ sul triangolo $T \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \text{ e } x + y < 1\}$. Osserviamo che T è un insieme C -normale (sia rispetto all'asse delle x che all'asse delle y) essendo, ad esempio, $T = \{(x, y) : 0 < y < 1 - x \text{ con } x \in (0, 1)\}$; inoltre f è continua su $\mathbb{R}^2$ ed in particolare è continua sulla chiusura di T ; dunque f è uniformemente continua su T . Si ha allora

$$\int_T f = \int_{(0,1)} \left(\int_0^{1-x} e^{x-y} dy \right) dx = \int_0^1 e^x \left(\int_0^{1-x} e^{-y} dy \right) dx = \frac{3e^2 - 2e + 1}{2e}.$$

(ii) Calcoliamo la misura n -dimensionale dell'insieme $S_n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$. L'insieme S_n è C -normale essendo (ad esempio) $S_n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < x_2 \text{ con } (x_2, \dots, x_n) \in S_{n-1}\}$. Quindi, iterando n volte la formula (9.28), si ha

$$\begin{aligned} \text{mis}_n S_n &= \int_{S_{n-1}} \left(\int_0^{x_2} dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n = \int_0^1 \left(\cdots \left(\int_0^{x_3} \left(\int_0^{x_2} dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots \right) dx_n \\ &= \int_0^1 \frac{x_n^{n-1}}{(n-1)!} dx_n = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

²⁸Si osservi che, nel presente caso, $f_B = f_{B_1} + \dots + f_{B_N}$.

Dimostrazione (della Proposizione 9.20) Sia E un rettangolo limitato di riferimento contenente A . Dal punto (i) dell'Osservazione 9.16 segue che esiste un insieme elementare (che possiamo assumere) aperto $E_0 \equiv \cup_i R'_i \subset E$ tale che $\partial A \subset E_0$ e $\text{mis } E_0 < \varepsilon$. Sia $\{R''_j\}$ una partizione dell'insieme elementare $E \setminus E_0$ tale che $\text{diam } R''_j < \delta$ per ogni j . Dato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ se $x, y \in A$ e $|x - y| < \delta$. Si osservi che, per ogni j , o $R''_j \subset A^c$ (e quindi $\text{osc}(f_A, R''_j) = 0$) oppure $R''_j \subset A$ (ed in tal caso $\text{osc}(f, R''_j) < \varepsilon$ poichè $\text{diam } R''_j < \delta$). La collezione di tutti i rettangoli R'_i e R''_j costituisce una partizione, $\{R_k\}$, di E e

$$\begin{aligned} \sum_k \text{osc}(f_A, R_k) \text{mis}_n R_k &= \sum_{R_k \subset A} \text{osc}(f_A, R_k) \text{mis}_n R_k \\ &\quad + \sum_{R_k \subset E_0} \text{osc}(f_A, R_k) \text{mis}_n R_k \\ &\leq \varepsilon \text{mis}_n A + 2 \sup_A |f| \varepsilon, \end{aligned}$$

il che implica l'asserto²⁹. ■

Dimostrazione (della Proposizione 9.21) Cominciamo col dimostrare che g è uniformemente continua su A . Dato ε sia $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, x' \in A$ con $|x - x'| \leq \delta$ e per ogni $(x, y), (x', y') \in B$ con $|x - x'| \leq \delta$ e $|y - y'| \leq \delta$, si abbia

$$|\alpha(x) - \alpha(x')| \leq \varepsilon, \quad |\beta(x) - \beta(x')| \leq \varepsilon, \quad |f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon.$$

Sia $M \equiv \sup_B |f|$, $a \equiv \inf_A \alpha$, $b \equiv \sup_A \beta$ e sia $\chi(x, y) \equiv \chi_{(\alpha(x), \beta(x))}(y)$, (si noti che $-\infty < a \leq b < \infty$, $M < \infty$). Allora, se $|x - x'| \leq \delta$ si ha

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy - \int_{\alpha(x')}^{\beta(x')} f(x', y) dy \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x', y) [f_B(x', y) - f_B(x, y)] dy + \int_{-\infty}^{\infty} [\chi(x', y) - \chi(x, y)] f_B(x, y) dy \right| \\ &\leq \varepsilon(b - a) + M\{|\alpha(x) - \alpha(x')| + |\beta(x) - \beta(x')|\} \leq \varepsilon\{(b - a) + 2M\}, \end{aligned}$$

il che prova l'uniforme continuità di g .

Si osservi che dalle Proposizioni 9.18 e 9.20 segue che f è integrabile su B e g è integrabile su A .

Sia $E \equiv E' \times [a, b]$ un rettangolo limitato che contenga al suo interno B (ovvero $A \subset E'$ e $\inf_A \alpha > a$, $\sup_A \beta < b$). Dato $\varepsilon > 0$ sia $0 < \delta < \varepsilon$ tale che: (a) $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$ se $(x, y), (x', y') \in B$ con $|(x, y) - (x', y')| < \delta$; (b) $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$ se $x, x' \in A$ con $|x - x'| < \delta$. Siano $\{R_i\}$ una partizione di E' e $\{I_j\}$ una partizione di $[a, b]$ tali che $\text{diam } R_i < \delta$, $\text{diam } I_j < \delta$ e $\text{diam}(R_i \times I_j) < \delta$ per ogni i e j . Poichè ∂B e ∂A sono insiemi di misura nulla, esistono due insiemi

²⁹Si ricordi la (9.20).

elementari $E_0 \subset E$ e $E'_0 \subset E'$ che ricoprono, rispettivamente, ∂B e ∂A e di misura (rispettivamente n ed $(n-1)$ dimensionale) inferiore ad ε . Usando l'idea della dimostrazione della Proposizione 9.1 possiamo assumere che i rettangoli R che costituiscono E_0 abbiano la forma $R' \times I$ con R' rettangolo in E' e I intervallo di $[a, b]$. Prendendo partizioni unioni ed eventualmente affinando le partizioni ottenute possiamo costruire partizioni $\mathcal{P}' \equiv \{R'_i\}$, $\mathcal{P}_n \equiv \{I_j\}$ e $\mathcal{P} \equiv \{R_{ij}\}$ di, rispettivamente, E' , $[a, b]$ ed E , i cui rettangoli abbiano diametro inferiore a δ e tali che, se denotiamo con $\mathcal{R}_0 \equiv \{R \in \mathcal{P} : R \cap \partial B \neq \emptyset\}$, $\mathcal{R}'_0 \equiv \{R' \in \mathcal{P}' : R' \cap \partial A \neq \emptyset\}$, allora

$$R_{ij} \equiv R'_i \times I_j, \quad \sum_{R \in \mathcal{R}_0} \text{mis}_n R < \varepsilon, \quad \sum_{R' \in \mathcal{R}'_0} \text{mis}_{n-1} R' < \varepsilon, \\ \text{osc}(f_B, R) < \varepsilon \quad \forall R \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{R}_0, \quad \text{osc}(g_A, R') < \varepsilon \quad \forall R' \in \mathcal{P}' \setminus \mathcal{R}'_0.$$

Scegliamo, per ogni i e j , $x^{(i)} \in R'_i$ e $y^{(j)} \in I_j$. Allora³⁰

$$\begin{aligned} \left| \int_B f - \sum_{i,j} f_B(x^{(i)}, y^{(j)}) \text{mis}_n R_{ij} \right| &= \left| \sum_{i,j} \int_{R_{ij}} (f_B(x, y) - f_B(x^{(i)}, y^{(j)})) dx dy \right| \\ &\leq \sum_{i,j} \int_{R_{ij}} |f_B(x, y) - f_B(x^{(i)}, y^{(j)})| dx dy \\ &= \sum_{R \in \mathcal{R}_0} \int_R |f_B - f_B(x^{(i)}, y^{(j)})| + \sum_{R \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{R}_0} \int_R |f_B - f_B(x^{(i)}, y^{(j)})| \\ &\leq (2M + (\text{mis}_n E)) \varepsilon \equiv c_1 \varepsilon. \end{aligned} \quad (9.30)$$

In maniera del tutto analoga si trova

$$\left| \int_A g - \sum_i g_A(x^{(i)}) \text{mis}_{n-1} R'_i \right| \leq ((2 \sup_A |g|) + \text{mis}_{n-1} E') \varepsilon \equiv c_2 \varepsilon. \quad (9.31)$$

E ancora, osservando che nel caso unidimensionale si hanno al più due intervalli I_j tali che $I_j \cap \partial[a, b] \neq \emptyset$ e che tutti gli intervalli di $\mathcal{P}_n$ sono lunghi al più $\delta < \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left| g_A(x^{(i)}) - \sum_j f_B(x^{(i)}, y^{(j)}) \text{mis}_1 I_j \right| &= \left| \sum_j \int_{I_j} f_B(x^{(i)}, y) - f_B(x^{(i)}, y^{(j)}) dy \right| \\ &\leq \sum_j \int_{I_j} |f_B(x^{(i)}, y) - f_B(x^{(i)}, y^{(j)})| dy \leq (2M + (b-a)) \varepsilon \equiv c_3 \varepsilon. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Mettendo assieme (9.30), (9.31) e (9.32) ed osservando che

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} f_B(x^{(i)}, y^{(j)}) \text{mis}_n R_{ij} &= \sum_{i,j} f_B(x^{(i)}, y^{(j)}) (\text{mis}_{n-1} R'_i) (\text{mis}_1 I_j) \\ &= \sum_i \left(\sum_j f_B(x^{(i)}, y^{(j)}) \text{mis}_1 I_j \right) \text{mis}_{n-1} R'_i, \end{aligned}$$

³⁰Si osservi anche che $\int_{R_{ij}} dx dy = \text{mis}_n R_{ij} = (\text{mis}_{n-1} R'_i) (\text{mis}_1 I_j)$.

si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \int_B f - \int_A g \right| &\leq \left| \int_B f - \sum_{i,j} f_B(x^{(i)}, y^{(j)}) \operatorname{mis} R_{ij} \right| \\ &+ \left| \sum_{i,j} f_B(x^{(i)}, y^{(j)}) \operatorname{mis}_n R_{ij} - \sum_i g_A(x^{(i)}) \operatorname{mis} R'_i \right| \\ &+ \left| \sum_i g_A(x^{(i)}) \operatorname{mis} R_i - \int_A g \right| \leq c_4 \varepsilon, \end{aligned}$$

dove $c_4 \equiv c_1 + c_2 + c_3(\operatorname{mis}_{n-1} A)$. Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. ■

Osservazione 9.24 Come nel caso unidimensionale (si veda 0.1) l'integrale di Riemann può essere esteso a funzioni non limitate o a domini non limitati. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un rettangolo qualunque e sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che f è integrabile secondo Riemann su E se data una successione arbitraria di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan $\{E_k\}$ tali che $E_k \subset E_{k+1}$, $E_k \subset E$ e $\cup_k E_k = E$ si ha che f è integrabile secondo Riemann su E_k e $\sup_k \int_{E_k} |f| < \infty$. In tal caso esiste il $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$, non dipende dalla scelta degli E_k e tale limite definisce l'integrale di Riemann di f su E , $\int_E f$. Se esiste solamente il $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$, f verrà detta integrabile secondo Riemann in senso improprio. Tale definizione estende automaticamente anche la misura di Peano-Jordan ad insiemi non limitati. Ad esempio l'insieme $A \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \text{ e } 0 < y < e^{-x}\}$ è misurabile secondo Peano-Jordan³¹ e $\operatorname{Area} A = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Area}(A \cap [0, k] \times [0, 1]) = \lim \int_0^k e^{-x} dx = 1$.

9.5 Funzioni $\mathcal{L}^1$

In questo paragrafo “costruiremo”, tramite opportuni limiti di funzioni a scalini, la classe delle funzioni integrabili secondo Lebesgue che denoteremo con $\mathcal{L}^1$ (o più precisamente con $\mathcal{L}^1(E)$ indicando esplicitamente l'insieme di riferimento su cui si considera l'integrazione). Tale classe estende l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann e soprattutto permette di introdurre uno spazio funzionale completo (uno spazio di Banach che denoteremo con L^1) rispetto alla norma data dall'integrale del modulo.

Definizione 9.25 Diremo che una proprietà $\mathcal{P}$ vale “quasi ovunque in $A \subset \mathbb{R}^n$ ” (in breve: q.o. in A) o “per quasi tutti gli $x \in A$ ” se esiste un insieme $Q \subset A$ di misura nulla tale che $\mathcal{P}$ vale per ogni $x \in A \setminus Q$; l'insieme Q viene detto “eccezionale” (rispetto alla proprietà $\mathcal{P}$).

Ad esempio³² $1 - \chi_{\mathbb{Q}^n}$ è una funzione q.o. strettamente positiva e l'insieme eccezionale è dato da $\mathbb{Q}^n$.

³¹Per ogni $B \subset E$ misurabile secondo Peano-Jordan con E rettangolo limitato si ha che $A \cap B$ è un insieme C -normale e quindi misurabile e così è l'insieme $A \cap B = (A \cap E) \cap B$.

³²A volte la funzione caratteristica dei vettori a componenti irrazionali $1 - \chi_{\mathbb{Q}^n}$ viene chiamata “funzione di Dirichlet”.

Il seguente risultato è alla base della costruzione delle funzioni integrabili secondo Lebesgue.

Fissiamo un rettangolo di riferimento non degenere $E \subset \mathbb{R}^n$ (ad esempio $E = \mathbb{R}^n$).

Proposizione 9.26 *Sia $\{f_k\}_{k \geq 1}$ una successione monotona non decrescente³³ di funzioni in $S(E)$ e tale che $\sup_{k \geq 1} \int_E f_k < \infty$. Allora f_k converge quasi ovunque in³⁴ E .*

Dimostrazione Innanzitutto, sostituendo eventualmente la successione $\{f_k\}$ con la successione $\{f_k - f_1\}$ possiamo assumere che $f_k \geq 0$ per ogni $k \geq 1$. Sia $Q \equiv \{x \in E : \sup_k f_k(x) = +\infty\}$: la tesi è equivalente a dimostrare che Q è un insieme di misura nulla. Denotiamo le funzioni a scalini f_k con

$$f_k \equiv \sum_{i=1}^{N_k} c_i^{(k)} \chi_{R_i^{(k)}} \quad , \quad (9.33)$$

dove $R_i^{(k)} \subset E$ sono rettangoli limitati a due a due disgiunti. Sia $Q' \equiv \bigcup_{i,k} \partial R_i^{(k)}$. Poiché Q' è di misura nulla (essendo unione numerabile di facce di rettangoli ovvero di rettangoli degeneri), basterà dimostrare che $\tilde{Q} \equiv Q \setminus Q'$ è un insieme di misura nulla. Sia $M \equiv \sup_k \int_E f_k$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $E_k \equiv \{x \in E \setminus Q' : f_k(x) \geq M/\varepsilon\}$. Chiaramente E_k è unione finita di rettangoli aperti (e limitati) e, se chiamiamo $\mathcal{R}_k$ l'insieme di tali rettangoli, si ha $\tilde{Q} \subset \bigcup_k E_k = \bigcup_k \bigcup_{R \in \mathcal{R}_k} R$. La funzione f_k è costante su ogni $R \in \mathcal{R}_k$ e, se chiamiamo $c_R^{(k)}$ tale valore costante, dalle definizioni date segue che

$$\frac{M}{\varepsilon} \sum_{R \in \mathcal{R}_k} \text{mis } R \leq \sum_{R \in \mathcal{R}_k} c_R^{(k)} \text{mis } R \leq \int_E f_k \leq M \quad . \quad (9.34)$$

Essendo $\{f_k\}$ non decrescente, si ha che $E_k \equiv \bigcup_{R \in \mathcal{R}_k} R \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}_{k+1}} R \equiv E_{k+1}$, e dalla Proposizione 9.1 segue che $A_{k+1} \equiv E_{k+1} \setminus E_k$ è unione disgiunta di rettangoli limitati: chiamiamo $\mathcal{R}'_{k+1}$ l'insieme di tali rettangoli. Dunque (9.34) implica, per ogni $k \geq 1$,

$$\sum_{R \in \mathcal{R}_1} \text{mis } R + \sum_{j=2}^k \sum_{R \in \mathcal{R}'_j} \text{mis } R \leq \sum_{R \in \mathcal{R}_k} \text{mis } R \leq \varepsilon \quad . \quad (9.35)$$

In conclusione $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}'_2, \mathcal{R}'_3, \dots\}$ è una collezione numerabile di rettangoli aperti la cui unione contiene $\tilde{Q}$ e la somma delle cui misure [per (9.35)] non eccede ε . Dunque $\tilde{Q}$ è un insieme di misura nulla. ■

Introduciamo ora una classe di funzioni “intermedia”, definita da limiti q.o. di funzioni a scalini soddisfacenti le ipotesi della Proposizione 9.26, e su tale classe definiamo l'integrale di Lebesgue:

³³Ossia $f_{k+1}(x) \geq f_k(x)$ per ogni $x \in E$.

³⁴Ossia esiste un insieme $Q \subset E$ di misura nulla tale che la successione numerica $\{f_k(x)\}$ converge per ogni $x \in E \setminus Q$.

Definizione 9.27 $\mathcal{F}(E)$ è la classe di funzioni f per le quali esiste una successione monotona non decrescente di funzioni in $S(E)$ tali che $\sup_k \int_E f_k < \infty$ e $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ per x quasi ovunque in E ; per tali funzioni f definiamo integrale di Lebesgue su E la quantità

$$\int_E f \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \sup_k \int_E f_k. \quad (9.36)$$

Affinché tale definizione sia ben posta bisogna verificare che il numero definito in (9.36) non dipenda dalla particolare successione $\{f_k\}$ ma soltanto dal suo limite (limite che è definito quasi ovunque ossia a meno di un insieme di misura nulla). Tale verifica segue immediatamente dal seguente

Lemma 9.28 Siano $\{f_k\}$ e $\{g_k\}$ successioni non decrescenti di funzioni in $S(E)$ convergenti q.o., rispettivamente, a due funzioni³⁵ f e g . Se $\sup_k \int_E g_k < \infty$ e $f \leq g$ q.o. allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k. \quad (9.37)$$

Assumendo la validità di tale Lemma, se³⁶ $f \in \mathcal{F}$ e $S \ni f_k \uparrow f$ e $S \ni g_k \uparrow f$ (con $\sup_k \int_E f_k$ e $\sup_k \int_E g_k$ finiti) possiamo applicare il Lemma (con $f = g$ q.o.) scambiando il ruolo di f_k e g_k , per cui

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k,$$

e da tale relazione segue l'uguaglianza dei limiti che definiscono l'integrale di f . ■

Il Lemma 9.28 è a sua volta una semplice conseguenza del seguente

Lemma 9.29 Sia $\{f_k\}$ una successione non crescente di funzioni non negative in $S(E)$. Allora

$$f_k \downarrow 0 \quad \text{q.o. in } E \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = 0. \quad (9.38)$$

Dimostrazione (del Lemma 9.29) Cominciamo con " $\implies$ ": Siano f_k , date come in (9.33), le funzioni a scalini tali che $f_k \downarrow 0$ q.o. in E . Sia $E_0 \equiv \bigcup_{i=1}^{N_1} R_i^{(1)}$. Poiché

³⁵ Ossia esiste $Q \subset E$ di misura nulla tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g$ per ogni $x \in E \setminus Q$.

³⁶ Qualora non vi sia ambiguità ometteremo l'indicazione esplicita dell'insieme E su cui si sta integrando nella notazione di $\mathcal{F}(E)$ e di altre classi funzionali che considereremo in seguito. D'ora in poi useremo anche le seguenti **notazioni standard**: " $f_k \uparrow f$ " denota una successione monotona non decrescente di funzioni che converge alla funzione f ossia $f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \forall k \geq 1$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$; " $f_k \uparrow f$ q.o. in E " significa, come già detto, che la successione monotona non decrescente $\{f_k(x)\}$ converge per $x \in E \setminus Q$ per un opportuno insieme di misura nulla Q ; analogamente $f_k \downarrow f$ denota una successione monotona non crescente di funzioni che convergono alla funzione f .

E_0 è limitato esiste $d > 0$ tale che $E_0 \subset [-d/2, d/2]^n$. Inoltre tutti i rettangoli $R_i^{(k)}$ su cui le f_k possono essere strettamente positive sono contenuti in E_0 . Osserviamo anche che se $M \equiv \sup_{\{1 \leq i \leq N_1\}} c_i^{(1)} = \sup f_1$ allora $f_k \leq M$ per ogni $k \geq 1$. Sia Q_0 l'insieme di misura nulla su cui f_k non converge a 0 e sia $Q \equiv Q_0 \cup \bigcup_{i,k} \partial R_i^{(k)}$, che, per il punto (ii) dell'Osservazione 9.7, è anch'esso un insieme di misura nulla. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo Q di misura nulla esiste una collezione $\mathcal{R}_1$ di cubi aperti la cui unione ricopre Q e la somma delle cui misure non eccede ε . Per ogni $x \in E \setminus Q$, $f_k(x) \downarrow 0$, quindi esiste un intero $k(x)$ tale che $f_{k(x)}(x) \leq \varepsilon$. Sia $R(x)$ il più grande rettangolo aperto contenente x su cui $y \rightarrow f_{k(x)}(y)$ sia costante e sia $\mathcal{R}_2$ l'insieme dei rettangoli $R(x)$ al variare di $x \in E \setminus Q$. Chiaramente $\bigcup_{R \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} R$ è un ricoprimento aperto di E_0 e, per compattezza, esistono N rettangoli $R_i \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ che ricoprono E_0 . Cambiando eventualmente nome a tali rettangoli possiamo assumere che per $1 \leq i \leq j$, $R_i \in \mathcal{R}_1$ mentre per $j+1 \leq i \leq N$, $R_i \in \mathcal{R}_2$. Si osservi che $\sum_{i=1}^j \text{mis } R_i \leq \varepsilon$, mentre i rettangoli R_i per $i > j$ sono della forma $R_i = R(x^{(i)})$ per un opportuno $x^{(i)} \in E_0 \setminus Q$. Sia $k_0 \equiv \sup_{\{j+1 \leq i \leq N\}} k(x^{(i)})$ e si noti che $f_{k_0}(x) \leq \varepsilon$ per ogni $x \in R_{j+1} \cup \dots \cup R_N$. In conclusione, per ogni $k \geq k_0$ si ha

$$\begin{aligned} \int_E f_k &\leq \int_{E_0} f_{k_0} \leq \int_{R_1 \cup \dots \cup R_j} f_{k_0} + \int_{R_{j+1} \cup \dots \cup R_N} f_{k_0} \\ &\leq M \sum_{i=1}^j \text{mis } R_i + \varepsilon \int_{E_0} 1 \leq \varepsilon (M + d^n). \end{aligned}$$

La dimostrazione di $\Leftarrow$ è molto simile alla dimostrazione della Proposizione 9.26: se Q' denota l'insieme di misura nulla $\bigcup_{i,k} \partial R_i^{(k)}$ basta dimostrare che l'insieme $\{x \in E \setminus Q' : \limsup f_k(x) > 0\}$ è di misura nulla. Tale insieme coincide con $\bigcup_j Q_j$ dove $Q_j \equiv \{x \in E \setminus Q' : \limsup f_k(x) \geq 1/j\}$ e dunque basterà mostrare che Q_j è di misura nulla per ogni $j \geq 1$. Dato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{k}$ tale che $\int f_k \leq \varepsilon/j$ per ogni $k \geq \bar{k}$. Chiaramente

$$Q_j \subset \{x \in E \setminus Q' : \exists k \geq \bar{k} \text{ con } f_k(x) \geq 1/(2j)\} = \bigcup_{k \geq \bar{k}} \bigcup_{R \in \mathcal{R}_k} R,$$

dove $\mathcal{R}_k$ è una collezione finita di rettangoli aperti e disgiunti contenuti in E e su cui f_k assume un valore costante non inferiore a $1/(2j)$. Quindi per ogni $k \geq \bar{k}$

$$\frac{1}{2j} \sum_{R \in \mathcal{R}_k} \text{mis } R \leq \int_E f_k \leq \frac{\varepsilon}{j} \quad \Rightarrow \quad \sum_{R \in \mathcal{R}_k} \text{mis } R \leq 2\varepsilon. \quad (9.39)$$

Essendo $\{f_k\}$ non crescente, si ha che $E_k \equiv \bigcup_{R \in \mathcal{R}_k} R \supset \bigcup_{R \in \mathcal{R}_{k+1}} R \equiv E_{k+1}$, e dalla Proposizione 9.1 segue che $A_{k+1} \equiv E_k \setminus E_{k+1}$ è unione disgiunta di rettangoli limitati: chiamiamo $\mathcal{R}'_{k+1}$ l'insieme di tali rettangoli. Dunque (9.39) implica, per ogni $k \geq 1$,

$$\sum_{R \in \mathcal{R}_1} \text{mis } R + \sum_{j=2}^k \sum_{R \in \mathcal{R}'_j} \text{mis } R \leq \sum_{R \in \mathcal{R}_k} \text{mis } R \leq 2\varepsilon. \quad (9.40)$$

In conclusione $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}'_2, \mathcal{R}'_3, \dots\}$ è una collezione numerabile di rettangoli aperti la cui unione contiene Q_j e la somma delle cui misure [per (9.40)] non eccede ε . Dunque Q_j è un insieme di misura nulla. ■

Dimostrazione (del Lemma 9.28) Per ogni j fissato definiamo la successione di funzioni a scalini $h_k \equiv \sup\{f_j - g_k, 0\}$. Poiché (q.o.) $g \geq f \geq f_j$, si ha che $h_k \downarrow 0$ q.o. e quindi, per il Lemma 9.29, $\lim \int_E h_k = 0$. Da ciò segue

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E (f_j - g_k) = \int_E f_j - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k,$$

e cioè, per ogni j , $\int f_j \leq \lim \int g_k$. Prendendo il limite per j che tende ad infinito in tale relazione si ha l'asserto. ■

Osservazione 9.30 (i) Dal Lemma 9.28 segue che se $f_k \uparrow f$ (q.o.) con $f_k \in S(E)$ e se $\sup_k \int f_k = +\infty$ allora $f \notin \mathcal{F}$.

Infatti se per assurdo fosse $f \in \mathcal{F}$ allora per definizione esisterebbe una successione di funzioni a scalini $g_k \uparrow f$ q.o. con $\sup_k \int g_k < +\infty$ ma allora dal Lemma 9.28 (con $g = f$) seguirebbe che $\lim \int f_k \leq \lim \int g_k < \infty$. ■

(ii) Dalla definizione di $\mathcal{F}$ e dalla Proposizione 9.5 segue immediatamente che se $f, g \in \mathcal{F}$ e se a è un numero positivo allora le funzioni af , $f + g$, $\sup\{f, g\}$ appartengono anch'esse alla classe $\mathcal{F}$ ed inoltre

$$\int_E (af) = a \int_E f, \quad (a \geq 0); \quad \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g. \quad (9.41)$$

[Ad esempio se $f_k \uparrow f$ e $g_k \uparrow g$ (con $f_k, g_k \in S$) allora $h_k \equiv \sup\{f_k, g_k\} \in S$ e $h_k \uparrow \sup\{f, g\}$.]

(iii) Se $f \in \mathcal{F}$ e $f \geq 0$ allora esiste una successione di funzioni a scalini $f_k \uparrow f$ con $f_k \geq 0$.

[Infatti se $S \ni g_k \uparrow f$ è una successione che definisce f basta prendere $f_k = \sup\{g_k, 0\}$.]

(iv) Le funzioni integrabili secondo Riemann su E (rettangolo limitato di $\mathbb{R}^n$) coincidono q.o. con le funzioni f tali che sia f che $-f$ appartengono alla classe $\mathcal{F}(E)$ o più precisamente se $f \in \mathcal{R}(E)$ allora f e $-f \in \mathcal{F}(E)$; viceversa se f e $-f \in \mathcal{F}(E)$ allora f coincide q.o. con una funzione $g \in \mathcal{R}(E)$. Inoltre, sulle funzioni integrabili secondo Riemann, i valori degli integrali secondo Riemann e secondo Lebesgue coincidono.

Dimostrazione Se $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, dalla Definizione 9.10 segue che, per ogni intero positivo k , esistono due funzioni $g_k, h_k \in S(E)$ tali che $g_k \leq f \leq h_k$ in E e $\int_E (h_k - g_k) \leq 1/k$. Senza perdita di generalità, possiamo assumere

che $\{g_k\}$ sia monotona non decrescente e $\{h_k\}$ sia monotona non crescente³⁷. Per la Proposizione 9.26, poiché, per ogni k , $\int g_k \leq \int h_1 < \infty$ (essendo $g_k \leq f \leq h_1$), esiste un insieme di misura nulla Q_1 ed una funzione $g \in \mathcal{F}$ tale che $g_k \uparrow g$ in $E \setminus Q_1$ e tale che l'integrale secondo Lebesgue di g è dato da $\lim \int g_k$; ma per come era stata scelta la successione $\{g_k\}$ tale integrale coincide anche con quello di Riemann. D'altra parte, per il Lemma 9.29 applicato alla successione non crescente di funzioni a scalini non negative $(h_k - g_k)$ i cui integrali tendono a zero, si ha che esiste un insieme di misura nulla Q_2 tale che $(h_k - g_k) \rightarrow 0$ in $E \setminus Q_2$. Se Q denota l'insieme di misura nulla $Q_1 \cup Q_2$, per $x \in E \setminus Q$, i numeri $g(x)$ e $f(x)$ appartengono all'intervallo $[g_k(x), h_k(x)]$ la cui ampiezza tende a 0 per $k \rightarrow \infty$. Dunque, mandando k ad infinito, si deduce che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in E \setminus Q$ e quindi che $f = g$ q.o. in E , il che significa che $f \in \mathcal{F}$. D'altra parte poiché anche $-f$ è integrabile secondo Riemann si ha anche che $-f \in \mathcal{F}$. Viceversa se f è una funzione tale che $f, -f \in \mathcal{F}$ allora esistono f_k, g_k a scalini ed un insieme Q di misura nulla tale che $f_k(x) \uparrow f(x)$ e $g_k(x) \downarrow f(x)$ per ogni $x \in E \setminus Q$. Si noti che poiché $g_k - f_k \downarrow 0$ q.o., per il Lemma 9.29, $\int (g_k - f_k) \rightarrow 0$. Poniamo $\tilde{f}_k \equiv f_k$ su $E \setminus Q$, $\tilde{f}_k = g_k$ su Q ; $\tilde{f} = f$ su $E \setminus Q$ e $\tilde{f} = \sup_k \tilde{f}_k$ su Q ; chiaramente $\tilde{f} = f$ q.o. Inoltre $\tilde{f}_k \leq \tilde{f} \leq g_k$ su E e $\int (g_k - \tilde{f}_k) = \int (g_k - f_k) \rightarrow 0$ ovvero $\tilde{f} \in \mathcal{R}(E)$. ■

(v) Daremo ora un **esempio** di una funzione $f \in \mathcal{F}$ che non è integrabile secondo Riemann anche se modificata su di un insieme di misura nulla³⁸. Si noti che (per il punto precedente) $-f \notin \mathcal{F}$ e dunque $\mathcal{F}$ non è uno spazio vettoriale.

Siano $E \equiv [-1, 1]^n$ e $E_0 \equiv [-1/2, 1/2]^n$. Sia $0 < \gamma < 1$ e sia $\{r_j\}$ una numerazione dei vettori in $\mathbb{R}^n$ a componenti razionali in E_0 : $\{r_j : j \geq 1\} = \mathbb{Q}^n \cap E_0$. Sia K_j il cubo aperto centrato in r_j e di lato $\gamma 2^{-j}$ e sia $A \equiv \bigcup_j K_j \subset E$. Poniamo $f \equiv \chi_A \equiv$ funzione caratteristica di A .

Dimostriamo che $f \in \mathcal{F}(E)$: sia $A_k \equiv \bigcup_{j=1}^k K_j$ e $f_k \equiv \chi_{A_k}$. Chiaramente $A = \bigcup_k A_k$, $f_k \in S(E)$, $f_k \uparrow f$ in E ed inoltre

$$\int_E f_k \leq \sum_{j=1}^k \text{mis } K_j = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\gamma}{2^j}\right)^n \leq \frac{\gamma^n}{2^n - 1}. \quad (9.42)$$

Dunque $f \in \mathcal{F}(E)$.

Dimostriamo che f non è integrabile secondo Riemann su E : se $g \in S(E)$ e $g \geq f$ su E allora $g \geq 1$ su E_0 (poiché $g \geq 1$ su $\mathbb{Q}^n \cap E_0$). In particolare se $S \ni g \geq f$ allora $\int g \geq 1$. D'altra parte se $S \ni h \leq f$, poiché $\gamma < 1 \leq (2^n - 1)^{1/n}$, da (9.42) segue che

$$\int_E h \leq \int_E f \leq \frac{\gamma^n}{2^n - 1} < 1.$$

Dunque $\sup_{\{h \leq f, h \in S\}} \int h \leq \gamma^n / (2^n - 1) < 1 \leq \inf_{\{g \geq f, g \in S\}} \int g$ il che significa che f non è integrabile secondo Riemann. ■

³⁷Basta infatti sostituire eventualmente g_k e h_k con le successioni $\tilde{g}_k$ e $\tilde{h}_k$ definite da: $\tilde{g}_1 = g_1$, $\tilde{g}_k = \sup\{g_k, \tilde{g}_{k-1}\}$ e $\tilde{h}_1 = h_1$, $\tilde{h}_k = \inf\{h_k, \tilde{h}_{k-1}\}$.

³⁸La funzione di Dirichlet $f = 1 - \chi_{\mathbb{Q}}^n$ su $[0, 1]$ non è integrabile secondo Riemann su $[0, 1]$ ma, d'altra parte, $f = 1$ q.o. in $[0, 1]$.

(vi) $\mathcal{F}$ non è nemmeno un'algebra: in generale, $f \in \mathcal{F}$ non implica che $f^2 \in \mathcal{F}$ come segue dal seguente **esempio**:

Consideriamo la funzione $f(x) \equiv 1/\sqrt{x}$ su $E \equiv (0, 1]$. Definiamo, per ogni intero k positivo, la seguente funzione a scalini: dividiamo $(0, 1]$ in 2^k intervalli $I_i^{(k)} \equiv ((i-1)/2^k, i/2^k]$ ($i = 1, \dots, 2^k$) e su $I_i^{(k)}$ definiamo il valore di f_k come $\inf_{I_i^{(k)}} f$. Chiaramente $f_k \uparrow f$ in E . Inoltre, per ogni $k \geq 1$

$$\int_E f_k \leq \int_{I_1^{(k)}} f_k + \int_{\frac{1}{2^k}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq 3.$$

Dunque $f \in \mathcal{F}(E)$. D'altra parte se $g \equiv f^2 = 1/x$ e se g_k sono funzioni a scalini su E definite in maniera analoga a quanto fatto sopra (cioè il valore di g_k su $I_i^{(k)}$ è dato dallo $\inf_{I_i^{(k)}} g$) si ha di nuovo che $g_k \uparrow g$ su E , ma

$$\int_E g_k \geq \int_{\frac{1}{2^{k-1}}}^1 \frac{1}{x} dx = (k-1) \log 2.$$

Quindi il $\sup_k \int_E g_k = \infty$ e, per il punto (i) di questa Osservazione, $g = f^2 \notin \mathcal{F}(E)$.

Siamo pronti a definire le funzioni integrabili secondo Lebesgue che non sono altro che differenze q.o. di funzioni in $\mathcal{F}$:

Definizione 9.31 $\mathcal{L}^1(E)$ è la classe di funzioni $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ per le quali esistono due funzioni $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(E)$ tali che $f = f_1 - f_2$ q.o. in E . Per tali funzioni f definiamo l'integrale di Lebesgue su E come

$$\int_E f \equiv \int_E f_1 - \int_E f_2. \quad (9.43)$$

Di nuovo dobbiamo controllare, affinché la definizione sia ben posta, che il numero definito in (9.43) non dipenda dalle particolari f_1 e f_2 ma solo dalla loro differenza (q.o.). Ma questo è ovvio: se f è anche data (q.o.) dalla differenza $g_1 - g_2$ con $g_i \in \mathcal{F}$, allora si ha che (per il punto (ii) dell'Osservazione 9.30) $f_1 + g_2 = f_2 + g_1 \in \mathcal{F}$ (l'uguaglianza, come al solito, vale q.o. in E) e quindi $\int(f_1 + g_2) = \int(f_2 + g_1)$. Poiché (nuovamente per il punto (ii) dell'Osservazione 9.30) l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali si ha che $\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2$. Questo argomento mostra anche che:

l'integrale di Lebesgue di due funzioni in $\mathcal{L}^1(E)$ che coincidano quasi ovunque assume lo stesso valore.

Raccogliamo nella seguente Proposizione alcune semplici proprietà della classe delle funzioni integrabili secondo Lebesgue.

Proposizione 9.32 Nelle seguenti affermazioni $\mathcal{L}^1$ denota $\mathcal{L}^1(E)$.

(i) $\mathcal{L}^1$ è uno spazio vettoriale e l'integrale di Lebesgue è un operatore lineare e positivo su $\mathcal{L}^1$: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{L}^1, af \in \mathcal{L}^1, f + g \in \mathcal{L}^1$ e vale $\int(f + g) = \int f + \int g$; se $\mathcal{L}^1 \ni f \geq 0$ (q.o.) allora $\int f \geq 0$.

(ii) Le parti positive e negative³⁹ f_+ , f_- e il modulo $|f|$ di una funzione $f \in \mathcal{L}^1$ appartengono a $\mathcal{L}^1$. Se $f, g \in \mathcal{L}^1$ allora $\sup\{f, g\}, \inf\{f, g\} \in \mathcal{L}^1$.

(iii) Se $f \in \mathcal{L}^1$ e $\int_E |f| = 0$ allora $f = 0$ q.o. in E .

(iv) Per ogni $f \in \mathcal{L}^1$ esiste una successione di funzioni a scalini $\{f_k\}$ tale che $f_k \rightarrow f$ q.o. e $\int_E |f - f_k| \rightarrow 0$.

(v) L'integrale di Lebesgue è invariante per traslazioni ovvero per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - x_0) dx. \quad (9.44)$$

Osservazione 9.33 (i) Si noti che dalla linearità e la positività dell'integrale segue che se $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$

$$f \leq g \text{ (q.o.)} \implies \int_E f \leq \int_E g.$$

Dunque, poiché $\pm f \leq |f|$, si ha anche che (per ogni $f \in \mathcal{L}^1$)

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|. \quad (9.45)$$

(ii) Se $f \in \mathcal{L}^1$ e $f \geq 0$ (q.o.) allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $f_i \in \mathcal{F}$ tali che: $f_i \geq 0$ (q.o.), $\int f_i \leq \varepsilon$ e $f = f_1 - f_2$.

[Infatti, dalla definizione di $\mathcal{L}^1$ segue che esistono due funzioni $g_i \in \mathcal{F}$ tali che $f = g_1 - g_2$ e dalla definizione di $\mathcal{F}$ segue che esistono $g_i^{(k)} \rightarrow g_i$ (q.o.) con $g_i^{(k)} \in S$ e tali che $\int g_i = \sup_k \int g_i^{(k)}$. Sia $\bar{k}$ tale che $\int g_2 - g_2^{(\bar{k})} \leq \varepsilon$. Le funzioni f_i saranno allora date da $f_i \equiv g_i - g_2^{(\bar{k})}$.]

(iii) Se E' è un rettangolo contenuto in E e se $f \in \mathcal{L}^1(E)$ allora $f \in \mathcal{L}^1(E')$, $f \cdot \chi_{E'} \in \mathcal{L}^1(E)$ e

$$\int_{E'} f = \int_E f \chi_{E'}.$$

[Se $g \in \mathcal{F}(E)$ e se $S(E) \ni g_k \uparrow g$, allora $\chi_{E'} g_k \in S(E')$ e $\chi_{E'} g_k \uparrow f$ su E' (e $\chi_{E'} g_k \uparrow \chi_{E'} f$ su E).]

(iv) Il punto (iv) della Proposizione 9.32 è ovviamente equivalente a

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(E), \forall \varepsilon > 0 \exists g \in S(E) : \int_E |f - g| \leq \varepsilon. \quad (9.46)$$

Infatti, si può anche assumere che $\text{supp}(g)$ sia contenuto in⁴⁰ E (basta sostituire i rettangoli su cui g è diversa da zero con opportuni rettangoli leggermente più piccoli).

³⁹Si ricorda che $f_+ = \sup\{f, 0\}$ e $f_- = -\inf\{f, 0\}$ cosicché $f_{\pm} \geq 0$, $f = f_+ - f_-$ e $|f| = f_+ + f_-$.

⁴⁰Per chiarezza: se $E = (0, 1)$, la funzione $\chi_{(0,1)} \in S(E)$ ma il suo supporto $[0, 1]$ non è contenuto in E .

Dimostrazione (della Proposizione 9.32 escluso il punto (iii) che verrà dimostrato al punto (iii) dell'Osservazione 9.35) (i): La tesi è conseguenza immediata della definizione di $\mathcal{L}^1$ e delle proprietà di $\mathcal{F}$. [Ad esempio se $f = f_1 - f_2$ con $f_i \in \mathcal{F}$ e se $a \in \mathbb{R}$ allora $af = g_1 - g_2$ dove $g_i = af_i$ se $a \geq 0$ mentre se $a < 0$, $g_1 = (-a)f_2$ e $g_2 = (-a)f_1$].

(ii): Se $\mathcal{L}^1 \ni f = f_1 - f_2$ con $f_i \in \mathcal{F}$ allora $\sup\{f_1, f_2\} \in \mathcal{F}$ e

$$f_+ = \sup\{f_1, f_2\} - f_2, \quad f_- = \sup\{f_1, f_2\} - f_1$$

da cui segue che $f_{\pm} \in \mathcal{L}^1$ e quindi (per (i) ed essendo $|f| = f_+ + f_-$) anche $|f| \in \mathcal{L}^1$. Inoltre se $f, g \in \mathcal{L}^1$, osservando che

$$\sup\{f, g\} = (f - g)_+ + g, \quad \inf\{f, g\} = -\sup\{-f, -g\},$$

si che anche $\sup\{f, g\}$ e $\inf\{f, g\}$ appartengono a $\mathcal{L}^1$.

(iv): Sia $f = g - h$ con $g, h \in \mathcal{F}$ e siano $g_k \uparrow g$ e $h_k \uparrow h$ (con $g_k, h_k \in S$). Se $f_k \equiv g_k - h_k$ allora $|f - f_k| = g - g_k + h - h_k$ e

$$\int |f - f_k| = \int g - g_k + \int h - h_k \rightarrow 0.$$

(v): Chiaramente basta dimostrare l'asserto per funzioni $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e per tali funzioni l'asserto è conseguenza del punto (iv) della Proposizione 9.5. ■

9.6 Teoremi sull'integrazione di limiti

La potenza (e la bellezza) dell'integrale di Lebesgue è particolarmente apprezzabile nello scambio tra l'operazione di limite e quella di integrale. Cominciamo con un risultato fondamentale che, in particolare, mostra come sostituendo le funzioni a scalini con funzioni più complicate (in $\mathcal{L}^1$) non si ottiene una classe funzionale più ampia di $\mathcal{L}^1$:

Teorema 9.34 (Convergenza monotona di Beppo Levi) *Sia $\{f_k\}$ una successione non decrescente di funzioni in $\mathcal{L}^1(E)$ tale che $\sup_k \int f_k < \infty$. Allora esiste $f \in \mathcal{L}^1(E)$ tale che $f_k \uparrow f$ q.o. ed inoltre $\int_E |f - f_k| \rightarrow 0$.*

Naturalmente da $\int |f - f_k| \rightarrow 0$ e da (9.45) segue immediatamente che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k = \int f \equiv \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k.$$

Dimostrazione (del Teorema 9.34) Nel corso della dimostrazione tutte le disuguaglianze vanno intese quasi ovunque in E . Dimostriamo prima il teorema nel caso particolare in cui $f_k \in \mathcal{F}$ (nel qual caso otterremo che $f \in \mathcal{F}$). Assumendo, dunque, che $f_k \in \mathcal{F}$, per ogni k esistono $g_j^{(k)} \uparrow f_k$ (per $j \rightarrow \infty$) con $g_j^{(k)} \in S$ e

$\int f_k = \sup_j \int g_j^{(k)}$. Sia $g_k \equiv \sup_{j \leq k} g_j^{(j)}$. Chiaramente $\{g_k\}$ è una successione non decrescente di funzioni a scalini. Inoltre, per ogni $j \leq k$, si ha che $g_k^{(j)} \leq f_j \leq f_k$ e dunque (prendendo il massimo su $j \leq k$) $g_k \leq f_k$ e $\int g_k \leq \int f_k \leq \sup_k \int f_k < \infty$. Da queste osservazioni segue che esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $g_k \uparrow f$ e $\sup \int g_k = \int f$. D'altra parte, per $k \leq j$, $g_j^{(k)} \leq g_j \leq f$ e quindi (prendendo il limite per $j \rightarrow \infty$) $f_k \leq f$. Quindi, essendo $g_k \leq f_k \leq f$ si ha che $f_k \uparrow f$ (q.o.) e $\int g_k \leq \int f_k \leq \int f$ da cui (prendendo l'estremo superiore su k)

$$\int f \leq \lim \int f_k \leq \int f,$$

Poiché $f_k \leq f$, $\int |f - f_k| = (\int f - \int f_k) \rightarrow 0$.

Passiamo al caso generale in cui $f_k \in \mathcal{L}^1$. Sia $g_k \equiv f_{k+1} - f_k$ cosicché $g_k \geq 0$ e $f_k = f_1 + \sum_{j=1}^{k-1} g_j$. Dalle ipotesi segue che

$$\int \sum_{j=1}^{k-1} g_j = \int f_k - \int f_1 \leq \sup_j \int f_j + \int |f_1| < \infty.$$

Dunque la serie numerica a termini positivi $\sum \int g_j$ è convergente. Per il punto (ii) dell'Osservazione 9.33 si ha che, per ogni k , esistono due funzioni $\varphi_k, \psi_k \in \mathcal{F}$ non negative tali che $\int \psi_k \leq 2^{-k}$ e $g_k = \varphi_k - \psi_k$. Quindi $\sum \int \psi_k < \infty$ e, per quanto osservato prima (ed essendo $\sum_1^k \varphi_j = \sum_1^k g_j + \sum_1^k \psi_j$), anche $\sum_{j \geq 1} \int \varphi_j < \infty$. Ora $\sum_1^k \varphi_j$ e $\sum_1^k \psi_j$ appartengono a $\mathcal{F}$ (punto (ii), Osservazione 9.30) e quindi per la prima parte della dimostrazione $\sum_1^k \varphi_j \uparrow \varphi \in \mathcal{F}$ e $\sum_1^k \psi_j \uparrow \psi \in \mathcal{F}$ ed inoltre $\sum_{j \geq 1} \int \varphi_j = \int \varphi$ e $\sum_{j \geq 1} \int \psi_j = \int \psi$. In conclusione, $f_k = f_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j - \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j \rightarrow f_1 + \varphi - \psi \in \mathcal{L}^1$ e

$$\int f_k = \int f_1 + \sum_1^{k-1} \int \varphi_j - \sum_1^{k-1} \int \psi_j \rightarrow \int f_1 + \int \varphi - \int \psi = \int f,$$

il che (essendo $f - f_k \geq 0$) è equivalente a $\int |f - f_k| \rightarrow 0$. ■

Osservazione 9.35 (i) Chiaramente, un enunciato equivalente al Teorema di convergenza monotona è: Se $f_k \in \mathcal{L}^1$ e $f_k \uparrow f \in \mathcal{L}^1$, allora $\int |f - f_k| \rightarrow 0$.

(ii) Un corollario immediato del teorema di convergenza monotona è il seguente utile criterio sull'integrazione termine a termine di serie di funzioni:

Sia $u_k \in \mathcal{L}^1$ e supponiamo che la serie numerica $\sum \int |u_k|$ converga. Allora $\sum_{j=1}^k u_j$ converge (per $k \rightarrow \infty$) q.o. e $\sum \int u_j = \int \sum u_j$.

[Infatti applicando il teorema di convergenza monotona alle funzioni⁴¹ $f_k^\pm \equiv \sum_1^k (u_j)^\pm$ si ha che $f_k^\pm \uparrow f^\pm \in \mathcal{L}^1$ e $\int f_k^\pm \rightarrow \int f^\pm$ e quindi $\sum u_j \equiv \sum (u_j^+ - u_j^-)$ converge q.o. e la tesi segue.]

⁴¹ Come al solito, $(u_j)^\pm$ denotano la parte positiva e la parte negativa di u_j ; si noti che $0 \leq f_k^\pm \uparrow$ e che $\int f_k^\pm \leq \sum \int |u_j| < \infty$.

(iii) **Dimostrazione del punto (iii) della Proposizione 9.32:** Sia $f \in \mathcal{L}^1$ con $\int |f| = 0$ e poniamo $u_k \equiv f$ per ogni $k \in \mathbb{Z}_+$. Poiché $\sum \int |u_k|$ converge (a zero), per il punto precedente $\sum_{j=1}^k u_j = kf$ converge q.o. e quindi $f = 0$ q.o. (nei punti in cui $f(x) \neq 0$, $k|f(x)| \rightarrow \infty$). ■

(iv) Se $f_k \in \mathcal{L}^1$ e $f_k \uparrow f$ (q.o.) e $\sup \int f_k = \infty$ allora⁴² $f \notin \mathcal{L}^1$.

Il teorema forse più importante e con più applicazioni dell'intera teoria è il seguente teorema dovuto a Lebesgue.

Teorema 9.36 (Convergenza dominata) *Assumiamo che la successione $\{f_k\}$ di funzioni in $\mathcal{L}^1(E)$ converga q.o. in E e che esista una funzione $g \in \mathcal{L}^1(E)$ tale che $|f_k| \leq g$ (q.o.). Allora $f_k \rightarrow f \in \mathcal{L}^1(E)$ e $\int_E |f - f_k| \rightarrow 0$.*

Dimostrazione Dati k ed j , sia $g_k^{(j)} \equiv \sup\{f_j, \dots, f_{j+k}\}$ e $h_k^{(j)} \equiv \inf\{f_j, \dots, f_{j+k}\}$. Per il punto (ii) della Proposizione 9.32, $g_k^{(j)}, h_k^{(j)} \in \mathcal{L}^1$ e le successioni $\{g_k^{(j)}\}_{k \geq 1}$ e $\{-h_k^{(j)}\}_{k \geq 1}$ sono monotone non decrescenti. Inoltre da $|g_k^{(j)}| \leq g$ e $|h_k^{(j)}| \leq g$ segue che $\sup_k \int g_k^{(j)} \leq \int g$ e $\sup_k \int (-h_k^{(j)}) \leq \int g$. Quindi, per il teorema di convergenza monotona esistono $g_j, h_j \in \mathcal{L}^1$ tali che (per $k \rightarrow \infty$ e j fissato) $g_k^{(j)} \uparrow g_j \in \mathcal{L}^1$ e $-h_k^{(j)} \uparrow -h_j \in \mathcal{L}^1$ (e, ovviamente $\int |g_j|, \int |h_j| \leq \int g$). Dunque $g_j = \sup\{f_k : k \geq j\}$ e $h_j = \inf\{f_k : k \geq j\}$ sono funzioni di $\mathcal{L}^1$ che, al variare di j , formano delle successioni, rispettivamente, non crescente e non decrescente. Infatti, $\lim g_j = \limsup f_j = \lim f_j$ (q.o.) e $\lim h_j = \liminf f_j = \lim f_j$ (q.o.). Dunque, per il teorema di convergenza monotona (essendo $h_j \uparrow f$, $\sup h_j \leq \int g < \infty$) $f \in \mathcal{L}^1$ e $\int |f - h_j| \rightarrow 0$. Applicando lo stesso ragionamento a $-g_j \uparrow -f$ si ottiene che anche $\int |f - g_j| \rightarrow 0$ e quindi (osservando che $g_j \geq f_j \geq h_j$)

$$0 \leq \int (g_j - h_j) = \int (g_j - f_j) + \int (f_j - h_j) \rightarrow 0.$$

Poiché sia $f_j(x)$ sia $f(x)$ appartengono (q.o.) all'intervallo $[h_j(x), g_j(x)]$ segue che

$$\int |f - f_j| \leq \int (g_j - h_j) \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Alcuni corollari immediati del Teorema di convergenza dominata (o della sua dimostrazione) sono i seguenti.

Lemma di Fatou Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni non negative di $\mathcal{L}^1$ tale che $\sup \int f_k < \infty$ e $f_k \rightarrow f$ (q.o.). Allora $f \in \mathcal{L}^1$ e $\int f \leq \liminf \int f_k$.

Dimostrazione Sia h_k definita come nella dimostrazione del Teorema di convergenza dominata, ovvero $h_k = \inf\{f_j, j \geq k\}$. Ripetendo l'argomento usato prima, essendo $0 \leq h_k \leq f_k$, si ha che $h_k \in \mathcal{L}^1$, $h_k \uparrow f$. Inoltre, per ogni $j \geq 0$, $h_k \leq f_{k+j}$ e dunque $\int h_k \leq \int f_{k+j}$ da cui segue che

$$\int h_k \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int f_{k+j} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k.$$

⁴²Si confronti tale affermazione con il punto (i) dell'Osservazione 9.30.

Dal Teorema di convergenza monotona segue allora che $f \in \mathcal{L}^1$ e che $\int f = \lim h_k \leq \liminf \int f_k$. ■

La seguente affermazione dà un criterio sull'appartenenza a $\mathcal{L}^1$ di limiti q.o. di funzioni $f_k \in \mathcal{L}^1$ (senza fare alcuna ipotesi sulla successione ma solo sul limite):

Proposizione 9.37 *Sia $f_k \in \mathcal{L}^1$, $f_k \rightarrow f$ (q.o.) e $|f| \leq g \in \mathcal{L}^1$. Allora $f \in \mathcal{L}^1$.*

Dimostrazione Basta applicare il Teorema di convergenza dominata alla successione definita come $\varphi_k \equiv \inf\{g, \sup\{f_k, -g\}\}$ (osservando che $\varphi_k = g$ se $f_k > g$, $\varphi_k = f_k$ se $|f_k| \leq g$ e $\varphi_k = -g$ se $f_k < -g$ e dunque che $\varphi_k \rightarrow f$ q.o.). ■

Il Teorema di convergenza dominata ha innumerevoli applicazioni. A titolo di esempio, concludiamo questo paragrafo con un risultato sulla derivazione sotto segno di integrale che estende la Proposizione 5.47.

Proposizione 9.38 *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un rettangolo, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $f : E \times I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che verifichi le seguenti ipotesi: per ogni $y \in I$, $f(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(E)$; per quasi tutti gli $x \in E$, $f(x, \cdot) \in C^1(I)$; esiste una funzione $g \in \mathcal{L}^1(E)$ tale che $|f_y(x, y)| \leq g(x)$. Allora la funzione $F(y) \equiv \int_E f(x, y) dx$ è di classe $C^1(I)$, $f_y(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(E)$ e $F'(y) = \int_E f_y(x, y) dx$.*

Dimostrazione Fissiamo $y \in I$ e sia $\{h_j\}$ una qualunque successione di numeri diversi da 0 tale che $h_j \rightarrow 0$. Sia $f_j(x) \equiv (f(x, y + h_j) - f(x, y))/h_j$. Dalle ipotesi su f segue che $f_j(\cdot) \rightarrow f_y(\cdot, y)$ q.o. in A e (per quasi tutti gli x) $|f_j(x)| = |\int_0^1 f_y(x, y + th_j) dt| \leq g(x)$. La derivabilità di F è conseguenza immediata del Teorema di convergenza dominata. Sia ora $I \ni y_n \rightarrow y \in I$. Come sopra si ha che $|F'(y_n) - F'(y)| = |\int_E (f_y(x, y) - f_y(x, y_n)) dx| \leq 2 \int_E g(x) dx$, e dunque, ancora per convergenza dominata, $F'(y_n) \rightarrow F'(y)$ ovvero $F \in C^1(I)$. ■

9.7 Lo spazio di Banach L^1

Abbiamo visto che $\mathcal{L}^1 \equiv \mathcal{L}^1(E)$ è uno spazio vettoriale. L'integrale del modulo definisce su $\mathcal{L}^1$ una *seminorma*⁴³ che denotiamo

$$\|f\|_{L^1} \equiv \int_E |f|, \quad (f \in \mathcal{L}^1). \quad (9.47)$$

Infatti, per il punto (iii) della Proposizione 9.32, si ha che, da $\|f\|_{L^1} = 0$ (con $f \in \mathcal{L}^1$), segue solo che $f = 0$ quasi ovunque e non che f sia identicamente nulla. E' però chiaro come ovviare a tale problema: basta "identificare funzioni che differiscono su di un insieme di misura nulla". Per far questo introduciamo in $\mathcal{L}^1$ una relazione d'equivalenza. Se $f, g \in \mathcal{L}^1$, diremo che $f \sim g$ se $f = g$ quasi ovunque. Ovviamente $\sim$ è una relazione d'equivalenza in $\mathcal{L}^1$.

⁴³Si ricorda che una funzione $\|\cdot\|$ da uno spazio vettoriale V in $[0, \infty)$ si dice **seminorma** se verifica (ii) e (iii) di (6.1) (ovvero se valgono la omogeneità e la disuguaglianza triangolare ma non necessariamente la non degenerazione).

Definizione 9.39 $L^1(E)$ è l'insieme delle classi di equivalenza indotte su $\mathcal{L}^1(E)$ dalla relazione d'equivalenza $\sim$ appena introdotta. Se $\tilde{f} \in L^1(E)$, definiamo integrale di Lebesgue di $\tilde{f}$ su E la quantità $\int_E f$ dove $f \in \tilde{f}$ è un qualunque rappresentante della classe d'equivalenza $\tilde{f}$.

Poichè l'integrale di Lebesgue di due funzioni che differiscono solo su di un insieme di misura nulla coincide, tale definizione è ben posta. E' chiaro che⁴⁴ L^1 è uno spazio vettoriale⁴⁵ e su L^1 possiamo definire $\|\cdot\|_{L^1}$ ponendo, per $\tilde{f} \in L^1$, $\|\tilde{f}\|_{L^1} \equiv \|f\|_{L^1}$ dove f è un qualunque elemento di $\tilde{f}$. Chiaramente $\|\cdot\|_{L^1}$ è una norma su L^1 e quindi L^1 è uno spazio normato. Uno dei maggiori successi della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue è che L^1 è completo:

Teorema 9.40 (Riesz, Fischer) L^1 è uno spazio di Banach.

Dimostrazione Osserviamo innanzitutto che dalla definizione di L^1 (e dal fatto che l'integrale di Lebesgue assume lo stesso valore su funzioni $\mathcal{L}^1$ che differiscono su di un insieme di misura nulla) segue che l'enunciato del teorema è equivalente alla seguente affermazione:

Per ogni successione $\{f_k\}$ di Cauchy di funzioni in $\mathcal{L}^1$ esiste una funzione $f \in \mathcal{L}^1$ tale che $\|f - f_k\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Dimostreremo dunque tale asserzione. Da teoremi noti sulle successioni segue che è sufficiente provare che $\|f_{k_j} - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ per qualche sottosuccessione⁴⁶ di $\{f_k\}$. Dalla successione $\{f_k\}$ possiamo estrarre una sottosuccessione $\{g_j\} \equiv \{f_{k_j}\}$ tale che⁴⁷ $\|g_{j+1} - g_j\|_{L^1} \leq 2^{-j}$. Le funzioni non negative di $\mathcal{L}^1$ $G_k \equiv \sum_{j=1}^k |g_{j+1} - g_j|$ formano una successione monotona non decrescente ed inoltre $\int G_j \leq \sum_{j \geq 1} 2^{-j} = 1$. Quindi, per il Teorema di convergenza monotona, esiste $G \in \mathcal{L}^1$ tale che $G_j \uparrow G$ quasi ovunque. Dunque anche $g_j = g_1 + \sum_{i=1}^{j-1} (g_{i+1} - g_i)$ converge quasi ovunque ad una funzione f . Inoltre, essendo $|g_j| \leq |g_1| + G \in \mathcal{L}^1$, dal Teorema di convergenza dominata segue che $\|g_j - f\|_{L^1} \rightarrow 0$. ■

⁴⁴Come per $\mathcal{L}^1$ non indicheremo, qualora non ve ne sia necessità, esplicitamente il rettangolo di riferimento E .

⁴⁵Se $\tilde{f}, \tilde{g} \in L^1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a\tilde{f} + b\tilde{g}$ è, per definizione data dalla classe di equivalenza di $af + bg$ dove f e g sono elementi arbitrari, rispettivamente, di $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$: è immediato verificare che tale definizione è ben posta ovvero che non dipende dai particolari elementi f e g ma solo dalle classi d'equivalenza.

⁴⁶In generale, se $\{x_k\}$ è una successione di Cauchy di uno spazio metrico X e se $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = x \in X$ allora $x_k \rightarrow x$. Infatti: sia $\varepsilon > 0$ e sia k_0 tale che $d(x_{k_j}, x) \leq \varepsilon$ e $d(x_k, x_{k_j}) \leq \varepsilon \forall j, k, h \geq k_0$ (e $d(\cdot, \cdot)$ è la distanza in X). Allora se j_0 è tale che $k_{j_0} \geq k_0$, $\forall k \geq k_0$ si ha $d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{k_{j_0}}) + d(x_{k_{j_0}}, x) \leq 2\varepsilon$.

⁴⁷Anche questo è un fatto generale che vale per qualunque successione di Cauchy $\{x_k\}$ di un qualunque spazio metrico X : Infatti per ogni $j \geq 1$ sia h_j tale che $d(x_k, x_k) \leq 2^{-j}$ per ogni $k, h \geq h_j$. Definiamo ora $k_1 = h_1$ e, ricorsivamente per $j \geq 2$, $k_j = \sup\{k_{j-1} + 1, h_j\}$. E' allora chiaro che la sottosuccessione x_{k_j} è tale che $d(x_{k_{j+1}}, x_{k_j}) \leq 2^{-j}$.

Osservazione 9.41 (i) Nel corso della dimostrazione abbiamo anche dimostrato la seguente affermazione:

Se $f_k, f \in L^1$ sono tali che $\|f_k - f\|_{L^1} \rightarrow 0$, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{k_j}\}$ che converge ad f quasi ovunque.

Questa affermazione non può essere migliorata (si veda 9.33).

(ii) Lo spazio “giusto” da considerare (dal punto di vista “funzionale”) è dunque L^1 . Si faccia però attenzione al fatto che gli elementi di L^1 non sono funzioni; ad esempio, se $\tilde{f} \in L^1$ non ha senso, in generale, parlare di “valore di $\tilde{f}$ in $x \in E$ ” oppure⁴⁸ scrivere $\tilde{f}(x)$.

Ciononostante ci sono dei casi in cui è possibile scegliere un rappresentante *naturale* $f \in \tilde{f}$ e quindi di identificare $\tilde{f}$ con tale funzione. Questo è, ad esempio, il caso in cui $\tilde{f}$ contiene una funzione f continua. Infatti, sia $\tilde{f} \in L^1(E)$ ed assumiamo che esista una funzione f continua su E che appartenga a $\tilde{f}$. Allora, fissato $x \in E$, se K_r denota il cubo aperto di centro x e lato r , si ha che⁴⁹

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{K_r} \tilde{f} = f(x). \quad (9.48)$$

[Infatti, poiché l'integrale in (9.48) non dipende dal particolare rappresentante segue che $\int_{K_r} \tilde{f} = \int_{K_r} f$ dove f è il rappresentante continuo in $\tilde{f}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $r_0 > 0$ così piccolo che $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $y \in K_{r_0}$. Allora per ogni $0 < r \leq r_0$ si ha

$$\left| \left(\frac{1}{r^n} \int_{K_r} f \right) - f(x) \right| = \left| \frac{1}{r^n} \int_{K_r} [f(y) - f(x)] dy \right| \leq \frac{1}{r^n} \int_{K_r} |f(y) - f(x)| dy \leq \varepsilon,$$

da cui segue (9.48).]

In tal senso penseremo a spazi di funzioni regolari (quali $C^k(E)$ o $C_0^k(E) \equiv$ l'insieme delle funzioni di classe C^k con supporto compatto contenuto in E) come “sottospazi” di L^1 .

Per quanto detto, il punto (iv) della Proposizione 9.32 può essere riformulato dicendo che $S(E)$ è denso⁵⁰ in $L^1(E)$. Infatti vale anche la seguente

Proposizione 9.42 $C_0^\infty(E)$ è denso in $L^1(E)$.

Tale risultato è un immediato corollario della densità delle funzioni a scalini e del seguente

Lemma 9.43 Data $f \in S(E)$ e dato $\varepsilon > 0$, esiste $\varphi \in C_0^\infty(E)$ tale che $\|f - \varphi\|_{L^1} \leq \varepsilon$.

⁴⁸Tale espressione non ha senso anche se la interpretassimo come $f(x)$ dove $f \in \tilde{f}$. Infatti, fissato un punto x , poiché $\{x\}$ è un insieme di misura nulla siamo sempre liberi di scegliere un altro rappresentante che assuma nel punto x un valore del tutto arbitrario.

⁴⁹Grazie al punto (iii) dell'Osservazione 9.33, gli integrali in (9.48) sono ben definiti; “ $r \downarrow 0$ ” significa, naturalmente, che il limite è fatto per valori positivi di r .

⁵⁰Si ricorda che un sottoinsieme X_0 di uno spazio metrico X si dice denso in X se per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $x_0 \in X_0$ tale che $d(x_0, x) \leq \varepsilon$.

Dimostrazione (a) Dall'Esempio 3.10 di § 3.1 segue che per ogni $a < b$ e per ogni $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ esiste $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che: $0 \leq g \leq 1$; $\text{supp } g \subset [a, b]$ e $g \equiv 1$ su $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$.

(b) Dato un rettangolo limitato e non degenere $R \subset \mathbb{R}^n$ ed $\varepsilon > 0$ è allora facile costruire una funzione $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $0 \leq \psi \leq 1$, $\text{supp } \psi \subset R$ e $\|1 - \psi\|_{L^1} \leq \varepsilon$. Infatti sia $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ e siano $a_i < b_i$ gli estremi di I_i . Fissato arbitrariamente $0 < \sigma < \min(b_i - a_i)/2$, siano g_i le funzioni definite al punto (a) con ε sostituito da σ e a, b sostituiti da a_i, b_i per $i = 1, \dots, n$. Se R_σ denota il rettangolo $[a_1 + \sigma, b_1 - \sigma] \times \cdots \times [a_n + \sigma, b_n - \sigma]$ e se $\psi = g_1 \cdots g_n$ si ha che $\int_{\mathbb{R}^n} |1 - \psi| = \int_{R \setminus R_\sigma} (1 - \psi) \leq \text{mis } R - \text{mis } R_\sigma$. E' dunque chiaro che prendendo $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ sufficientemente piccolo si ottiene la funzione ψ cercata.

(c) Sia $f \in S(E)$. Possiamo scrivere $f = f_1 + f_2$ con f_1 come in (9.6) con gli R_i limitati, disgiunti e non degeneri e con $c_i \neq 0$, mentre $f_2 = 0$ q.o. (in altri termini in f_2 abbiamo isolato i possibili contributi relativi a rettangoli degeneri o a $c_i = 0$). Dato $\varepsilon > 0$, per ogni $i \leq N$ scegliamo ψ_i come in (b) con R sostituito da R_i e con ε sostituito da $\varepsilon/(N \sup_i |c_i|)$. Allora, ponendo $\varphi \equiv \sum_{i=1}^N c_i \psi_i$, si ha che $\varphi \in C_0^\infty(E)$ e che

$$\begin{aligned} \int_E |f - \varphi| &\leq \int_E |f_1 - \varphi| + \int_E |f_2| = \int_E |f_1 - \varphi| \\ &\leq \sum_{i=1}^N |c_i| \int_{R_i} |\chi_{R_i} - \psi_i| \leq \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9.8 Integrali iterati e Teorema di Fubini

Lo scopo di questo paragrafo è di mostrare come sia possibile, sotto opportune ipotesi, ridurre il calcolo di un integrale su $\mathbb{R}^{n+m}$ al calcolo "iterato" di due integrali, rispettivamente, n ed m -dimensionali. Applicando più volte tale metodo si potrà ridurre il calcolo di un integrale in $\mathbb{R}^n$ a n integrali unidimensionali.

In questo paragrafo denoteremo punti di $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con (x, y) con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Se $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e se x è un punto fissato di $\mathbb{R}^n$ chiameremo la x -sezione di A , e la denoteremo con A_x , l'insieme

$$A_x \equiv \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in A\};$$

analogamente denoteremo la y -sezione di A con

$$A^y \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in A\}.$$

Osservazione 9.44 (i) Sia $E = E_1 \times E_2$ un rettangolo in $\mathbb{R}^{n+m}$ con E_1 rettangolo di $\mathbb{R}^n$ e E_2 rettangolo di $\mathbb{R}^m$. Sappiamo che $\chi_E = \chi_{E_1} \cdot \chi_{E_2}$ e che⁵¹ $\text{mis}_{n+m} E = \text{mis}_n E_1 \cdot \text{mis}_m E_2$. Sia ora $f \in S(E)$, allora, per ogni $x \in E_1$, la funzione $y \in E_2 \rightarrow f(x, y)$ appartiene a $S(E_2)$ e per ogni $y \in E_2$, la funzione $x \in E_1 \rightarrow f(x, y)$

⁵¹Si usi, in tale contesto, la convenzione che $\infty \cdot 0 = 0$.

appartiene a $S(E_1)$. Inoltre anche le funzioni, rispettivamente, di y e x date da $\int_{E_1} f(x, y) dx$ e $\int_{E_2} f(x, y) dy$ sono funzioni a scalini e si ha⁵²

$$\int_E f = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x, y) dx \right) dy. \quad (9.49)$$

(ii) Se $Q \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme di misura nulla, allora l'insieme $Q \times A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ è un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^{n+m}$ per ogni insieme $A \subset \mathbb{R}^m$.

Infatti: sia $A_j \equiv A \cap (-j, j)^m$ e si noti che basta dimostrare l'asserto per A_j per ogni j (poiché $Q \times A = \bigcup_j Q \times A_j$). Dato $\varepsilon > 0$ sia $\{K_i\}$ un ricoprimento aperto e numerabile di Q ($K_i \subset \mathbb{R}^n$) tale che $\sum \text{mis}_n(K_i) \leq \varepsilon/(2j)^m$. Allora $\{K_i \times (-j, j)^m\}$ è un ricoprimento aperto di $Q \times A_j$ e $\sum \text{mis}_{n+m}(K_i \times (-j, j)^m) = (2j)^m \sum \text{mis}_n K_i \leq \varepsilon$. ■

Lemma 9.45 Sia $Q \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un insieme di misura nulla. Allora per quasi tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$, Q_x è un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^m$ e per quasi tutti gli $y \in \mathbb{R}^m$, Q^y è un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione Dimostriamo che per quasi tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$, Q_x è di misura nulla (l'altro caso è naturalmente analogo). Per il punto (v) dell'Osservazione 9.7, esiste un ricoprimento numerabile di Q formato da cubi aperti, $K^{(i)} \equiv K_1^{(i)} \times K_2^{(i)} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (con $i \geq 1$), la somma delle cui misure è finita e tale che ogni punto di Q appartiene ad un numero infinito di cubi in $\{K^{(i)}\}$. Per il punto (i) dell'Osservazione 9.44 si ha che

$$\infty > \sum_{i \geq 1} \text{mis } K^{(i)} = \sum_{i \geq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_{K^{(i)}} dy \right) dx,$$

e quindi, per il Teorema di convergenza monotona (o, più precisamente, per il punto (ii) dell'Osservazione 9.35), la serie $\sum \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{K^{(i)}} dy$ converge per quasi tutti gli x in $\mathbb{R}^n$. Per ogni x tale che $Q_x \neq \emptyset$, siano $K_2^{(i_j)}$ tutti i cubi in $\{K_2^{(i)}\}$ tali che $Q_x \cap K_2^{(i_j)} \neq \emptyset$; si noti che $x \in K_1^{(i_j)}$ per ogni j e che se $y \in Q_x$ allora esistono infiniti cubi in $\{K_2^{(i_j)}\}$ che contengono y . Ora, se x è tale che $Q_x \neq \emptyset$, dalla definizione di $K^{(i_j)}$ segue che $\chi_{K_1^{(i_j)}}(x) = 1$ per ogni j e dunque

$$\sum_{i \geq 1} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{K^{(i)}} = \sum_{i \geq 1} \chi_{K_1^{(i)}}(x) \cdot \text{mis } K_2^{(i)} \geq \sum_{j \geq 1} \chi_{K_1^{(i_j)}}(x) \cdot \text{mis } K_2^{(i_j)} = \sum_{j \geq 1} \text{mis } K_2^{(i_j)}.$$

Questo significa che, per quasi tutti gli x , Q_x è ricoperto dai $K^{(i_j)}$ la somma delle cui misure è finita e ogni $y \in Q_x$ appartiene ad numero infinito di cubi in $\{K^{(i_j)}\}$. Dunque (ancora per il punto (v) dell'Osservazione 9.7) per quasi tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$, Q_x è un insieme di misura nulla. ■

⁵²Si noti che se $f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{R_i}$ e se $R_i = R_i^{(1)} \times R_i^{(2)} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, allora $\int_{E_2} f = \sum_{i=1}^N c_i^{(1)} \chi_{R_i^{(1)}}(x)$ con $c_i^{(1)} = c_i \text{mis}_m(R_i^{(2)})$.

Teorema 9.46 (Fubini) Sia $E \equiv E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un rettangolo e sia $f \in \mathcal{L}^1(E)$. Allora, per quasi tutti gli $x \in E_1$, $y \rightarrow f(x, y) \in \mathcal{L}^1(E_2)$ e $x \rightarrow \int_{E_2} f(x, y) dy \in \mathcal{L}^1(E_1)$; per quasi tutti gli $y \in E_2$, $x \rightarrow f(x, y) \in \mathcal{L}^1(E_1)$ e $y \rightarrow \int_{E_1} f(x, y) dx \in \mathcal{L}^1(E_2)$. Inoltre si ha

$$\int_E f = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x, y) dx \right) dy . \quad (9.50)$$

Dimostrazione Chiaramente (per linearità) basta dimostrare l'enunciato del teorema avendo sostituito $\mathcal{L}^1$ con $\mathcal{F}$; inoltre dimostreremo solo la parte dell'enunciato relativa alla prima uguaglianza in (9.50) (poiché l'altra parte è del tutto analoga).

(a) Data $f \in \mathcal{F}(E)$ esiste un insieme di misura nulla $Q \subset E$ e funzioni a scalini f_k tali che $f_k \uparrow f$ per ogni $x \in E \setminus Q$ ed inoltre $\int f_k \uparrow \int f$.

(b) Sia $F_k(x) \equiv \int_{E_2} f_k(x, y) dy$. Per l'Osservazione 9.44, F_k è una funzione a scalini (ed ovviamente $\{F_k\}$ è una successione non decrescente) e

$$\int_{E_1} F_k = \int_E f_k \leq \int_E f < \infty , \quad (9.51)$$

e quindi (Proposizione 9.26 e definizione di $\mathcal{F}$) esiste $F \in \mathcal{F}(E_1)$ tale che $F_k \uparrow F$ (q.o. in E_1) e $\int_{E_1} F_k \uparrow \int_{E_1} F$. Sia $N_1 \subset E_1$ l'insieme di misura nulla per cui $F_k(x) \uparrow F(x)$ per ogni $x \in E_1 \setminus N_1$.

(c) Per il Lemma 9.45, esiste un insieme di misura nulla $Q_1 \subset E_1$ tale che, per ogni $x \in E_1 \setminus Q_1$, Q_x è di misura nulla. Sia $M_1 \equiv N_1 \cup Q_1$ che, per quanto detto, è un insieme di misura nulla.

(d) Fissato $x \in E_1 \setminus M_1$, $f_k(x, y) \uparrow f(x, y)$ per quasi tutti gli $y \in E_2$ (e cioè per $y \in E_2 \setminus Q_x$ poiché $y \notin Q_x \implies (x, y) \notin Q$); inoltre $\int_{E_2} f_k(x, y) dy \equiv F_k(x) \uparrow F(x) < \infty$ (poiché $x \notin N_1$). Dunque, se $x \in E_1 \setminus M_1$, (per la Proposizione 9.26 e per la definizione di $\mathcal{F}$) $y \rightarrow f(x, y) \in \mathcal{F}(E_1)$ e $\int_{E_2} f_k(x, y) dy = F_k(x) \uparrow \int_{E_2} f(x, y) dy$. Quindi, per $x \in E_1 \setminus M_1$,

$$F(x) = \lim F_k(x) \equiv \lim \int_{E_2} f_k(x, y) dy = \int_{E_2} f(x, y) dy .$$

Ovvero F e $\int_{E_2} f(\cdot, y) dy$ coincidono quasi ovunque (ed appartengono a $\mathcal{F}(E_1)$) e, ricordando il punto (a) e la (9.51),

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{E_1} F = \lim \int_{E_1} F_k = \lim \int_E f_k = \int_E f . \quad \blacksquare$$

9.9 Funzioni ed insiemi misurabili. Misura di Lebesgue

In questo paragrafo verrà discussa la teoria della misura secondo Lebesgue (che dedurremo dall'analisi sinora fatta). Tale teoria, in particolare, ci permetterà (nel prossimo paragrafo) di estendere l'integrale di Lebesgue su insiemi assai più generali che non i rettangoli.

Definizione 9.47 Una funzione⁵³ $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **misurabile** se esistono $f_k \in S(E)$ tali che $f = \lim f_k$ quasi ovunque in E . Un insieme $A \subset E$ si dice **misurabile** se la sua funzione caratteristica χ_A è una funzione misurabile. La famiglia delle funzioni o degli insiemi misurabili su E verrà denotato con $\mathcal{M}(E)$. Se A è un insieme misurabile si definisce la **misura di Lebesgue** di A la quantità

$$m(A) \equiv \begin{cases} \int_E \chi_A, & \text{se } \chi_A \in \mathcal{L}^1(E), \\ \infty, & \text{se } \chi_A \notin \mathcal{L}^1(E). \end{cases} \quad (9.52)$$

Osservazione 9.48 (i) Si noti che nella definizione di misurabilità non entra alcuna condizione di monotonia.

(ii) Ovviamente un rettangolo R è misurabile e la sua misura di Lebesgue coincide con la sua misura n -dimensionale mis_n .

(iii) Se $A \in \mathcal{M}$ e A è limitato allora $m(A) < \infty$ [infatti se A è limitato esiste un rettangolo limitato $E \supset A$ e la funzione $1 \in \mathcal{L}^1(E)$ e l'affermazione fatta è conseguenza immediata del Teorema di convergenza dominata]. Il viceversa non è vero⁵⁴.

Proposizione 9.49

- (i) Sia $f \in \mathcal{M}$. Allora $f \in \mathcal{L}^1$ se e solo se esiste $g \in \mathcal{L}^1$ tale che $|f| \leq g$ (q.o.).
- (ii) Il modulo, le combinazioni lineari (a coefficienti in $\mathbb{R}$), il prodotto, l'involuppo superiore ed inferiore⁵⁵ di funzioni misurabili sono funzioni misurabili. Il reciproco di una funzione misurabile e q.o. diversa da 0 è una funzione misurabile.
- (iii) Se $f_k \in \mathcal{M}$ e $f_k \rightarrow f$ q.o. allora $f \in \mathcal{M}$.
- (iv) Il complementare di un insieme misurabile è misurabile.
- (v) L'intersezione numerabile⁵⁶ di insiemi misurabili è misurabile.
- (vi) L'unione numerabile di insiemi misurabili è misurabile.
- (vii) Se $A_i \in \mathcal{M}$ ($i \in \mathbb{Z}_+$) sono insiemi disgiunti, allora $m(\cup_i A_i) = \sum_i m(A_i)$.
- (viii) Se A_i ($i \in \mathbb{Z}_+$) sono insiemi misurabili e $A_i \subset A_{i+1}$, allora $m(\cup_i A_i) = \lim m(A_i)$.
- (ix) Se A_i ($i \in \mathbb{Z}_+$) sono insiemi misurabili, $A_{i+1} \subset A_i$ e $m(A_1) < \infty$, allora $m(\cap_i A_i) = \lim m(A_i)$.
- (x) $f \in \mathcal{M}$ se e solo se $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}$.
- (xi) Gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi sono misurabili. Le intersezioni numerabili di insiemi aperti e le unioni numerabili di insiemi chiusi sono misurabili.
- (xii) Q è di misura nulla se e solo se $Q \in \mathcal{M}$ e $m(Q) = 0$.
- (xiii) La misura di Lebesgue (su $\mathbb{R}^n$) è invariante per traslazioni: se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora $x_0 + A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $m(x_0 + A) = m(A)$.

⁵³Come al solito E è un rettangolo arbitrario che potrebbe coincidere con tutto $\mathbb{R}^n$. Come già fatto, ometteremo spesso nelle notazioni il simbolo del rettangolo E di riferimento.

⁵⁴Esercizio 9.12.

⁵⁵Si ricordi la nota 9.

⁵⁶Naturalmente questo include il caso finito (prendendo, da un certo punto in poi, $\mathbb{R}^n$).

Dimostrazione (i): Il “solo se” è banale (si prenda $g \equiv |f|$); il “se” è conseguenza della Proposizione 9.37.

(ii): Si consideri l'affermazione sul reciproco (le altre sono ovvie conseguenze della parte (i) della Proposizione 9.5) e sia $f_k \rightarrow f$ (q.o.). Definiamo $g_k(x) = 0$ se $f_k(x) = 0$ e $g_k(x) \equiv 1/f_k(x)$ altrimenti. Allora $g_k \rightarrow 1/f(x)$ (q.o.) e dunque $1/f \in \mathcal{M}$.

(iii): Fissiamo una funzione $h \in \mathcal{L}^1$ con $h(x) > 0$ per ogni x (si veda la nota 62). Sia ora $g_k \equiv hf_k/(h + |f_k|)$. Allora: g_k è misurabile [per il punto (ii)]; $|g_k| < h$ e quindi, per il punto (i), $g_k \in \mathcal{L}^1$; $g_k \rightarrow g \equiv hf/(h + |f|)$ (q.o.) e [convergenza dominata] $g \in \mathcal{L}^1$. In particolare $g \in \mathcal{M}$ e poiché $f = hg/(h - |g|)$, $f \in \mathcal{M}$ [punto (ii)].

(iv): La funzione caratteristica di $E \setminus A$ è data da $1 - \chi_A$.

(v): Caso finito: $\chi_{A_1 \cap \dots \cap A_k} = \prod_{i=1}^k \chi_{A_i}$ [e si usi il punto (ii)]. Caso numerabile: $\chi_{\cap_i A_i} = \lim_k \prod_{i=1}^k \chi_{A_i}$ [e punto (iii)].

(vi): Caso finito: $\chi_{A_1 \cup \dots \cup A_k} = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \chi_{A_i}) = \sup_{1 \leq i \leq k} \chi_{A_i}$ [e punto (ii)]; Caso numerabile: $\chi_{\cup_i A_i} = \lim_k \sup_{1 \leq i \leq k} \chi_{A_i}$.

(vii): Sia $A = \cup_i A_i$ che, per il punto precedente, è misurabile e si osservi che $\chi_A = \sum_i \chi_{A_i}$. Ci sono due casi: (a) $m(A) < \infty$, (b) $m(A) = \infty$. Caso (a): sia $f \equiv \chi_A$ e $f_k = \sum_{i=1}^k \chi_{A_i}$. Allora $f_k \uparrow f$ e $m(A) < \infty$ significa che $f \in \mathcal{L}^1$ e quindi $\int f_k \leq \int f < \infty$. Dunque [per convergenza monotona ed osservando che, per ogni k , $\chi_{A_1 \cup \dots \cup A_k} = \sum_{i=1}^k \chi_{A_i} \in \mathcal{L}^1 \implies m(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{i=1}^k m(A_i)$] $\lim \int f_k = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \int f = m(A)$. Caso (b): sia $B_i \equiv A_i \cap \{x : |x|_{\infty} \leq i\}$ cosicché i B_i sono disgiunti, $A = \cup_i B_i$ e $\chi_{B_1 \cup \dots \cup B_k} \in \mathcal{L}^1$ per ogni k . La tesi è allora conseguenza immediata del punto (iii) dell'Osservazione 9.35.

(viii) Sia $B_1 \equiv A_1$ e, per $i \geq 2$, $B_i \equiv A_i \setminus A_{i-1}$ e si usi il punto precedente.

(ix) La tesi è conseguenza del teorema di convergenza dominata.

[Poiché $f_k \equiv \chi_{A_1 \cap \dots \cap A_k} \leq \chi_{A_1} \in \mathcal{L}^1$ e $f_k \rightarrow \chi_{\cap_i A_i}$].

(x): Consideriamo prima il “se”. Dall'ipotesi segue, in particolare, che $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e quindi anche⁵⁷ $f^{-1}((-\infty, a]) = [f^{-1}((a, \infty))]^c \in \mathcal{M}$. Dunque $f^{-1}([a, b)) \in \mathcal{M}$ per ogni $a < b$. Per ogni $k \geq 1$ e per ogni $i \in \mathbb{Z}$ sia $E_i \equiv f^{-1}([\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}))$ e definiamo

$$f_k \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i-1}{k} \chi_{E_i} \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=-j}^j \frac{i-1}{k} \chi_{E_i}. \quad (9.53)$$

Innanzitutto per ogni x solo un termine della serie è diverso da 0 (e quindi la serie converge per ogni x). Poi essendo E_i misurabile lo è anche f_k (essendo il limite di funzioni misurabili). Inoltre, per ogni x esiste un unico E_i che contiene x ed allora $0 \leq f(x) - f_k(x) = f(x) - \frac{i-1}{k} < 1/k$. Dunque $f_k \uparrow f$ per ogni x e quindi $f \in \mathcal{M}$. Per dimostrare il “sole se” ci serviremo del seguente elementare fatto topologico:

Lemma 9.50 *Ogni aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$ è una unione numerabile di cubi aperti.*

⁵⁷Come al solito A^c indica il complementare di A .

Dimostrazione Sia $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $N \equiv \{x^{(i)} : i \geq 1\}$ un insieme denso e numerabile in A (per esempio $N = A \cap \mathbb{Q}^n$). Si consideri la famiglia numerabile $\mathcal{K}$ formata da tutti i cubi aperti contenuti in A , di centro $x^{(i)}$ (per qualche i) e con la lunghezza del lato razionale. E' allora chiaro che $A = \cup_{K \in \mathcal{K}} K$. ■

Dimostriamo ora il “solo se” del punto (x): osserviamo che, per il Lemma, è sufficiente dimostrare che sono misurabili gli insiemi della forma⁵⁸ $\{f \leq a\}$ per ogni a . Sia $\{a_k\}$ una successione (strettamente) decrescente con limite a e, denotando con $\varphi_b \equiv \inf\{f, b\}$, sia $f_k \equiv (\varphi_{a_k} - \varphi_a)/(a_k - a)$. Allora $f_k \in \mathcal{M}$ e⁵⁹ $\lim f_k = \chi_{f^{-1}((-\infty, a])}$. Dunque $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M}$.

(xi): Dal Lemma 9.50 segue che ogni aperto $A = \cup_i K_i$ con K_i cubo aperto. Se $A_k \equiv \cup_{i=1}^k K_i$, la funzione $f_k \equiv \chi_{A_k}$ è una funzione a scalini tale che $f_k \uparrow \chi_A$ e dunque $A \in \mathcal{M}$. Il resto della tesi segue dai punti (iv), (v) e (vi).

(xii): Se Q è di misura nulla allora $\chi_Q = 0$ (q.o.) e dunque $Q \in \mathcal{M}$ e $m(Q) = 0$. Viceversa $Q \in \mathcal{M}$ e $m(Q) = 0$ significa che $\int \chi_Q = 0$ e quindi [(iii) della Proposizione 9.32] $\chi_Q = 0$ quasi ovunque ovvero l'insieme Q su cui χ_Q vale 1 è un insieme di misura nulla.

(xiii): Se $S \ni f_k \rightarrow \chi_A$ allora $x \rightarrow f_k(x - x_0) \in S$ e $f_k(x - x_0) \rightarrow \chi_{x_0+A}(x)$ e la tesi segue dal punto (v) della Proposizione 9.32. ■

Osservazione 9.51 (i) Dato uno spazio metrico X , una famiglia, $\mathcal{A}$, di sottoinsiemi di X che contenga l'insieme vuoto e che sia chiusa per complementazione e per unioni numerabili⁶⁰ prende il nome di σ -**algebra** su X . Dunque *gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sono una σ -algebra su $\mathbb{R}^n$ che contiene gli insiemi aperti*.

(ii) Sia $\mathcal{A}$ una σ -algebra su di uno spazio metrico X . Un'applicazione $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e tale che $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ per ogni famiglia numerabile $\{A_i\}$ di insiemi in $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti, prende il nome di **misura** (o “misura σ -additiva”) su $\mathcal{A}$. Dunque la misura di Lebesgue m è una misura σ -additiva su $\mathcal{M}$.

(iii) Una misura μ su $\mathcal{A}$ tale che ogni sottoinsieme di un insieme $A \in \mathcal{A}$ di misura μ nulla (ovvero $\mu(A) = 0$) appartiene ad $\mathcal{A}$ si dice **completa**. Dunque *la misura di Lebesgue su $\mathcal{M}$ è completa*.

(iv) *Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili secondo Lebesgue* come si evince dal seguente **esempio** dovuto a Vitali⁶¹.

⁵⁸Il simbolo $\{f \leq a\}$ denota l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq a\} = f^{-1}((-\infty, a])$ (analogamente $\{a < f < b\}$ denota l'insieme $\{x : a < f(x) < b\}$ etc.); l'affermazione nel testo deriva dall'osservazione che $\{a < f < b\} = \bigcap_{n \geq 1} [\{f \leq a\}^c \cap \{f \leq b - 1/n\}] \implies \{a < f < b\} \in \mathcal{M} \implies$ (per il Lemma) $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ per ogni aperto U .

⁵⁹Infatti: $f(x) \leq a \implies f(x) \leq a_k \implies \varphi_{a_k}(x) = \varphi_a(x) = f(x) \implies f_k(x) = 0 \forall k$; se $f(x) > a \exists k_0$ t.c. $f(x) \geq a_k \forall k \geq k_0 \implies \varphi_{a_k}(x) = a_k$ e $\varphi_a(x) = a \implies f_k(x) = 1$.

⁶⁰Ovvero se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ e se $A_i \in \mathcal{A}$ per $i \in \mathbb{Z}_+$ allora $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$.

⁶¹Illustreremo l'esempio di Vitali in $\mathbb{R}$ ma è immediato generalizzare tale esempio a $\mathbb{R}^n$ (esercizio 9.20).

Sia $E \equiv [0, 1]$ ed introduciamo su E la seguente relazione: diremo che $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$. E' chiaro che $\sim$ è una relazione d'equivalenza. Denotiamo con $\tilde{x}$ la classe d'equivalenza indotta da x ($\tilde{x} \equiv \{y \in E : \exists r \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } y = x + r\}$) e con $\tilde{V}$ l'insieme di tali classi d'equivalenza. Usando l'assioma della scelta possiamo definire V come il sottoinsieme di E ottenuto scegliendo per ogni $\alpha \in \tilde{V}$ un unico elemento $x_\alpha \in \alpha$. V è un sottoinsieme di E ed ha le seguenti proprietà: (a) se r_1 e r_2 sono due razionali distinti allora $r_1 + V \cap r_2 + V = \emptyset$ [infatti: se $x + r_1 = y + r_2$ con $x, y \in V$ e $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ allora $x - y \in \mathbb{Q}$ e quindi x e y appartengono alla stessa classe di equivalenza ma allora, per la costruzione di V , $x = y$ da cui $r_1 = r_2$]; (b) $E \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + V)$ dove $\mathbb{Q}_1 \equiv \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ [infatti: dato $x \in E$, sia $\alpha \equiv \tilde{x}$, allora, per costruzione esiste $x_\alpha \in V$ tale $x = x_\alpha + r$ con $r \in \mathbb{Q}$ e d'altra parte poiché sia x che x_α appartengono a $[0, 1]$ segue che $|r| \leq 1$]. Da (a) e da (b) (e dalla σ -additività e l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue) segue che V non può essere misurabile cioè $V \notin \mathcal{M}$: se per assurdo V fosse misurabile la sua misura di Lebesgue non potrebbe essere nulla (se così fosse anche la misura di $r + V$ sarebbe nulla e quindi $[0, 1]$ sarebbe contenuto in un'unione numerabile di insiemi di misura nulla ed avrebbe dunque misura nulla, il che non è) e, d'altra parte, la sua misura di Lebesgue non potrebbe neanche essere positiva (se così fosse la misura di Lebesgue di $A \equiv \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + V)$ sarebbe infinita, essendo gli insiemi a due a due disgiunti, ma questa contraddice il fatto che $A \subset [-1, 2]$).

(v) Analogamente a quanto fatto per le funzioni caratteristiche, se $f \in \mathcal{M}(E)$ e $f \geq 0$ (q.o.) possiamo estendere la definizione di integrale ponendo

$$\int_E f \equiv \begin{cases} \int_E f, & \text{se } f \in \mathcal{L}^1(E), \\ \infty, & \text{se } f \notin \mathcal{L}^1(E). \end{cases} \quad (9.54)$$

Come più volte osservato, nel secondo caso di (9.54), se $\mathcal{L}^1 \ni f_k \uparrow f$ (q.o.) allora $\int f_k \uparrow \infty$.

(vi) Nella dimostrazione del punto (x) si è visto che

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{M}, \quad \forall \text{ aperto } U \subset \mathbb{R} \iff \{f \leq a\} \in \mathcal{M}, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (9.55)$$

Per altre condizioni equivalenti si veda 9.11.

(vii) La composizione di funzioni misurabili con funzioni continue è misurabile:

$$f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \quad g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \implies g \circ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n). \quad (9.56)$$

[Per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}$, $g^{-1}(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}$ e quindi $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{M}$.]

In relazione al Teorema di Fubini è utile il seguente

Teorema 9.52 (Tonelli) Sia $E \equiv E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un rettangolo e sia $(x, y) \in E \rightarrow f(x, y)$ misurabile. Allora per quasi tutti gli $x \in E_1$ la funzione $y \rightarrow f(x, y)$

è misurabile su E_2 e se $g(x) \equiv \int_{E_2} |f(x, y)| dy < \infty$ per quasi tutti gli $x \in E_1$ allora $g \in \mathcal{M}(E_1)$; in tal caso

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x, y)| dy \right) dx < \infty \iff f \in \mathcal{L}^1(E). \quad (9.57)$$

Naturalmente un risultato analogo è valido scambiando il ruolo della x con quello della y e quindi da (9.57) segue che

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x, y)| dy \right) dx < \infty \iff \int_{E_2} \left(\int_{E_1} |f(x, y)| dx \right) dy < \infty, \quad (9.58)$$

ed in tal caso $f \in \mathcal{L}^1(E)$ e dunque, per il Teorema di Fubini vale la (9.50).

Dimostrazione (del Teorema 9.52) Da $f \in \mathcal{M}(E)$ segue che esiste $Q \subset E$ di misura nulla e $S(E) \ni f_k(x, y) \rightarrow f(x, y)$ per $(x, y) \in E \setminus Q$. Dal Lemma 9.45 segue che per quasi tutti gli $x \in E_1$, $S(E_2) \ni f_k(x, \cdot) \rightarrow f(x, \cdot)$ ovvero $f(x, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2)$. Supponiamo ora che $\int_{E_2} |f(x, y)| dy < \infty$ (x q.o.) e sia $f_k \equiv \inf\{|f|, h_k\}$ dove $h_k(x, y) \equiv k \cdot h(x, y)$ ed h è una funzione in $\mathcal{L}^1(E)$ e strettamente positiva⁶². Allora $f_k \in \mathcal{L}^1(E)$ e $f_k \uparrow |f|$. Inoltre per il Teorema di convergenza monotona $g_k(x) \equiv \int_{E_2} f_k(x, y) dy$ (essendo tale quantità limitata da $\int_{E_2} |f(x, y)| dy < \infty$) converge a $\int_{E_2} |f(x, y)| dy$ che dunque è in $\mathcal{M}(E_1)$. Applicando il Teorema di Fubini a $f_k(x, y)$ otteniamo allora

$$\int_{E_1 \times E_2} f_k = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f_k(x, y) dy \right) dx \leq \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x, y)| dy \right) dx,$$

e (9.57) segue o (direttamente) per convergenza monotona applicata a f_k (nel caso l'integrale iterato sia finito) oppure dal punto (iii) dell'Osservazione 9.35. ■

9.10 Integrazione su insiemi misurabili. Insiemi normali

La teoria dell'integrazione secondo Lebesgue su un rettangolo E si può ora estendere sostituendo E con un qualunque insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$ (ad esempio un qualunque insieme aperto o un qualunque insieme chiuso).

Definizione 9.53 Sia E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ [$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$] e sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che f è misurabile su E [$f \in \mathcal{M}(E)$] se la funzione⁶³

$$f_E(x) \equiv \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \notin E, \end{cases} \quad (9.59)$$

⁶² Se E è limitato si prenda $h = 1$; se E non è limitato si può prendere la funzione h che vale $1/k^{n+2}$ su $\{z \in E: k-1 \leq |z|_\infty < k\}$ (per $k \geq 1$): $\int h = \sum_{k \geq 1} [(2k)^n - (2(k-1))^n]/k^{n+2} \leq 2^n \sum_{k \geq 1} 1/k^2 < \infty$.

⁶³ Si noti che con la convenzione in (9.59) la funzione caratteristica di E si può denotare con 1_E .

è misurabile su $\mathbb{R}^n$ [$f_E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$]. Analogamente diremo che $f \in \mathcal{L}^1(E)$ se $f_E \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ed in tal caso porremo

$$\int_E f \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f_E . \quad (9.60)$$

Osservazione 9.54 (i) Ovviamente tale definizione estende quelle date (cioè coincide con le precedenti definizioni nel caso in cui E sia un rettangolo).

(ii) Se A e B sono due insiemi misurabili e disgiunti e $f \in \mathcal{L}^1(A) \cap \mathcal{L}^1(B)$ allora [essendo $f_{A \cup B} = f_A + f_B$] $f \in \mathcal{L}^1(A \cup B)$ e

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f . \quad (9.61)$$

Tale relazione vale anche nel caso più generale in cui $A \cap B \neq \emptyset$ ma $m(A \cap B) = 0$.

(iii) Se E è un qualunque insieme misurabile, definiamo $S(E)$, le funzioni "a scalini" su E , come l'insieme $\{f_E : f \in S(\mathbb{R}^n)\}$; tali funzioni avranno dunque la forma $f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{R_i \cap E}$ dove gli R_i sono rettangoli limitati e disgiunti. Le funzioni a scalini su E possono essere, in effetti, abbastanza complicate (si pensi, ad esempio, al caso in cui l'insieme E è di misura positiva ma con interno vuoto). Tale definizione permette (banalmente) di estendere tutti i teoremi sopra dimostrati (assieme alle loro dimostrazioni) al caso di $E \in \mathcal{M}$. Ad esempio si ha la seguente generalizzazione del Teorema di convergenza monotona:

Teorema 9.55 Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}(E) \ni f_k \uparrow f$ q.o. in E . Allora $\lim \int_E f_k = \int_E f$.

[Nel caso in cui $\sup \int_E f_k < \infty$ è il Teorema di convergenza monotona, altrimenti segue da (v) dell'Osservazione 9.51.]

(iv) Se $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ allora $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$; se $f_k(x)$ è una funzione a scalini in $\mathbb{R}^n$ e $f_k \rightarrow f$ q.o. in $\mathbb{R}^n$ allora, ponendo $R_k \equiv [-k, k]^m$, la funzione $f_k(x, y) \equiv f_k(x) \cdot \chi_{R_k}(y)$ è una funzione a scalini in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $f_k(x, y) \rightarrow f(x)$ q.o. in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (per il punto (ii) dell'Osservazione 9.44). Dunque se $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $E_2 \subset \mathbb{R}^m$ sono insiemi misurabili allora $E_1 \times E_2$ è un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Discuteremo ora un corollario del Teorema di Fubini particolarmente utile nelle applicazioni.

Proposizione 9.56 Sia $n \geq 2$ e $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un insieme misurabile; siano α e β due funzioni in $\mathcal{M}(A)$ con $\alpha \leq \beta$ (q.o. in A) e sia $B \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme definito come

$$B \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \forall x \in A\} . \quad (9.62)$$

Allora: (i) $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\text{mis } B = \int_A (\beta(x) - \alpha(x)) dx . \quad (9.63)$$

(ii) Se $f \in \mathcal{L}^1(B)$ allora, per quasi tutti gli $x \in A$, la funzione $y \rightarrow f(x, y)$ appartiene a $\mathcal{L}^1([\alpha(x), \beta(x)])$, la funzione $x \rightarrow g(x) \equiv \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$ appartiene a $\mathcal{L}^1(A)$ e si ha

$$\int_B f = \int_A g \equiv \int_A \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (9.64)$$

Un insieme B della forma (9.62) (con, eventualmente, uno o tutti e due i “ $\leq$ ” sostituiti da “ $<$ ”) prende il nome di **insieme normale** rispetto all’asse delle⁶⁴ y . La dimostrazione della Proposizione è un immediato corollario del Teorema di Fubini e del seguente

Lemma 9.57 Gli “epigràfi” $\mathcal{E}_f \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$ e $\mathcal{E}'_f \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : f(x) < y\}$ di una funzione misurabile $f : x \in \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ sono insiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del punto (x) della Proposizione 9.49, poniamo $\varphi(x, y) \equiv \inf\{f(x), y\}$. Dal punto (iv) della Osservazione 9.54, segue che le funzioni $(x, y) \rightarrow f(x)$ e $(x, y) \rightarrow y$ sono misurabili in $\mathbb{R}^n$ e quindi $\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Se $\varphi_k(x, y) \equiv k \cdot (\varphi(x, y + \frac{1}{k}) - \varphi(x, y))$ si ha che⁶⁵ $\varphi_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi_k \rightarrow \chi_{\mathcal{E}_f}$ e dunque $\mathcal{E}_f$ è misurabile (punti (iii) e (ii) della Proposizione 9.49). Ragionando nello stesso modo avendo sostituito f e y con $-f$ e $-y$ si ottiene che $\{(x, y) : f(x) \geq y\}$ è misurabile, da cui, passando al complementare, segue che anche $\mathcal{E}'_f$ è misurabile. ■

Dimostrazione (della Proposizione 9.56) Poiché $B = \{(x, y) : \alpha_A(x) \leq y\} \cap \{(x, y) : \beta_A(x) < y\}^c \cap \{A \times \mathbb{R}\}$, dal Lemma segue che B è misurabile. La (9.63) segue dal Teorema di Tonelli⁶⁶ e la (9.64) segue dal Teorema di Fubini⁶⁷. ■

9.11 Cambiamento di variabili nelle integrazioni

In questo paragrafo studieremo come cambia la misura di Lebesgue sotto l’azione di una trasformazione regolare di $\mathbb{R}^n$. Il risultato principale è dato dal seguente

⁶⁴Naturalmente il ruolo di $x_1, \dots, x_{n-1}$ e y è del tutto arbitrario e analogamente si definirà un insieme normale rispetto ad un qualunque asse. In alcuni testi l’insieme B viene detto normale rispetto al piano $\{y = 0\}$: si faccia attenzione poiché nel caso $n = 2$ le due convenzioni potrebbero creare confusioni.

⁶⁵Come nella dimostrazione del punto (x) della Proposizione 9.49 prendendo $a_k = y + 1/k$.

⁶⁶Con $E_1 = \mathbb{R}^{n-1}$, $E_2 = \mathbb{R}$ e $f = \chi_B(x, y) = \chi_A(x) \chi_{[\alpha_A(x), \beta_A(x)]}(y)$.

⁶⁷ $\int_B f = \int_{\mathbb{R}^n} f_B = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_B dx \right) dy = \int_A \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f dy \right) dx.$

Teorema 9.58 Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e $\phi \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ con ϕ iniettiva su A e $\det \frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0$, allora $B \equiv \phi(A)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e si ha

$$m(\phi(A)) = \int_A \left| \det \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) \right| dx. \quad (9.65)$$

Inoltre, per ogni $f \in \mathcal{L}^1(B)$ si ha che $f \circ \phi \cdot \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \in \mathcal{L}^1(A)$ e

$$\int_B f(y) dy = \int_A f \circ \phi(x) \cdot \left| \det \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) \right| dx. \quad (9.66)$$

Nella dimostrazione useremo un semplice risultato topologico:

Lemma 9.59 Sia A un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ ed $F \in C(\bar{A}, \mathbb{R}^m)$, con $F(A)$ aperto in $\mathbb{R}^m$. (i): Allora $\partial(F(A)) \subset F(\partial A)$. (ii): Se F è anche iniettiva allora $F(\partial A) = \partial(F(A))$.

Dimostrazione (i): Sia $B \equiv F(A)$ e $y \in \partial B$, cioè (essendo B aperto per ipotesi) $\exists y_n \in B$ tali che $y_n \rightarrow y \notin B$. Siano $x_n \in A$ tali che $F(x_n) = y_n$. Poiché $\bar{A}$ è compatto, esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente in $\bar{A}$, e sia $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Per la continuità di F , $F(x_{n_k}) = y_{n_k} \rightarrow F(x)$, cioè $y = F(x)$. Ma allora $x \in \partial A$: se fosse $x \in A$, $y = F(x)$ apparterebbe a B , contrariamente alla nostra assunzione. Quindi $\partial(F(A)) \subset F(\partial A)$.

(ii): Per ipotesi B è un aperto di $\mathbb{R}^m$ e (essendo F iniettiva) $F^{-1}(B) = A$. Se $x \in \partial A$, poiché A è aperto equivale a dire che $x \notin A$ e che $\exists x_n \in A$ tale che $x_n \rightarrow x$. Per la continuità di F , $y_n = F(x_n) \rightarrow y \equiv F(x)$ e naturalmente $y_n \in B$. Ma allora $y \in \partial B$ cioè (essendo B aperto) $y \notin B$: se fosse $y \in B$, $F^{-1}(y)$ apparterebbe ad A contrariamente alla nostra assunzione. Dunque $F(\partial A) \subset \partial(F(A))$. ■

Osservazione 9.60 (i) Per $n = 1$ [e nel caso di A intervallo limitato e $f \in C(\bar{A})$], la (9.66) è la ben nota formula del cambio di variabile in integrali semplici: in tal caso ϕ è una funzione scalare di variabile reale $x \in \mathbb{R}$ ed il suo jacobiano è la derivata di ϕ rispetto a⁶⁸ x .

(ii) Il fatto che $\phi(A)$ sia un insieme aperto è diretta conseguenza del teorema della funzione inversa (o del Teorema 7.15 della applicazione aperta; si veda il capitolo 7).

⁶⁸L'apparire del modulo è dovuto al fatto che se $\phi' < 0$ la funzione ϕ non conserva l'ordine: supponiamo infatti che $A = [a, b]$ e $\phi' < 0$ su (a, b) (cioè ϕ è strettamente decrescente su $[a, b]$), allora $\phi([a, b]) = [\phi(b), \phi(a)]$. Quindi, per la formula nota sul cambio di variabile in integrali semplici (ponendo $y = \phi(x)$), si ha

$$\int_{\phi([a, b])} f = \int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(y) dy = \int_b^a f \circ \phi(x) \phi' dx = - \int_a^b f \circ \phi(x) \phi' dx = \int_{[a, b]} f \circ \phi(x) |\phi'| dx.$$

(iii) Sia $\phi(x) = Tx$ con $T \in \text{Mat}(n \times n)$ matrice invertibile ed $A = K_1$ il cubo unitario n -dimensionale $K_1 = [0, 1]^n$. In tal caso la matrice jacobiana $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ coincide con T stessa e quindi le ipotesi del teorema sono chiaramente soddisfatte. La formula (9.65) diviene, allora,

$$m(TK_1) = |\det T| m(K_1) = |\det T|. \quad (9.67)$$

In realtà la parte più significativa del teorema è proprio l'affermazione (9.67) che lega la misura con il determinante: la formula (9.65) si ricondurrà facilmente a (9.67) approssimando, localmente, $\phi(x)$ con la formula di Taylor al prim'ordine; infine la (9.66) si otterrà senza difficoltà dalla (9.65) usando il teorema di convergenza monotona.

Si ricordi che il determinante, visto come funzione delle colonne, è caratterizzato dalle seguenti tre proprietà: 1) scambiando di posto a due colonne, il valore del determinante cambia segno, 2) il determinante è una funzione lineare della prima colonna⁶⁹, 3) il determinante di $(e^{(1)}, \dots, e^{(n)})$, dove $\{e^{(i)}\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^n$, vale 1. Tale caratterizzazione significa che se Δ è una funzione a valori reali e definita su n -nuple di vettori in $\mathbb{R}^n$ che verifica⁷⁰

$$\begin{aligned} 1) \quad & \Delta(\dots, v^{(i)}, \dots, v^{(j)}, \dots) = -\Delta(\dots, v^{(j)}, \dots, v^{(i)}, \dots), \\ 2) \quad & \Delta(av^{(1)} + bw^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) = \\ & = a\Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) + b\Delta(w^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}), \\ 3) \quad & \Delta(e^{(1)}, \dots, e^{(n)}) = 1, \end{aligned} \quad (9.68)$$

allora Δ coincide con il determinante, cioè

$$\Delta(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) = \det[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}] = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} v_{\sigma_1}^{(1)} \cdots v_{\sigma_n}^{(n)},$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le permutazioni⁷¹ σ dell'insieme $\{1, \dots, n\}$.

La relazione tra determinanti e volumi si basa sulla seguente definizione: siano $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$, n vettori in $\mathbb{R}^n$ e sia $T \equiv [v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]$ la matrice che ha come j -esima colonna le n componenti, $v_i^{(j)}$, di $v^{(j)}$.

Definizione 9.61 Si chiama "parallelepipedo con lati $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ " (o anche "parallelepipedo generato da $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ ") l'insieme

$$\Pi(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{j=1}^n x_j v^{(j)} \text{ con } 0 \leq x_j \leq 1, \forall 1 \leq j \leq n\}. \quad (9.69)$$

⁶⁹E dunque, per 1), il determinante è una funzione lineare della j -esima colonna, con j qualunque.

⁷⁰La scrittura simbolica nel punto 1) sta a significare che scambiando l' i -esimo vettore con lo j -esimo il valore di Δ cambia segno.

⁷¹Una permutazione σ di $\{1, \dots, n\}$ è una mappa uno-uno $\sigma : j \in \{1, \dots, n\} \rightarrow \sigma_j \in \{1, \dots, n\}$ e ε_{σ} è il segno di σ (cioè $(-1)^p$ dove p è il numero di scambi che bisogna fare per ordinare la n -nupla $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ o, più analiticamente, $\varepsilon_{\sigma} = \prod_{i < j} \text{segno}(\sigma_j - \sigma_i)$).

Se $x \in \mathbb{R}^n$, $Tx = \sum_{j=1}^n x_j v^{(j)}$, dunque da tale definizione segue immediatamente che

$$\Pi(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) = TK_1, \quad \left(T \equiv [v^{(1)}, \dots, v^{(n)}], K_1 \equiv [0, 1]^n \right). \quad (9.70)$$

Dimostrazione di (9.67). Nel caso $n = 1$ (9.67) è banale: sia, infatti, $Tx = ax$ con $a \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$m(TK_1) = m([0, |a|]) = |a| = |\det T|.$$

Consideriamo ora il caso $n \geq 2$ e se $T \equiv [v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]$, definiamo la seguente funzione⁷²

$$\Delta_0(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } \det T = 0, \\ m(TK_1) & \text{se } \det T > 0, \\ -m(TK_1) & \text{se } \det T < 0. \end{cases} \quad (9.71)$$

Per dimostrare (9.67) basterà dimostrare che la funzione Δ_0 verifica 1), 2), 3) di (9.68) cosicché si avrà $\Delta_0(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) = \det T$ e prendendo il modulo di tale relazione si otterrà (9.67). Dalla definizione di $\Pi(v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$ segue immediatamente che

$$\Pi(\dots, v^{(i)}, \dots, v^{(j)}, \dots) = \Pi(\dots, v^{(j)}, \dots, v^{(i)}, \dots) \quad (9.72)$$

e quindi da (9.70) e da (9.71) si ha che scambiando due vettori di posto Δ_0 cambia segno: la proprietà 1) è verificata. E' anche chiaro che

$$\Pi(e^{(1)}, \dots, e^{(n)}) = K_1 \quad (9.73)$$

e dunque $\Delta_0(e^{(1)}, \dots, e^{(n)}) = 1$ e cioè vale la proprietà 3). Più delicata è la verifica della linearità. Cominciamo con l'osservare che se p è un intero positivo

$$\begin{aligned} \Pi(pv^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) &\equiv \{x_1 pv^{(1)} + \sum_{j=2}^n x_j v^{(j)} : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_j \leq 1\} \\ &\equiv \{x_1 v^{(1)} + \sum_{j=2}^n x_j v^{(j)} : 0 \leq x_1 \leq p, 0 \leq x_j \leq 1\} \\ &= \bigcup_{i=1}^p \{x_1 v^{(1)} + \sum_{j=2}^n x_j v^{(j)} : (i-1) \leq x_1 \leq i, 0 \leq x_j \leq 1\} \\ &= \bigcup_{i=1}^p \left((i-1)v^{(1)} + \Pi(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \right). \end{aligned} \quad (9.74)$$

Poiché l'insieme nell'ultima riga di (9.74) è formato dall'unione di p insiemi di eguale misura (essendo la misura invariante per traslazioni) aventi in comune

⁷²Si noti che se $\det T = 0$ i vettori $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ sono linearmente dipendenti e quindi TK_1 è contenuto in qualche spazio vettoriale di dimensione $m < n$, che, per il punto (ii) dell'Osservazione 9.9 è un insieme di misura nulla. Dunque se $\det T = 0$ allora $m(TK_1) = 0$.

solo insiemi di misura nulla ("facce" dei parallelepipedi), si ha che la misura di $\Pi(pv^{(1)}, v^{(2)}, \dots)$ è p volte la misura di $\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots)$; cioè

$$\Delta_0(av^{(1)}, \dots, v^{(n)}) = a\Delta_0(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \quad (9.75)$$

vale con $a = p$ intero positivo. Allora

$$\Delta_0(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) = \Delta_0\left(p \frac{1}{p}v^{(1)}, \dots, v^{(n)}\right) = p\Delta_0\left(\frac{1}{p}v^{(1)}, \dots, v^{(n)}\right) \quad (9.76)$$

e quindi (dividendo la (9.76) per p , si vede che) (9.75) vale anche per $a = \frac{1}{p}$ con p intero positivo. Combinando questi due fatti si ottiene subito che (9.75) vale per a numero razionale positivo. Dopodiché osservando che, se $0 < \alpha < \beta$

$$\Pi(\alpha v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \subset \Pi(\beta v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \quad (9.77)$$

si ottiene facilmente (9.75) per $a \in (0, \infty)$: basta infatti considerare due successioni monotone di numeri razionali positivi, $a_i < a < a'_i$ che tendano, rispettivamente da sinistra e da destra al numero reale a , ed usare (9.75) per razionali positivi che insieme alla relazione (9.77) implica

$$a_i\Delta_0(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \leq \Delta_0(av^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \leq a'_i\Delta_0(v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$$

e prendendo il limite per $i \rightarrow \infty$ si ottiene (9.75) con a numero reale positivo. Per $a = 0$, (9.75) deriva immediatamente dalla definizione, essendo $\det[0, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}] = 0$. Infine si noti che

$$\begin{aligned} v^{(1)} + \Pi(-v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) &= \{(1 - x_1)v^{(1)} + \sum_{j=2}^n x_j v^{(j)} : 0 \leq x_j \leq 1\} \\ &= \Pi(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \end{aligned} \quad (9.78)$$

e dunque, essendo il segno di $\det(-v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$ opposto a quello di $\det(v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$ si ottiene (9.75) con $a = -1$. Infine se a è un numero reale negativo, $a = -|a|$, si ottiene

$$\Delta_0(av^{(1)}, \dots, v^{(n)}) = -\Delta_0(|a|v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) = a\Delta_0(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) ,$$

quindi (9.75) è vera per ogni $a \in \mathbb{R}$. Usando la già dimostrata proprietà 1) si ottiene che

$$\Delta_0(v^{(1)}, \dots, av^{(j)}, \dots, v^{(n)}) = a\Delta_0(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) , \quad (9.79)$$

per qualunque $1 \leq j \leq n$. Resta ora da dimostrare

$$\Delta_0(v + w, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) = \Delta_0(v, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) + \Delta_0(w, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) . \quad (9.80)$$

Cominciamo col discutere un caso particolare di (9.80) e cioè $v = v^{(1)}$, $w = v^{(2)}$ (in qual caso il secondo addendo a destra di (9.80) è nullo per definizione di Δ_0):

$$\Delta_0(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) = \Delta_0(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) . \quad (9.81)$$

Se $\det T \equiv \det[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}] = 0$, la (9.81) è chiaramente vera. Assumiamo dunque che $\det T \neq 0$ e introduciamo i seguenti "prismi"

$$D_1 \equiv \{x \in K_1 : x_2 \leq x_1\}, \quad D_2 \equiv \{x \in K_1 : x_2 \geq x_1\}, \quad D_3 \equiv e^{(2)} + D_1 \quad (9.82)$$

e si noti che $m(D_1 \cap D_2) = 0$, $m(D_2 \cap D_3) = 0$ e che

$$\Pi(e^{(1)}, \dots, e^{(n)}) = K_1, \quad \Pi(e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}) = D_2 \cup D_3. \quad (9.83)$$

Inoltre, poiché, se $T = [v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]$, $Te^{(i)} = v^{(i)}$, si ha

$$\begin{aligned} \Pi(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) &= TK_1 = TD_1 \cup TD_2, \\ \Pi(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) &= TD_2 \cup TD_3 = TD_2 \cup (v^{(2)} + TD_1). \end{aligned}$$

Quindi, poiché $m(TD_1 \cap TD_2) = 0$ e $m(TD_2 \cap TD_3) = 0$ (essendo $x \rightarrow Tx$ derivabile e quindi lipschitziana) e poiché la misura è invariante per traslazioni, si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Pi(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) &= m(TD_2) + m(TD_3) \\ &= m(TD_2) + m(TD_1) \\ &= m(TD_1 \cup TD_2) \\ &= m(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})), \end{aligned}$$

il che dimostra (9.81). Combinando (9.81) con la proprietà 1) si ottiene

$$\Delta_0(v^{(1)} + v^{(j)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) = \Delta_0(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) \quad (9.84)$$

per ogni $2 \leq j \leq n$. Sia ora a un numero diverso da 0. Allora da (9.79) (con $j = 2$) e da (9.81), si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Pi(v^{(1)} + av^{(2)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) &= \frac{1}{a} m(\Pi(v^{(1)} + av^{(2)}, av^{(2)}, \dots, v^{(n)})) \\ &= \frac{1}{a} m(\Pi(v^{(1)}, av^{(2)}, \dots, v^{(n)})) \\ &= m(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})). \end{aligned} \quad (9.85)$$

Naturalmente per $a = 0$, l'uguaglianza tra il primo e l'ultimo membro di (9.85) è vera. Usando ancora la proprietà 1), otteniamo, per ogni $2 \leq j \leq n$, e per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_0(v^{(1)} + av^{(j)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) = \Delta_0(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}). \quad (9.86)$$

Torniamo ora a (9.80). Naturalmente se $v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$ sono linearmente dipendenti (9.80) è vera, essendo entrambi i membri a sinistra e destra dell'uguaglianza nulli. Assumiamo dunque $v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$ linearmente indipendenti. Per lo stesso motivo, (9.80) vale se v e w sono entrambi linearmente dipendenti con $v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$. Assumiamo quindi che o v o w sia linearmente indipendente con $v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$. Supponiamo che lo sia v e chiamiamolo $v^{(1)}$, cosicché $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ forma una base in

$\mathbb{R}^n$. Allora esistono n costanti a_i tali che $w = \sum_{i=1}^n a_i v^{(i)}$ ed usando (9.86) ed (9.75),

$$\begin{aligned}
 m(\Pi(v+w, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) &= m(\Pi(v^{(1)} + \sum_{i=1}^n a_i v^{(i)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) \\
 &= m(\Pi((1+a_1)v^{(1)} + \sum_{i=2}^n a_i v^{(i)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) \\
 &= m(\Pi((1+a_1)v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) \\
 &= (1+a_1)m(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) \\
 &= m(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) + m(\Pi(a_1 v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) \\
 &= m(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) + m(\Pi(a_1 v^{(1)} + \sum_{i=2}^n a_i v^{(i)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) \\
 &= m(\Pi(v, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) + m(\Pi(w, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})) .
 \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione della proprietà 2) e quindi per quanto discusso sopra, vale (9.67). ■

Osservazione 9.62 Si noti che abbiamo dimostrato (9.67) per *ogni* matrice T (cioè non solo per matrici T invertibili).

Sia ora R il rettangolo $[0, b_1] \times \dots \times [0, b_n]$ con $b_n > 0$. Allora $R = \Lambda K_1$ dove $\Lambda = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ e quindi

$$\begin{aligned}
 m(TR) &= m(T(\Lambda K_1)) = m((T\Lambda)K_1) = |\det(T\Lambda)| \\
 &= |\det T| |\det \Lambda| = |\det T| (b_1 b_2 \dots b_n) = |\det T| m(R) .
 \end{aligned}$$

E poiché, se $a = (a_1, \dots, a_n)$,

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = a + [0, b_1 - a_1] \times \dots \times [0, b_n - a_n]$$

dall'invarianza della misura di Lebesgue per traslazioni segue che, per ogni rettangolo $R \subset \mathbb{R}^n$,

$$m(TR) = |\det T| m(R) . \quad (9.87)$$

Dimostrazione di (9.65). Sia $\Delta_\phi(x) \equiv |\det \frac{\partial \phi}{\partial x}(x)|$. Dividiamo la dimostrazione di (9.65) in tre passi: (1) dimostriamo prima che per ogni cubo chiuso $R \subset A$, vale

$$m(\phi(R)) = \int_R \Delta_\phi(x) dx ; \quad (9.88)$$

(2) vediamo poi che (9.88) vale anche se R è un qualunque rettangolo chiuso contenuto in A e, (3), dimostriamo (9.65).

(1): Sia dunque R un cubo chiuso contenuto in A . Essendo $\phi \in C^1(R)$ segue che per ogni $x, y \in R$ con $|x - y|_\infty \leq \delta$ si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\Delta_\phi(x) - \Delta_\phi(y)| \leq \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(y) \right\| \leq \varepsilon. \quad (9.89)$$

Lemma 9.63 *Siano*

$$c_1 \equiv \max \left\{ 1, \sqrt{n} \sup_R \left\| \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{-1} \right\| \right\}, \quad c_2 \equiv n c_1 (1 + c_1)^{n-1} \sup_R \Delta_\phi.$$

Allora, per ogni $0 < \varepsilon < 1/c_1$, se δ è come in (9.89) e se K è un cubo in R di centro x_0 e lato $r \leq \delta$, si ha che

$$|m(\phi(K)) - \Delta_\phi(x_0) \text{mis } K| \leq c_2 \varepsilon \text{mis } K. \quad (9.90)$$

Dimostrazione Per la formula di Taylor (al prim'ordine), possiamo scrivere per ogni $x \in R$ ed ogni h tale che $x + h \in R$

$$\phi(x + h) = \phi(x) + Th + \theta(h, x), \quad (9.91)$$

dove

$$T \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x}(x), \quad \theta(h, x) \equiv \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x + th) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) \right) dt \right] h, \quad (9.92)$$

(si noti che R è un insieme convesso e quindi il segmento $\{x + th : t \in [0, 1]\}$ è interamente contenuto in R). Si osservi che, da (9.89) e (9.92) segue che, per ogni $x \in R$, $x + h \in R$ con $|h|_\infty \leq \delta$

$$|\theta(h, x)| \leq |h| \varepsilon \leq \sqrt{n} |h|_\infty \varepsilon. \quad (9.93)$$

La (9.90) sarà una semplice conseguenza della seguente relazione

$$T^{-1}y_0 + K_{r(1-c_1\varepsilon)} \subset T^{-1}\phi(K) \subset T^{-1}y_0 + K_{r(1+c_1\varepsilon)}, \quad (9.94)$$

dove K_ρ denota il cubo chiuso di centro l'origine e lato ρ e $y_0 \equiv \phi(x_0)$.

Per dimostrare la (9.94), notiamo che, essendo la mappa $x \rightarrow T^{-1}\phi(x)$, continua, invertibile ed aperta su⁷³ $R \subset A$, per il Lemma 9.59, punto (ii), si ha che $\partial(T^{-1}\phi(K)) = T^{-1}\phi(\partial K)$. Quindi, se $x \in \partial K$ ovvero se $x = x_0 + \rho$ con $|\rho|_\infty = \frac{r}{2}$, usando (9.91) (moltiplicata per T^{-1}), si ottiene

$$\begin{aligned} |T^{-1}\phi(x) - T^{-1}y_0|_\infty &= |\rho + T^{-1}\theta|_\infty \\ &\geq |\rho|_\infty - |T^{-1}\theta|_\infty \geq |\rho|_\infty - \|T^{-1}\| |\theta| \\ &\geq \frac{r}{2} (1 - \|T^{-1}\| \sqrt{n} \varepsilon) \end{aligned} \quad (9.95)$$

dove, nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato (9.93) ed il fatto che $|\rho|_\infty = r/2$. Essendo $c_1 \geq \sqrt{n} \sup_A \left\| \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{-1} \right\|$, si ha che un punto sulla frontiera di $T^{-1}\phi(K)$ ha distanza (in

⁷³Si ricorda che una funzione F si dice "aperta" se l'immagine di ogni insieme aperto è un aperto ovvero se $F(A)$ è un insieme aperto, per ogni insieme aperto A .

norma $|\cdot|_\infty$ almeno $\frac{r}{2}(1 - c_1\varepsilon)$ da $T^{-1}y_0$ e quindi $T^{-1}y_0 + K_{r(1-c_1\varepsilon)}(x_0) \subset T^{-1}\phi(K)$. Analogamente, se x è un punto di K , e quindi $x = x_0 + \rho$ con $|\rho|_\infty \leq \frac{r}{2}$,

$$\begin{aligned} |T^{-1}\phi(x) - T^{-1}y_0|_\infty &= |\rho + T^{-1}\theta|_\infty \\ &\leq |\rho|_\infty(1 + c_1\varepsilon) \leq \frac{r}{2}(1 + c_1\varepsilon), \end{aligned} \quad (9.96)$$

ovvero vale anche la seconda inclusione di (9.94). Ora, poiché [invarianza per traslazione e (9.87)]

$$m(y_0 + TK_{r(1 \pm c_1\varepsilon)}) = |\det T| r^n (1 \pm c_1)^n,$$

da (9.94) (moltiplicando ambo i membri per T) segue che

$$|\det T| r^n (1 - c_1\varepsilon)^n \leq m(\phi(K)) \leq |\det T| r^n (1 + c_1\varepsilon)^n,$$

e la (9.90) si ottiene notando che $(1 - c_2\varepsilon) \leq (1 - c_1\varepsilon)^n$ e $(1 + c_1\varepsilon)^n \leq (1 + c_2\varepsilon)$ (si usi, ad esempio, la formula di Lagrange applicata alle funzioni $f(t) \equiv (1 \pm c_1t)^n$ tra ε e 0). ■

Sia $0 < \varepsilon < 1/c_1$ e si suddivida il cubo R in cubetti $K_1, \dots, K_N$ di lato non superiore a δ [con δ come in (9.89)] e di centro $x^{(j)}$. Dall'additività dell'integrale di Lebesgue, dalla (9.89) e dal Lemma segue che

$$\begin{aligned} &\left| \int_R \Delta_\phi - m(\phi(R)) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{K_j} [\Delta_\phi(x) - \Delta_\phi(x^{(j)})] dx + \Delta_\phi(x^{(j)}) m(K_j) - m(\phi(K_j)) \right\} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \int_{K_j} |\Delta_\phi(x) - \Delta_\phi(x^{(j)})| dx + |\Delta_\phi(x^{(j)}) m(K_j) - m(\phi(K_j))| \\ &\leq \sum_{j=1}^N (\varepsilon \text{mis } K_j + c_2\varepsilon \text{mis } K_j) = \varepsilon (\text{mis } R)(1 + c_2). \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue il punto (1).

(2): Sia $R \subset A$ un rettangolo chiuso. E' facile vedere che esiste una famiglia numerabile di cubi chiusi $\{K_j\}$ tali che $\overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset$ (se $i \neq j$) e $\cup_j K_j = R$. Da questo segue anche che $m(\phi(K_i) \cap \phi(K_j)) = 0$ (se $i \neq j$) e $\cup_j \phi(K_j) = \phi(R)$. Dunque, per il punto (vii) della Proposizione 9.49, per il punto (1) e per il teorema di convergenza monotona (poiché $\Delta_\phi \sum_{i=1}^j \chi_{K_i} \uparrow \Delta_\phi$ su R), si ha che

$$\int_R \Delta_\phi = \sum_{j \geq 1} \int_{K_j} \Delta_\phi = \sum_{j \geq 1} m(\phi(K_j)) = m(\phi(R)).$$

(3): Il ragionamento è del tutto analogo a quello appena fatto. Innanzitutto, dal punto precedente segue immediatamente che la (9.88) vale anche se R è un insieme

elementare. Dal Lemma 9.50 segue poi che $A = \cup_j E_j$ con E_j insiemi elementari. Quindi per il punto (viii) della Proposizione 9.49 e per il teorema di convergenza monotona (nel caso che $m(\phi(A)) < \infty$) o per il punto (v) dell'Osservazione 9.51 (nel caso $m(\phi(A)) = \infty$) si ha che

$$m(\phi(A)) = \lim_j m(\phi(E_j)) = \lim_j \int_{E_j} \Delta_\phi = \int_A \Delta_\phi ,$$

il che conclude la dimostrazione della (9.65). ■

Dimostrazione di (9.66). Sia R un rettangolo aperto in $\mathbb{R}^n$ con $R \cap B \neq \emptyset$. Poiché $A' \equiv \phi^{-1}(R \cap B)$ è un aperto per cui valgono le condizioni grazie alle quali abbiamo derivato (9.65), si ha che $\int_{A'} \Delta_\phi = m(R \cap B)$ ovvero (essendo $\chi_{A'} = \chi_R \circ \phi \cdot \chi_A$)

$$\int_A \chi_R \circ \phi \cdot \Delta_\phi = \int_B \chi_{R \cap B} . \quad (9.97)$$

Poiché le coppie di funzioni $\chi_{R \cap B}$, $\chi_{\bar{R} \cap B}$ e $\chi_{R \cap B} \cdot \Delta_\phi$, $\chi_{\bar{R} \cap B} \cdot \Delta_\phi$ differiscono tra loro su un insieme di misura nulla, si ha che (9.97) vale per qualunque rettangolo limitato R (cioè non necessariamente aperto). Dunque, ricordando la definizione di $S(B)$ (punto (iii) dell'Osservazione 9.54), si vede che (9.66) vale per ogni funzione $f \in S(B)$: se $f = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{R_j \cap B}$ (con R_j rettangoli limitati e disgiunti)

$$\int_B f = \sum_{j=1}^N c_j \int_B \chi_{R_j \cap B} = \sum_{j=1}^N c_j \int_A \chi_{R_j} \circ \phi \cdot \Delta_\phi = \int_A f \circ \phi \cdot \Delta_\phi .$$

La (9.66) è dunque valida per funzioni $f \in \mathcal{F}(B)$ [per il Teorema di convergenza monotona e per la definizione di $\mathcal{F}(B)$] e quindi, per linearità, segue anche che se $f \in \mathcal{L}^1(B)$ allora $f \circ \phi \cdot \Delta_\phi \in \mathcal{L}^1(A)$ e la validità di (9.66). ■

Esercizi e complementi

E 9.1 Dimostrare in dettaglio la Proposizione 9.5.

E 9.2 Dimostrare in dettaglio i punti (i) e (ii) della Proposizione 9.5 nel caso in cui $S(E)$ venga sostituito da $\mathcal{R}(E)$.

E 9.3 Dimostrare che se $A \in \mathcal{N}^k$, $B \in \mathcal{N}^h$ allora $A \times B \in \mathcal{N}^{k+h}$.

E 9.4 Sia $f \equiv 0$ su $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ e $f(x) \equiv 1/n$ se $x = m/n$ con $0 \leq m \leq n \leq 1$ (m ed n relativamente primi). (i) Dimostrare che l'insieme di discontinuità di f è $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. (ii) Dimostrare direttamente (senza usare il Teorema di Vitali-Lebesgue) che $f \in \mathcal{R}([0, 1])$.

E 9.5 Dimostrare che se A è un insieme misurabile secondo Peano-Jordan, lo sono anche $\bar{A}$, A° e ∂A .

E 9.6 Dimostrare che $\mathbb{Q}^n \cap E$ (con E rettangolo qualunque) è un insieme di misura nulla non misurabile secondo Peano–Jordan.

E 9.7 Dimostrare che se A è misurabile secondo Peano–Jordan allora A è di misura nulla se e solo se $\text{mis}_n A = 0$.

E 9.8 Sia $B \in \mathcal{N}^n$ è come in (9.23). Dimostrare che vale la (9.24).

E 9.9 (Curva di Peano) Esiste una funzione continua $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi([0, 1]) = K \equiv [0, 1] \times [0, 1]$ ossia esiste una “curva” che ricopre un quadrato.

Se $I \equiv [0, 1] \times \{0\}$ denota il segmento unitario immerso in $\mathbb{R}^2$ e se, per ogni $(x, y) \in I$, definiamo $f(x, y) = \varphi(x)$, vediamo che $f \in C(I, \mathbb{R}^2)$, $\text{mis}_2(I) = 0$ ma $\text{mis}_2(f(I)) = \text{mis}_2([0, 1]^2) = 1$.

Si completino i dettagli del seguente schema di dimostrazione:

(i) Sia K un quadrato di lato di lunghezza ℓ e lo si suddivida in quattro quadrati di lato $\ell/2$. Si fissi un lato L di K e su di esso si fissi un punto M a distanza $\ell/4$ da uno dei vertici di L e si fissi un altro lato L' di K diverso da L . Si faccia vedere che esiste una ed una sola poligonale di lunghezza 2ℓ , che passi per i centri dei quattro quadrati in cui è stato suddiviso K e con estremi M ed N dove N è un punto su L' a distanza $\ell/4$ da uno dei suoi due estremi.

(ii) Sia $a < b$. Si “parametrizzi” su $[a, b]$ una qualunque poligonale in $\mathbb{R}^n$ ossia, se gli estremi della poligonale hanno coordinate x e y , si trovi una funzione $\gamma : t \in [a, b] \rightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ e tale che l’insieme $\{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ coincida con la poligonale data⁷⁴.

(iii) La funzione (o “curva”) φ sarà ottenuta come limite (uniforme) di funzioni continue $\varphi_k : [0, 1] \rightarrow K$. Ogni φ_k sarà una parametrizzazione di una poligonale chiusa che passa per ogni centro dei 2^{2k} quadrati di lato 2^{-k} in cui si divide K . Denoteremo con Γ_k la poligonale parametrizzata da φ_k , cioè $\Gamma_k \equiv \{\varphi_k(t) : 0 \leq t \leq 1\}$. *Primo passo*: si divida K in quattro quadrati di lato $1/2$ e sia Γ_1 la poligonale formata dai quattro segmenti che uniscono i centri dei quattro quadrati. *Secondo passo*: Si consideri il quadrato K_1^1 di lato $1/2$ di centro $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ e sia $\Gamma_1^1 \equiv \Gamma_1 \cap K_1^1$. Si divida K_1^1 in quattro quadrati di lato $1/4$ (che chiameremo $K_2^1, \dots, K_4^1$) ed usando il punto (i) si costruisca una poligonale Γ_2^1 che passi per i quattro centri di K_2^1 con estremi a distanza $1/8$ dai due punti in $\Gamma_1^1 \cap K_1^1$: vi sono infatti due poligonali con tali proprietà e per eliminare tale ambiguità si scelga quella con uno degli estremi in $(\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$. Si divida K in 16 quadrati di lato $1/4$, K_2^j , $j = 1, \dots, 16$. Iterando il procedimento sopra descritto si costruisca la poligonale chiusa Γ_2 che passi per tutti i 16 centri dei K_2^j (e per il punto $(\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$: $\Gamma_2^1 = \Gamma_2 \cap K_1^1$ etc.). *Terzo passo*: si generalizzi il procedimento descritto sopra e per ogni k si costruisca una poligonale chiusa, Γ_k , che passi per i 2^{2k} centri dei quadrati di lato 2^{-k} in cui è possibile suddividere K . Tale costruzione è unica se si impone che la poligonale passi anche per il punto $(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}})$.

(iv) Si parametrizzi Γ_k tramite $\varphi_k(t)$ in modo tale che $\varphi_k(\frac{j}{2^{k+1}})$ coincida, per ogni $j = 1, \dots, 2^{2k}$, con il centro di K_k^j (si noti che Γ_k dà un ordine ai quadrati di lato 2^{-k} per i cui centri passa).

(v) Si dimostri che per ogni $0 \leq t \leq 1$ vale $|\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ e da questo si deduca che $\varphi_k(t)$ converge uniformemente: il limite $\varphi(t)$ sarà dunque una funzione continua da $[0, 1]$ in K (e $\varphi(0) = (\frac{1}{2}, 1)$).

(vi) Si dimostri che φ è surgettiva su K cioè $\varphi([0, 1]) = K$.

(vii) φ è anche iniettiva?

⁷⁴Un segmento di estremi x e z è parametrizzato su $[a, b]$ da $\gamma(t) = x + \frac{t-a}{b-a}(z-x)$.

E 9.10 Sia R un rettangolo chiuso in $\mathbb{R}^n$. (i) Si dimostri che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono N cubi aperti $R_1, \dots, R_N$ tali che $R \subset E \equiv R_1 \cup \dots \cup R_N$ e che $m(E \setminus R) \leq \varepsilon$. (ii) Si dia una stima di N in termini di ε e delle lunghezze dei lati di R .

E 9.11 Si dimostri che " $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}$ " è equivalente ad ognuna delle seguenti proprietà:

- (i) $\{f \geq a\} \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathbb{R}$; (ii) $\{f > a\} \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathbb{R}$;
 (iii) $\{a \leq f < b\} \in \mathcal{M}, \forall a, b \in \mathbb{R}$; (iv) $\{a < f \leq b\} \in \mathcal{M}, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

E 9.12 Si dimostri che l'insieme $A \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1/\sqrt{x}\}$ è misurabile secondo Lebesgue e se ne calcoli la sua misura.

E 9.13 Dimostrare che ogni insieme misurabile secondo Peano–Jordan è misurabile secondo Lebesgue.

E 9.14 Sia $f \in S(E)$ e sia C il suo supporto. Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in S(E)$ con $\text{supp}(g) \subset \overset{\circ}{C}$ tale che $\int_E |f - g| \leq \varepsilon$.

E 9.15 Sia f come nel punto (v) dell'Osservazione 9.30, sia $Q \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di misura nulla, sia f_0 una qualunque funzione che vale 0 al di fuori di Q . Si dimostri che $f + f_0$ non è integrabile secondo Riemann.

E 9.16 Siano E_0 e A come nel punto (v) dell'Osservazione 9.30 e si dimostri che l'insieme $E_0 \setminus A$ non è un insieme di misura nulla.

E 9.17 Sia $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $m(A) = \infty$ e siano $E_j \in \mathcal{M}$ tali che $E_j \subset E_{j+1}$, $m(E_j) < \infty$ e $\cup_j E_j = \mathbb{R}^n$. Si dimostri che $\infty > m(A \cap E_j) \uparrow \infty$.

E 9.18 Si dia un esempio di insiemi misurabili A_k in $\mathbb{R}^n$ tali che $A_{k+1} \subset A_k$ ma $m(\cap A_k) \neq \lim m(A_k)$.

E 9.19 Sia $B_r(x_0)$ la sfera (euclidea) aperta in $\mathbb{R}^n$ centrata in x_0 e di raggio r . Dimostrare che esiste $\bar{x}_0 \in \mathbb{Q}^n$ e $0 < \bar{r} \in \mathbb{Q}$ tali che il cubo aperto di centro $\bar{x}_0$ e lato $\bar{r}$ sia contenuto in $B_r(x_0)$ e contenga x_0 .

E 9.20 Si generalizzi l'esempio di Vitali (punto (iv) dell'Osservazione 9.51) a $\mathbb{R}^n$.

E 9.21 Si dimostri la (9.61) nel caso in cui $A, B \in \mathcal{M}$ e $m(A \cap B) = 0$.

E 9.22 (L'insieme ternario di Cantor) L'insieme ternario di Cantor K è un sottoinsieme di $[0, 1]$ con le seguenti proprietà: (a) K è chiuso, non ha punti isolati ed è totalmente sconnesso (ovvero non contiene nessun intervallo); (b) K ha la potenza del continuo (ovvero esiste un'applicazione 1-1 da K in $\mathbb{R}$); (c) la misura di Lebesgue di K è zero.

Costruzione di K : (i) ad un qualunque intervallo chiuso (limitato e di lunghezza positiva) I associamo due intervalli chiusi I'_1 e I'_2 ottenuti rimuovendo da I l'intervallo aperto che ha lo stesso centro di I e lunghezza uguale ad un terzo di quella di I .

(ii) Definiamo ora intervalli I_j^k per $k \geq 0$ e $1 \leq j \leq 2^k$: $I_1^0 \equiv [0, 1]$ e per $k \geq 1$ gli I_j^k sono gli intervalli (ordinati) ottenuti dagli I_j^{k-1} come descritto nel punto (i). Per costruzione

gli intervalli I_j^k sono, per ogni k fissato, chiusi, disgiunti e di lunghezza $1/3^k$ cosicchè $\sum_{j=1}^{2^k} \text{mis}(I_j^k) = (2/3)^k$.

(iii) Sia $I^k \equiv \bigcup_{j=1}^{2^k} I_j^k$. Chiaramente $I^{k+1} \subset I^k$. Definiamo $K \equiv \bigcap_{k \geq 0} I^k$.

Si dimostrino le proprietà (a), (b) e (c) sopra enunciate.

E 9.23 Dare un esempio di insieme $\tilde{Q} \subset [0, 1]^2$ di misura nulla (in $\mathbb{R}^2$) tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, Q_x e Q_y non sono di misura nulla in $\mathbb{R}$.

E 9.24 (tratto da M. Reed, B. Simon *Functional Analysis*) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f = 1$ su $\{x > 0, y > 0, 0 \leq x - y \leq 1\}$, $f = -1$ su $\{x > 0, y > 0, 0 < y - x < 1\}$ e $f = 0$ altrimenti. Si calcolino gli integrali iterati di f e si spieghi il risultato.

E 9.25 (Funzioni semplici) Una funzione $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ si dice **semplice** se assume un numero finito di valori. Esempi di funzioni semplici sono le funzioni a scalini oppure combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. Dimostrare le seguenti asserzioni:

(i) Una funzione è misurabile se e solo se è limite (q.o.) di funzioni semplici.

(ii) Per ogni funzione $f \in \mathcal{L}^1$ esiste una successione di funzioni semplici $f_k \in \mathcal{L}^1$ tale che $f_k \rightarrow f$ (q.o.) e $\|f - f_k\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$.

E 9.26 Sia $f \in \mathcal{L}^1(E)$. Dimostrare: (i) $\lim_{r \rightarrow \infty} m(\{|f| \geq r\}) = 0$; (ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\{|f| \geq r\}} |f| = 0$.

E 9.27 Sia $f \in \mathcal{L}^1(E)$. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $A \in \mathcal{M}(E)$ con $m(A) \leq \delta$ si ha che $\int_A |f| \leq \varepsilon$.

E 9.28 Sia $f \in \mathcal{L}^1$ e $B_j \in \mathcal{M}$ tali che $m(B_j) \rightarrow 0$. Dimostrare che $\int_{B_j} f \rightarrow 0$.

E 9.29 Dimostrare che se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ allora esiste un insieme illimitato di misura positiva E tale che $\lim f(x_k) = 0$ per ogni successione $x_k \in E$ tale che $\lim |x_k| = \infty$.

E 9.30 Trovare $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ed insiemi illimitati di misura positiva $E_{\pm}$ tale che $\lim f(x_k) = \pm \infty$ per ogni successione $x_k \in E_{\pm}$ tale che $\lim |x_k| = \infty$.

E 9.31 Dimostrare che il grafico $G_f \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$ di una funzione misurabile $f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ è un insieme di misura nulla.

C 9.32 Un numero $\omega \in \mathbb{R}$ si dice **diofanteo** se esistono $\gamma > 0$ e $\tau \geq 1$ tali che

$$|\omega q - p| \geq \frac{\gamma}{|q|^\tau}, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z} \quad \text{con} \quad q \neq 0. \quad (9.98)$$

Si noti che numeri diofantei sono irrazionali e che la (9.98) dà una stima sulla “velocità” con cui è possibile approssimare un numero diofanteo ω con dei numeri razionali (si divida la (9.98) per q).

Sia $\mathcal{D}_{\gamma, \tau}$ l'insieme dei numeri diofantei per cui vale (9.98) e sia $\mathcal{D}$ l'insieme di tutti numeri diofantei con $\tau > 1$ (ovvero $\mathcal{D} \equiv \bigcup_{\gamma > 0} \bigcup_{\tau > 1} \mathcal{D}_{\gamma, \tau}$).

$\mathcal{D}_{\gamma,\tau}$ è misurabile: infatti

$$\mathcal{D}_{\gamma,\tau} = \bigcap_{p \in \mathbb{Z}} \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Z} \\ q \neq 0}} \left\{ x \in \mathbb{R} : |xq - p| \geq \frac{\gamma}{|q|^\tau} \right\}.$$

$\mathcal{D}$ è misurabile: $\mathcal{D}$ coincide con l'unione di $\mathcal{D}_{\gamma,\tau}$ fatta su tutti i γ e τ razionali con $\gamma > 0$ e $\tau > 1$.

$\mathcal{D}^c$ coincide con l'intersezione su tutti i $\gamma > 0$ e $\tau > 1$ razionali di $\mathcal{D}_{\gamma,\tau}^c$.

Se $\gamma \leq 1$ allora $(\mathcal{D}_{\gamma,\tau}^c \cap [-R, R]) \subset \bigcup_{p,q \neq 0} I_{p,q}$ dove $I_{p,q}$ è l'intervallo aperto di centro $p/q \in [-R-1, R+1]$ di lunghezza $2\gamma/|q|^{\tau+1}$. Dunque

$$\begin{aligned} m(\mathcal{D}_{\gamma,\tau}^c \cap [-R, R]) &\leq m\left(\bigcup_{p,q \neq 0} I_{p,q}\right) \leq \sum_{q \neq 0} \sum_{|p| \leq (R+1)|q|} \frac{2\gamma}{|q|^{\tau+1}} \\ &\leq 2(R+2)\gamma \sum_{q \neq 0} \frac{1}{|q|^\tau} \equiv \gamma c(\tau, R). \end{aligned}$$

Da questo segue che $\mathcal{D}^c$ è un insieme di misura nulla.

E 9.33 Per ogni $k \in \mathbb{Z}_+$, sia $a_k \equiv \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}$. Se $\{x\}$ denota la funzione “parte frazionaria di x ” [ovvero $\{x\}$ è l'unico numero in $[0, 1)$ tale che $x = n + \{x\}$ con $n \in \mathbb{Z}$], sia $A_k \equiv \{x = \{y\} : a_k \leq y \leq a_{k+1}\}$. Dimostrare che A_k è un insieme elementare e che

$$\int_0^1 \chi_{A_k} \equiv m(A_k) = \frac{1}{k+1}, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \chi_{A_k}(x) = 1, \quad \forall x \in [0, 1].$$

E 9.34 Sia A_k come nell'esercizio precedente e $f_k \equiv \chi_{A_k}$. Trovare (esplicitamente) una sottosuccessione f_{k_j} tale che $f_{k_j} \rightarrow 0$ q.o. in $[0, 1]$.

E 9.35 Trovare una successione di funzioni a scalini e non negative in $[0, 1]$ tale che $\int_0^1 f_k = 1$ per ogni k e $\lim f_k(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$.

E 9.36 Trovare funzioni misurabili f_k su $[0, 1]$ tali che: per ogni k , f_k è q.o. continua; $\sup_k f_k(x) = \infty$ per ogni $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$; esiste $M > 0$ tale che $|f_k(x)| \leq M$ per ogni $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

E 9.37 Si dimostri che 1) e 2) di (9.68) implicano che Δ è lineare rispetto al j -esimo vettore, con j arbitrario.

E 9.38 Si dimostri che se $\Delta = \Delta(v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$ è una funzione definita su n -uple di vettori in $\mathbb{R}^n$ che verifica (9.68), allora $\Delta(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) = \det[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]$.

E 9.39 Sia $R \equiv [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ e si dimostri che $R = \bigcup K_j$ con K_j cubi chiusi tali che $m(K_i \cap K_j) = 0$ se $i \neq j$.

E 9.40 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $\phi \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Dimostrare che ϕ è invertibile con inversa C^1 se e solo se ϕ è iniettiva e $\det \phi' \neq 0$ su A .

E 9.41 Sia $F(y)$ la trasformazione inversa della ϕ del Teorema 9.58 cioè

$$F : y \in B \equiv \phi(A) \rightarrow x = F(y) \in A. \quad (9.99)$$

- (i) Dimostrare che la coppia B e F verifica le ipotesi del Teorema 9.58.
 (ii) Dimostrare che se g è una funzione integrabile su $A = F(B)$, allora si ha

$$\int_A g(x) dx = \int_B g \circ F(y) \cdot \left| \det \frac{\partial F}{\partial y}(y) \right| dy. \quad (9.100)$$

E 9.42 (Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$) Sia $B \equiv (0, R) \times (0, 2\pi)$ e $F : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$F : (\rho, \theta) \in B \rightarrow x = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta). \quad (9.101)$$

- (i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del Teorema 9.58 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y \equiv (\rho, \theta)$).
 (ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ .
 (iii) Qual è l'immagine, secondo F , di un rettangolino $[r, r+s] \times [\theta, \theta+\sigma]$?

E 9.43 (i) Si dimostri che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (9.102)$$

(ii) Si dimostri che

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{\frac{n}{2}}. \quad (9.103)$$

E 9.44 Per ogni $m \in \mathbb{N}$, si calcoli $I_m \equiv \int_0^{\infty} x^m e^{-x^2} dx$.

E 9.45 Sia $A \equiv B'_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < R\}$ e sia

$$\phi(x) \equiv (x_1^2 - x_2^2, 2x_1 x_2).$$

(i) Si dimostri che $\Delta_\phi \equiv \left| \det \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| > 0$ per ogni $x \in A$ ma che

$$\begin{aligned} \int_A \Delta_\phi dx &= 2\pi R^4 \\ \phi(A) = B'_{R^2} &\implies m(\phi(A)) = \pi R^4. \end{aligned}$$

- (ii) Si spieghi perchè non vale la tesi del Teorema 9.58.
 (iii) Si trovi un insieme A' su cui, invece, valga la tesi del Teorema 9.58.

E 9.46 (Coordinate polari in $\mathbb{R}^3$) Sia $B \equiv (0, R) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ e $F : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F : (\rho, \theta, \psi) \in B \rightarrow x = (\rho \cos \theta \sin \psi, \rho \sin \theta \sin \psi, \rho \cos \psi). \quad (9.104)$$

- (i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del Teorema 9.58 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y \equiv (\rho, \theta, \psi)$).
 (ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ .

E 9.47 (Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$) Sia $B \equiv (0, R) \times (0, 2\pi) \times (-h, h)$ e $F : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F : (\rho, \theta, z) \in B \rightarrow x = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) . \quad (9.105)$$

- (i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del Teorema 9.58 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y \equiv (\rho, \theta, z)$).
 (ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ .

E 9.48 (Solidi di rotazione in $\mathbb{R}^3$) Sia $E_0 \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$ un insieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ e α un numero in $(0, 2\pi]$. Si dimostri che

$$E \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, \text{ con } (\rho, z) \in E_0, \text{ e } \theta \in [0, \alpha]\}$$

è un insieme misurabile in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli il volume in termini di un integrale doppio su E_0 .

E 9.49 Si calcoli il volume del toro solido ottenuto ruotando un disco di raggio r attorno ad un asse a distanza $R > r$ dal centro del disco.

10 Integrazione su varietà di $\mathbb{R}^n$

In questo capitolo chiameremo **dominio** (o dominio k -dimensionale) un insieme compatto $D = \overline{U}$ di $\mathbb{R}^k$ che sia la chiusura di un insieme $U \subset \mathbb{R}^k$ aperto e connesso e tale che $\partial D = \partial U$ sia un insieme di misura nulla¹. Ad esempio, la sfera unitaria chiusa

$$\overline{B}_1^k = \{u \in \mathbb{R}^k : |u| \leq 1\} \quad (10.1)$$

è un dominio in $\mathbb{R}^k$ (per $k = 1$ è semplicemente l'intervallo chiuso $[-1, 1]$). Sostituendo la norma euclidea $|\cdot|$ con la norma del massimo $|\cdot|_\infty$, si ottiene il dominio dato dal cubo di lato 2 centrato nell'origine; se $k = 2$ (o $k \geq 2$) tali insiemi hanno una ovvia differenza dal punto di vista geometrico: la frontiera del quadrato presenta delle "singolarità" (i vertici del quadrato) che, invece, la frontiera di $\overline{B}_1^2$ (e cioè la circonferenza unitaria S^1) non presenta. Nei seguenti paragrafi daremo un significato preciso a queste osservazioni intuitive e studieremo gli elementi del calcolo integrale (di funzioni regolari o regolari a tratti) su tali insiemi.

10.1 Inclusioni differenziabili in $\mathbb{R}^n$ e varietà

Definiamo ora una "inclusione differenziabile"² di un dominio k -dimensionale nello "spazio ambiente" $\mathbb{R}^n$, con $n \geq k$:

Definizione 10.1 Sia D un dominio k -dimensionale. Una funzione $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ con $n \geq k$ si chiama **inclusione differenziabile** (o semplicemente "inclusione") di D in $\mathbb{R}^n$ se φ è iniettiva su D e la matrice jacobiana $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ha rango massimo su ogni punto $u \in D$.

Una coppia (φ, D) con φ inclusione differenziabile del dominio $D \subset \mathbb{R}^k$ verrà anche chiamata "inclusione differenziabile" o anche "inclusione k -dimensionale".

L'immagine³ $\varphi(D)$ di una inclusione è un oggetto geometrico k -dimensionale (essendo descritto dai k parametri $u = (u_1, \dots, u_k) \in D$) immerso in $\mathbb{R}^n$ e che ha le stesse "proprietà geometriche" del dominio D . In particolare, ad ogni punto $x \in \varphi(D)$ corrisponde un unico $u \in D$ (essendo φ iniettiva): cioè la φ definisce un sistema di coordinate su $\varphi(D)$. Inoltre tale sistema di coordinate sarà "regolare" nel senso che la corrispondenza $u \in D \rightarrow x \in \varphi(D)$ è descritta da una funzione C^1 e con jacobiano di rango massimo.

Definizione 10.2 Se φ è una inclusione del dominio $D \equiv \overline{U} \subset \mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^n$ (U aperto, connesso e limitato), l'insieme $S \equiv \varphi(U)$ si chiama **elemento (regolare) di varietà k -dimensionale** (o "elemento di k -varietà").

¹Ovvero D è misurabile secondo Peano-Jordan.

²La terminologia non è universale e dipende anche dalla lingua che si sta usando: altri termini che possono indicare oggetti simili (se non lo stesso oggetto) sono "immersione" oppure (in inglese) "immersion", "imbedding", "embedding" etc. Si faccia dunque molta attenzione alle definizioni date di volta in volta nei vari testi.

³Anche: "traccia" o "supporto".

- Osservazione 10.3** (i) Si noti che il “bordo” di S , $\varphi(\partial U)$, non appartiene a S .
- (ii) Dalla Proposizione 5.8 segue che l'immagine $\varphi(D)$ di una inclusione è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$. Inoltre, per 5.54, la funzione inversa $\varphi^{-1} : \varphi(D) \rightarrow D$ è continua su $\varphi(D)$. In particolare φ^{-1} è continua sull'elemento di varietà $S \equiv \varphi(U)$.
- (iii) Per ogni punto $x_0 \in S = \varphi(U)$ esiste un (unico) $u_0 \in U$ tale che $\varphi(u_0) = x_0$. Poiché U è aperto esiste una sfera aperta B di $\mathbb{R}^k$ interamente contenuta in U e poiché $g = \varphi^{-1}$ è continua su S , l'insieme $A \equiv \varphi(B) = g^{-1}(B)$ è un insieme aperto in S (nella topologia relativa⁴) quindi (per 5.56) $x_0 \in A = E \cap S$ per qualche insieme E aperto di $\mathbb{R}^n$.
- (iv) Dati due spazi metrici X ed Y , due sottoinsiemi $A \subset X$, $B \subset Y$ si dicono **omeomorfi** se esiste una funzione continua $g : A \rightarrow B$ con inversa continua su B ; la funzione biunivoca e *bicontinua* g si chiama un **omeomorfismo** di A su B . Quindi il punto (iii) può essere riformulato dicendo che: per ogni punto $x_0 \in S$ esiste un aperto $E \subset \mathbb{R}^n$ tale che $E \cap S$ è omeomorfo ad una sfera B in $\mathbb{R}^k$.
- (v) Dire che la matrice $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ha rango massimo (e cioè k) equivale a dire che i k vettori $\xi^{(i)} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$ in $\mathbb{R}^n$ sono *linearmente indipendenti* in $\mathbb{R}^n$.
- (vi) La parola “regolare”, che normalmete sottoindenderemo, si riferisce al fatto che l'elemento di varietà è realizzato tramite una funzione di classe C^1 .
- (vii) (**Cambiamenti di coordinate**) Siano $\varphi : D = \bar{U} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : E = \bar{V} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ due inclusioni differenzibili tali che $\varphi(U) = \psi(V) \equiv S$. Su S sono definite e continue [punto (ii)] le funzioni inverse φ^{-1} e ψ^{-1} . Sono dunque definite e continue le seguenti funzioni

$$v \equiv \psi^{-1} \circ \varphi : u \in U \rightarrow v(u) \in V, \quad u \equiv \varphi^{-1} \circ \psi : v \in V \rightarrow u(v) \in U. \quad (10.2)$$

Naturalmente $v(u)$ e $u(v)$ sono iniettive e sono l'una l'inversa dell'altra. In effetti, come ci accingiamo a dimostrare, tali funzioni sono dei **diffeomorfismi** (o, più precisamente dei “diffeomorfismi di classe C^1 ”) ovvero sono delle funzioni C^1 invertibili con inversa⁵ C^1 . Fissiamo $v_0 \in V$ e sia $u_0 \equiv u(v_0)$ (cosicché $v_0 = v(u_0)$). Poiché $\frac{\partial \psi}{\partial v}(v_0)$ ha rango k esistono $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ tali che, ponendo $\hat{\psi} \equiv (\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_k})$, si ha $\det \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial v}(v_0) \neq 0$. Definiamo $F(v, u) \equiv \hat{\psi}(v) - \hat{\varphi}(u)$, con $\hat{\varphi} \equiv (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})$. F è di classe $C^1(\{(v_0, u_0)\})$, $\det \frac{\partial F}{\partial v}(v_0, u_0) = \det \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial v}(v_0) \neq 0$ e $F(v_0, u_0) = 0$. Dunque dal Teorema delle funzioni implicite segue che esiste un'unica funzione continua $\bar{v}$ tale che $\bar{v}(u_0) = v_0$ e $F(\bar{v}(u), u) = 0$ in un intorno di u_0 ed in più tale funzione è di classe $C^1(\{u_0\})$. Poiché anche $v(u)$ soddisfa $v(u_0) = v_0$ e $F(v(u), u) = 0$ (in un intorno di u_0) per l'unicità della funzione implicita segue che $\bar{v}(u)$ coincide con $v(u)$ in un intorno di u_0 e questo, in particolare, significa che $v \in C^1(\{u_0\})$. Dal Corollario 7.6 segue che anche lo jacobiano di $v(u)$, $\frac{\partial v}{\partial u}(u_0)$ è invertibile ed ha per inverso lo jacobiano $\frac{\partial u}{\partial v}(v_0)$.

(viii) Sia $u_0 \in \mathbb{R}^k$ e $\varphi \in C^1(\{u_0\}, \mathbb{R}^n)$ con $n \geq k$. Se $\text{rango} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0) = k$ allora esiste una sfera chiusa $D \subset \mathbb{R}^k$ di centro u_0 tale che (φ, D) è un'inclusione differenziabile in $\mathbb{R}^n$.

⁴Si ricordi 5.52 e (5.158).

⁵Si ricordi il Corollario 7.6.

Infatti dalle ipotesi segue che esiste un intorno u_0 su cui φ è C^1 e su cui $\det \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0) \neq 0$ con $\varphi \equiv (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})$ (per opportuni indici $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$). Dal Teorema della funzione inversa segue che $u \rightarrow \varphi$ è invertibile su di una opportuna sfera chiusa centrata in u_0 . Su tale sfera φ è iniettiva e quindi lo è anche φ . ■

Diamo ora alcuni esempi di inclusioni (e quindi di elementi di varietà).

(E1) Un insieme $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, connesso e limitato è un elemento di n -varietà in $\mathbb{R}^n$: come inclusione si può prendere l'identità $x = \varphi(u) = u$. Analogamente, se U è un sottoinsieme aperto, connesso e limitato di $\mathbb{R}^k$ e $n > k$, l'insieme $S \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_k) \in U, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$ è un elemento di k -varietà in $\mathbb{R}^n$ e come inclusione si può prendere la mappa $u \in U \rightarrow x = \varphi(u) \equiv (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)$.

(E2) La funzione $t \in [0, 1] \rightarrow z(t) = x + t(y - x) \in \mathbb{R}^n$ è una inclusione dell'intervallo $[0, 1]$ in $\mathbb{R}^n$ che ha come immagine il segmento $P(x, y)$: $z([0, 1]) = P(x, y)$.

(E3) (Caso $k = 1$: elementi di curve regolari in $\mathbb{R}^n$) Generalizzando l'esempio precedente, definiamo *elemento di curva regolare in $\mathbb{R}^n$* un elemento di 1-varietà ovvero un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ dato da $\varphi(I)$ con $I = (a, b)$ intervallo aperto e φ una inclusione del dominio unidimensionale $[a, b]$ in $\mathbb{R}^n$. In questo caso, la matrice jacobiana di φ è semplicemente il vettore⁶ $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t))$. Dire che tale matrice jacobiana ha rango massimo (e cioè 1) equivale a dire che il vettore $\varphi'(t)$ non si annulla mai:

$$|\varphi'(t)| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n |\varphi'_i(t)|^2} \neq 0, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (10.3)$$

L'iniettività di φ su $\bar{I}$ implica che l'elemento di curva $\varphi(I)$ non si autointerseca mai e che $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Un esempio è dato da "un elemento di circonferenza" cioè dall'elemento di curva regolare $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [a, b]$ e $0 < b - a < 2\pi$: φ è iniettiva su $[a, b]$ e $|\varphi'| = |(-\sin t, \cos t)| = 1$. Quindi l'elemento di circonferenza $\varphi((a, b))$ è un elemento di curva regolare sulla circonferenza unitaria

$$S^1 \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1\}. \quad (10.4)$$

(E4) (Il caso $k = 2$, $n = 3$: elementi di superficie in $\mathbb{R}^3$) Un elemento di 2-varietà in $\mathbb{R}^3$ (o anche in $\mathbb{R}^n$) prende il nome di *elemento di superficie*. Se $D = \bar{U}$ è un dominio in $\mathbb{R}^2$ e $\varphi : (u_1, u_2) \in D \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{R}^3$ è una inclusione di D , dire che la matrice jacobiana $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ha rango massimo equivale a dire che i due vettori $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$ sono indipendenti e cioè⁷

⁶Di solito, nel caso unidimensionale, denotiamo con I l'aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}$ (e cioè l'intervallo) che sopra abbiamo chiamato U e indichiamo con t il punto generico di I (che sopra abbiamo denotato u).

⁷Per informazioni sul prodotto vettoriale "×" in $\mathbb{R}^3$ si veda 10.5.

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right| \neq 0, \quad \forall u \in \bar{U}. \quad (10.5)$$

Un esempio è dato da una “porzione ellissoidale” realizzata dall’inclusione

$$\varphi(u_1, u_2) = (r_1 \cos u_1 \sin u_2, r_2 \sin u_1 \sin u_2, r_3 \cos u_2)$$

con $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $0 < b_1 - a_1 < 2\pi$ e $0 < a_2 < b_2 < \pi$. Allora $S = \varphi(U)$, ($U \equiv \overset{\circ}{D}$), è un elemento di varietà bidimensionale in $\mathbb{R}^3$ che descrive una *calotta ellissoidale* ritagliata sull’ellissoide

$$\mathcal{E} \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{r_2} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{r_3} \right)^2 = 1 \right\}. \quad (10.6)$$

Per $r_1 = r_2 = r_3$ si ha naturalmente un elemento della sfera tridimensionale di raggio $r \equiv r_1$.

(E5) (Grafici in $\mathbb{R}^n$) Sia $D = \bar{U}$ un dominio in $\mathbb{R}^k$, sia $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ e sia $n \equiv k + 1$. Il grafico

$$G_f \equiv \{x \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{k+1} : x_n = f(x_1, \dots, x_k), \forall (x_1, \dots, x_k) \in U\} \quad (10.7)$$

è un elemento di $k = n - 1$ varietà in $\mathbb{R}^n$ realizzato dalla inclusione $\varphi(u) \equiv (u, f(u))$ con $u \in U$. Infatti, la φ è chiaramente iniettiva su D e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f_{u_1} & f_{u_2} & \dots & f_{u_k} \end{array} \right) \Bigg\} k + 1 \quad (10.8)$$

e quindi $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ha rango uguale a $k = n - 1$ (per ogni $u \in D$).

(E6) (i) Sia $\phi \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Per la Proposizione 5.8 l’insieme $A \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) < 0\}$ è un insieme aperto; quindi se A è connesso e limitato allora (esempio **(E1)**) è un elemento di n -varietà in $\mathbb{R}^n$.

(ii) Sia $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e sia $E \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}$ e supponiamo che per un $\bar{x} \in E$ si abbia $\nabla \phi(\bar{x}) \neq 0$ ovvero, per un qualche j , $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\bar{x}) \neq 0$. Allora, per il Teorema delle funzioni implicite (Teorema 7.1) esiste un rettangolo in $\mathbb{R}^n$,

$$K_{r,\rho} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - \bar{x}_i| \leq r \text{ per } i \neq j \text{ e } |x_j - \bar{x}_j| \leq \rho\}$$

ed una funzione⁸ $g(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$ di classe $C^1(\hat{K}_r, [\bar{x}_j - \rho, \bar{x}_j + \rho])$, dove $\hat{K}_r$ è il cubo in $\mathbb{R}^{n-1}$ di centro $(\bar{x}_1, \dots, \hat{\bar{x}}_j, \dots, \bar{x}_n)$ e lato $2r$, tale che $E \cap K_{r,\rho}$ coincide con

⁸ Il simbolo “ $\hat{}$ ” in questo contesto significa che la quantità che vi sta sotto va omissa: $(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$ coincide con $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ se $1 < j < n$, con $(x_2, \dots, x_n)$ se $j = 1$ e con $(x_1, \dots, x_{n-1})$ se $j = n$.

il grafico di g ovvero con $\{x \in \mathbb{R}^n : x_j = g(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n), \forall (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n) \in \hat{K}_r\}$. Ma questo, per (E5), significa che l'insieme $S \equiv \{\phi(x) = 0\} \cap \hat{K}_{r,\rho}$ è un elemento di $(n-1)$ -varietà. Il dominio dell'inclusione è $\hat{K}_r \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e l'inclusione sarà data da $u \in \hat{K}_r \rightarrow \varphi(u) \equiv (u_1, \dots, u_{j-1}, g(u), u_j, \dots, u_{n-1}) \in K_{r,\rho}$ (avendo posto $x_i = u_i$ per $i \leq j-1$ e $u_i = x_{i+1}$ per $i \geq j$).

(E7) L'esempio precedente (punto (ii)) si generalizza come segue. Supponiamo che siano date $(n-k)$ funzioni $\phi_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e consideriamo l'insieme $E \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_1(x) = \dots = \phi_{n-k}(x) = 0\}$. Assumiamo che per un qualche punto $\bar{x} \in E$, gli $(n-k)$ vettori $\nabla \phi_1(\bar{x}), \dots, \nabla \phi_{n-k}(\bar{x})$ siano linearmente indipendenti (in $\mathbb{R}^n$). Allora esiste un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che $A \cap E$ è un elemento di k -varietà in $\mathbb{R}^n$.

Concludiamo questo paragrafo introducendo le nozioni di varietà e varietà regolare a tratti:

Definizione 10.4 (i) Un insieme connesso $S \subset \mathbb{R}^n$ prende il nome di “varietà k -dimensionale” se per ogni $x_0 \in S$ esiste un aperto A di $\mathbb{R}^n$ che contiene x_0 e tale che $A \cap S$ è un elemento di k -varietà.

(ii) Un insieme connesso $S \subset \mathbb{R}^n$ prende il nome di “varietà k -dimensionale regolare a tratti” se $S = \bigcup_{i=1}^N \varphi^{(i)}(E^{(i)})$ dove $(\varphi^{(i)}, E^{(i)})$ godono, per ogni $1 \leq i \leq N$, delle seguenti proprietà: (a) gli $E^{(i)}$ sono insiemi di $\mathbb{R}^k$ con frontiera di misura nulla; (b) $\varphi^{(i)} \in C^1(E^{(i)}, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{E^{(i)}}, \mathbb{R}^n)$ e per ogni k -dominio $D^{(i)} \subset \overset{\circ}{E^{(i)}}$ la coppia $(\varphi^{(i)}, D^{(i)})$ è un'inclusione differenziabile in $\mathbb{R}^n$; (c) $\varphi^{(i)}(E^{(i)}) \cap \varphi^{(j)}(E^{(j)}) = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.

(iii) Una coppia (φ, E) con φ ed E che soddisfino le proprietà (a) e (b) del punto precedente¹⁰ prende il nome di **pseudo-inclusione** o più precisamente di “pseudo-inclusione differenziabile, k -dimensionale in $\mathbb{R}^n$ ”.

Osservazione 10.5 (i) Di particolare importanza sono le **varietà compatte**¹¹: ad esempio le “superfici sferiche”

$$S^{n-1} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}, \quad (10.9)$$

sono delle varietà compatte di dimensione $n-1$.

(ii) Un esempio tipico di varietà regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$ è dato dalla frontiera del cubo $[0, 1]^n$ che è una “ $(n-1)$ -varietà chiusa con singolarità” nei vertici del cubo $[0, 1]^n$.

⁹L'ipotesi che i vettori $\nabla \phi_1, \dots, \nabla \phi_{n-k}$ siano indipendenti è equivalente a dire che la matrice $(n-k) \times n$, $\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_{n-k})}{\partial x}$ ha rango massimo e cioè uguale a $n-k$. Si assuma, per fissare le idee, che il minore $\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)}$ abbia determinante diverso da 0 in $\bar{x}$. Si definisca $F : (u, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow F(u, y) = (\phi_1(u, y), \dots, \phi_{n-k}(u, y)) \in \mathbb{R}^{n-k}$ e si noti che $\det \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{u}, \bar{y}) \neq 0$, dove $(\bar{u}, \bar{y}) = \bar{x}$. Si applichi ora il Teorema delle funzioni implicite.

¹⁰Con $E^{(i)} = E$ e $\varphi^{(i)} = \varphi$.

¹¹A volte le varietà compatte vengono chiamate “varietà chiuse”.

(iii) Una curva regolare a tratti è l'immagine $\varphi(I)$ con I intervallo limitato di $\mathbb{R}$ e con φ continua ed iniettiva su $\bar{I}$ ad eccezione di un numero finito di punti e C^1 a tratti; se $\varphi(a) = \varphi(b)$ la curva (regolare a tratti) si dirà **chiusa**.

(iv) Secondo la Definizione 10.4 una *varietà compatta* può essere vista come una *varietà regolare a tratti*: ad esempio, la circonferenza $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = \dots = x_n = 0\}$ è una 1-varietà regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$ poiché $\Gamma = \varphi(E)$ con $E \equiv [0, 2\pi]$ e $\varphi \equiv (\cos t, \sin t, 0, \dots, 0)$.

10.2 Integrazione su varietà: definizioni

Sia (φ, E) una pseudo-inclusione differenziabile k -dimensionale in $\mathbb{R}^n$. Vogliamo definire la "misura k -dimensionale" dell'insieme $S \equiv \varphi(E)$; la nozione di misura che introdurremo può esser visto come "la proiezione ortogonale della misura euclidea n dimensionale sull'oggetto geometrico k -dimensionale rappresentato da S ".

Dalla definizione di inclusione segue che almeno uno dei minori $\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)}(u)$ (dove $(i_1, \dots, i_k)$ per $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ è una qualche scelta di indici) ha determinante diverso da zero; in particolare la somma su tutte le possibili scelte dei minori di rango k dei quadrati dei determinanti di tali minori, ovvero il numero

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)} \right|^2, \quad (10.10)$$

è diversa da zero su $U \equiv \overset{\circ}{E}$. Definiamo la **misura k -dimensionale** di S il numero

$$\sigma_k(S) \equiv \int_U \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} du, \quad (10.11)$$

e se $f \in C(\bar{S}, \mathbb{R})$ definiamo l'**integrale di f su S** come

$$\int_S f d\sigma_k \equiv \int_U f \circ \varphi(u) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} du. \quad (10.12)$$

Per verificare che tali definizioni sono ben poste osserviamo quanto segue. Innanzitutto, poichè ∂E è un insieme di misura nulla, si ha che gli integrali su U possono essere sostituiti da integrali su E senza che il loro valore cambi. Dimostriamo ora che gli integrali in (10.11) e (10.12) *non dipendono dalla particolare inclusione che "realizza" S* : sia (ψ, E') un'altra pseudo-inclusione tale che, se $V \equiv \overset{\circ}{E}'$, $\psi(V) = \varphi(U)$. Per il punto (vii) dell'Osservazione 10.3 la funzione $v(u) \equiv \psi^{-1} \circ \varphi(u)$ è una funzione di classe $C^1(U, V)$ ed è tale che $\psi(v(u)) = \varphi(u)$, per ogni $u \in U$. Dunque, per ogni scelta di indici $i_1 < \dots < i_k$ si ha $(\psi_{i_1}(v(u)), \dots, \psi_{i_k}(v(u))) = (\varphi_{i_1}(u), \dots, \varphi_{i_k}(u))$ e prendendo lo jacobiano di tale relazione si ottiene

$$\frac{\partial(\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_k})}{\partial(v_1, \dots, v_k)}(v(u)) \frac{\partial v}{\partial u}(u) = \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)},$$

e quindi

$$\det \frac{\partial(\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_k})}{\partial(v_1, \dots, v_k)} \cdot \det \frac{\partial v}{\partial u}(u) = \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)} . \quad (10.13)$$

Dunque, tramite il cambio di variabile $v = v(u)$, dal Teorema 9.58, dal fatto che $\psi(v(u)) = \varphi(u)$ e da (10.13) segue che

$$\begin{aligned} & \int_V f \circ \psi(v) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \det \frac{\partial(\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_k})}{\partial(v_1, \dots, v_k)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dv \\ &= \int_U f \circ \varphi(u) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \det \frac{\partial(\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_k})}{\partial(v_1, \dots, v_k)}(v(u)) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left| \det \frac{\partial v}{\partial u} \right| du \\ &= \int_U f \circ \varphi(u) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \det \frac{\partial(\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_k})}{\partial(v_1, \dots, v_k)}(v(u)) \cdot \det \frac{\partial v}{\partial u} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= \int_U f \circ \varphi(u) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} du . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Queste definizioni si estendono immediatamente a varietà regolari a tratti: se $S = \bigcup_{i=1}^N \varphi^{(i)}(E^{(i)}) \subset \mathbb{R}^n$ è una varietà k dimensionale regolare a tratti (con $\varphi^{(i)}$ e $E^{(i)}$ come nella Definizione 10.4) e se $f \in C(\bar{S}, \mathbb{R})$ poniamo¹²

$$\sigma_k(S) \equiv \sum_{i=1}^N \sigma_k(S^{(i)}) , \quad \int_S f d\sigma_k \equiv \sum_{i=1}^N \int_{S^{(i)}} f d\sigma_k , \quad (S^{(i)} \equiv \varphi^{(i)}(E^{(i)})) . \quad (10.14)$$

Esempio 10.6 Applichiamo le definizioni date al calcolo dell'area superficiale di una sfera di raggio r in $\mathbb{R}^3$. La sfera $S_r^2 \equiv \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}$ coincide con $\varphi(E)$ se

$$E = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \quad \text{e} \quad \varphi(u_1, u_2) \equiv r(\cos u_1 \sin u_2, \sin u_1 \sin u_2, \cos u_2) .$$

Dunque

$$\begin{aligned} \sigma_2(S_r^2) &\equiv \int_E \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 2} \left| \det \frac{\partial(\varphi_i, \varphi_j)}{\partial u} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &\equiv \int_E \left(\left| \det \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial u} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_3)}{\partial u} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial u} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= r^2 \int_E \left((\sin u_2 \cos u_2)^2 + (\sin u_1 \sin^2 u_2)^2 + (\cos u_1 \sin^2 u_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= r^2 \int_E \sin u_2 du = 4\pi r^2 . \end{aligned}$$

¹²Si noti che la rappresentazione di una varietà regolare a tratti come "unione di parti regolari" $\varphi^{(i)}(E^{(i)})$ non è ovviamente unica e d'altra parte è altrettanto ovvio che le definizioni in (10.14) non dipendono dalla particolare rappresentazione di S .

Discutiamo ora alcuni casi speciali cominciando dal caso $k = 1$: se I è un intervallo di estremi $a < b$ e $\Gamma \equiv \varphi(I)$ è un elemento di curva regolare (o una curva regolare a tratti ed eventualmente chiusa) la quantità in (10.10) coincide con la norma euclidea del vettore $\varphi'(t)$ (come al solito $t = u$) e dunque la lunghezza della curva Γ è data da

$$\sigma_1(\Gamma) \equiv L(\Gamma) \equiv \int_a^b |\varphi'(t)| dt, \quad (10.15)$$

mentre l'integrale di una funzione $f \in C(\overline{\Gamma}, \mathbb{R})$ su Γ , che prende il nome di **integrale curvilineo**, è dato da

$$\int_{\Gamma} f d\sigma_1 \equiv \int_a^b f \circ \varphi(t) |\varphi'(t)| dt; \quad (10.16)$$

a volte (nel caso $k = 1$) al simbolo $d\sigma_1$ si preferiscono i simboli ds o $d\ell$.

Il caso $k = 2$ e $n = 3$ concerne l'integrazione su superfici in $\mathbb{R}^3$. La quantità in (10.10) coincide con il quadrato della norma euclidea del vettore $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$ e dunque l'area della superficie S è data da

$$\sigma_2(S) \equiv \text{Area}(S) \equiv \int_U \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right| du; \quad (10.17)$$

mentre l'integrale di una funzione $f \in C(\overline{S}, \mathbb{R})$ su S , che prende il nome di **integrale superficiale**, è dato da

$$\int_S f d\sigma_2 \equiv \int_U f \circ \varphi \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right| du. \quad (10.18)$$

Osservazione 10.7 (i) Considerando un'“approssimazione di Riemann” dell'integrale in (10.15), relativa alla partizione $t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b$, si ha che¹³ la lunghezza della poligonale di estremi (in ordine) $\varphi(a), \varphi(t_1), \dots, \varphi(b)$ tende a $L(\Gamma)$, quando l'ampiezza della partizione $\delta \equiv \sup(t_{i+1} - t_i)$ tende a zero, giustificando, in tal modo, il nome “lunghezza” dato a $L(\Gamma)$.

(ii) La quantità $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right|$ rappresenta geometricamente l'area del parallelogramma generato dai vettori $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$ e quest'interpretazione farebbe pensare alla possibilità di giustificare (tramite opportune approssimazioni di Riemann) la definizione di area in modo analogo a quanto fatto nel punto (i) per la lunghezza. Invece ciò non è possibile: in generale, un elemento di superficie regolare può essere “approssimato” con (ad esempio) triangolini con i vertici sulla superficie in modo tale che la somma delle aree dei triangolini tende ad infinito quando la lunghezza del massimo lato di tali triangolini viene mandata a zero¹⁴.

¹³Si noti che $L(P(\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1}))) = |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| = |\varphi'(t_i)|(t_{i+1} - t_i)$. Quindi, essendo $|\varphi'|$ continua su $[a, b]$, dalla teoria dell'integrazione di Riemann segue che, se $\delta = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$, allora $\lim_{\delta \rightarrow 0} L(P(\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1}))) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$.

¹⁴Si veda 10.14.

(iii) La quantità $\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ che appare nella definizione di misura k -dimensionale non è altro che la misura euclidea k -dimensionale del parallelepipedo generato dai vettori tangenti (che formano una base dello spazio tangente) $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}$. Per maggiori informazioni si veda **10.13**.

10.3 Il Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^n$

In questo paragrafo studieremo un'importante generalizzazione del Teorema fondamentale del calcolo che va sotto il nome di "Teorema della divergenza"¹⁵.

La sfera unitaria chiusa $\overline{B^n} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ non è una varietà n dimensionale ma è l'unione d'un aperto (cioè la sfera $B^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$) e d'una varietà compatta di dimensione $n - 1$ (cioè S^{n-1}) che coincide con la sua frontiera insiemistica. L'ovvia importanza di tali insiemi aperti giustifica la seguente definizione

Definizione 10.8 Per $n \geq 2$, un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato e connesso si dice **regolare** se esiste una funzione $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tale che $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) < 0\}$, $\partial A = \{x : \phi(x) = 0\}$ e $\nabla \phi(x) \neq 0$ per ogni $x \in \partial A$.

Dunque la sfera aperta B^n è un insieme regolare: $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) < 0\}$ con $\phi(x) = |x|^2 - 1$.

Dall'esempio (E6) di § 10.1 e dalla Definizione 10.4 segue che la frontiera di un insieme regolare è una $(n - 1)$ -varietà compatta in $\mathbb{R}^n$. Infatti la frontiera di A divide $\mathbb{R}^n$ in due insiemi connessi di cui uno, $\{x : \phi(x) < 0\} = A$, è limitato e l'altro, $\{x : \phi(x) > 0\} = (\overline{A})^c$ è illimitato: in questa situazione l'insieme aperto $\overline{A}^c$ prende il nome di **esterno di A** .

In ogni punto x della frontiera di un insieme regolare $A = \{x' : \phi(x') < 0\}$ definiamo la **normale esterna**¹⁶

$$\nu \equiv \nu(x) \equiv \frac{\nabla \phi(x)}{|\nabla \phi(x)|}. \quad (10.19)$$

¹⁵Nella discussione che segue seguiremo l'approccio in E. Giusti *Analisi Matematica* 2, Ed. Boringhieri; il Teorema della divergenza nei casi $n = 2$ e 3 è anche noto come *Teorema di Gauss*.

¹⁶Si noti che tale vettore (che è ben definito poiché $\nabla \phi \neq 0$ su ∂A) ha norma unitaria. La parola "esterna" è dovuta al fatto che " ν punta verso l'esterno" ovvero "esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\{x + \nu t : \forall 0 < t < \varepsilon\} \subset \overline{A}^c$ ". Infatti: dalla formula di Taylor, se $x \in \partial A$ (ovvero se x tale che $\phi(x) = 0$) e se $t > 0$ è piccolo, $\phi(x + \nu t) = \nabla \phi(x) \cdot \nu t + o(t) = |\nabla \phi(x)|t + o(t) = t \left(|\nabla \phi(x)| + \frac{o(t)}{t} \right)$ che è strettamente positivo se t è sufficientemente piccolo. La parola "normale" si riferisce al fatto che ν è normale (o "ortogonale") ad un qualunque vettore "tangente a ∂A in x " [un vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$ si dice **tangente** all'elemento di varietà $\mathcal{S}$ in $x \in \mathcal{S}$ se $\xi = z'(0)$ per una qualche applicazione $z \in C^1((-\delta, \delta), \mathbb{R}^n)$ tale che $z(t) \in \mathcal{S}$ per ogni $|t| < \delta$ e $z(0) = x$; per maggiori informazioni si veda **10.25**]. Infatti se $\xi = z'(0)$ è un vettore tangente a ∂A in x si ha, per definizione, che $z(t) \in \partial A$ per $|t| \leq \delta$ (per un qualche $\delta > 0$), ovvero $\phi(z(t)) = 0$ per $|t| \leq \delta$; derivando tale relazione in $t = 0$ si ottiene $0 = \nabla \phi(z(0)) \cdot z'(0) = \nabla \phi(x) \cdot \xi$ e quindi $\xi \cdot \nu = 0$.

Infine se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e se $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ definiamo la **divergenza** di F la funzione continua da A in $\mathbb{R}$ data da

$$\operatorname{div} F \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} ; \quad (10.20)$$

la divergenza di F viene anche denotata con $\nabla \cdot F$.

Teorema 10.9 (Teorema della divergenza) *Sia $A \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) < 0\}$ un insieme regolare in $\mathbb{R}^n$ (Definizione 10.8) e sia $F \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\int_A \nabla \cdot F \, dx = \int_{\partial A} F \cdot \nu \, d\sigma_{n-1} . \quad (10.21)$$

Osservazione 10.10 (i) La quantità $F \cdot \nu$ in (10.21) prende il nome di **flusso esterno** del campo vettoriale¹⁷ F e dunque il Teorema della divergenza può essere formulato dicendo che “l'integrale della divergenza di un campo regolare su di un insieme regolare A coincide con l'integrale del flusso esterno sulla frontiera di A ”.

(ii) Se $F \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ e se interpretassimo la quantità $F(b) - F(a)$ come il “flusso totale esterno di F dall'insieme $[a, b]$ ” vedremmo che (nel caso $n = 1$) l'enunciato del Teorema della divergenza dato al punto (i) coincide sostanzialmente con il Teorema fondamentale del calcolo (definendo, se si vuole, gli insiemi regolari in $\mathbb{R}$ come gli intervalli aperti e limitati). In effetti vedremo che la dimostrazione del Teorema della divergenza è conseguenza del Teorema fondamentale del calcolo in una variabile.

(iii) Il Teorema della divergenza è equivalente alla seguente affermazione: Sia $A \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) < 0\}$ un insieme regolare in $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial A} f \nu_i \, d\sigma_{n-1} , \quad \left(\forall f \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}) , \forall 1 \leq i \leq n \right) . \quad (10.22)$$

Infatti se vale tale affermazione il Teorema della divergenza verrà ottenuto applicando la (10.22) alle componenti F_i e sommando su i , mentre dal Teorema della divergenza segue immediatamente la (10.22) ponendo $F_j = 0$ se $j \neq i$ e $F_i \equiv f$.

Nel corso della dimostrazione faremo uso del seguente notevole risultato

Lemma 10.11 (Partizione dell'unità) *Sia D un compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\{V_i\}_{i \in J}$ un ricoprimento aperto¹⁸ di D . Allora esistono N funzioni $f_1, \dots, f_N$ di classe¹⁹ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, che godono delle seguenti proprietà:*

$$1) \quad \forall 1 \leq j \leq N , \exists i \in J : \operatorname{supp}(f_j) \subset V_i ;$$

¹⁷Un “campo vettoriale su $A \subset \mathbb{R}^n$ ” non è altro che una funzione F da A in $\mathbb{R}^n$ (ovvero una funzione che ad un vettore $x \in A \subset \mathbb{R}^n$ associa un altro vettore, $F(x)$ di $\mathbb{R}^n$).

¹⁸Cioè V_i sono insiemi aperti e $\cup_{i \in J} V_i \supset D$.

¹⁹Si ricorda che $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ denota l'insieme delle funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto e che il supporto di f , $\operatorname{supp}(f)$, è la chiusura dell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$.

$$\begin{aligned}
2) \quad & 0 \leq f_j(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq j \leq N; \\
3) \quad & \sum_{j=1}^N f_j(x) = 1, \quad \forall x \in D; \quad \sum_{j=1}^N f_j(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (10.23)
\end{aligned}$$

Una famiglia $\{f_j\}_{j=1, \dots, N}$ che goda delle 3 proprietà sopra elencate si chiama una **partizione dell'unità su D subordinata al ricoprimento $\{V_i\}$** .

Dimostrazione Per ogni $x \in D$ scegliamo un indice $i \equiv i(x)$ in J tale che $x \in V_{i(x)}$. Essendo gli insiemi V_i aperti, è possibile scegliere, per ogni $x \in D$, un numero positivo $r \equiv r(x)$ tale che, se $K_r(x)$ denota il cubo aperto di centro x e lato $2r$ (cioè l'insieme $\{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < r, \quad \forall 1 \leq i \leq n\}$),

$$\overline{K_{r(x)}}(x) \subset K_{R(x)}(x) \subset \overline{K_{R(x)}}(x) \subset V_{i(x)}, \quad \text{dove } R(x) \equiv 2r(x). \quad (10.24)$$

Gli insiemi $K_{r(x)}(x)$, al variare di $x \in D$ formano un ricoprimento aperto di D . Essendo tale insieme compatto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito, esistono cioè N punti in D , $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$, tali che

$$D \subset K_1 \cup \dots \cup K_N, \quad K_j \equiv K_{r(x^{(j)})}(x^{(j)}). \quad (10.25)$$

Inoltre, se denotiamo $K'_j \equiv K_{R(x^{(j)})}(x^{(j)})$, e $i_j \equiv i(x^{(j)})$, da (10.24) segue che

$$\overline{K_j} \subset K'_j \subset \overline{K'_j} \subset V_{i_j}. \quad (10.26)$$

Usando le funzioni ψ dell'Esempio 5.41, possiamo costruire N funzioni $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$0 \leq \psi_j \leq 1, \quad \psi_j \equiv 1 \text{ su } K_j, \quad \text{supp}(\psi_j) = \overline{K'_j}. \quad (10.27)$$

Poniamo ora

$$\begin{aligned}
f_1 &\equiv \psi_1, \\
f_2 &\equiv (1 - \psi_1)\psi_2, \\
&\dots\dots\dots \\
f_N &\equiv (1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \cdots (1 - \psi_{N-1})\psi_N.
\end{aligned} \quad (10.28)$$

Da tale definizione segue immediatamente che $f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e che $\text{supp}(f_j) \subset \overline{K'_j} \subset V_{i_j}$ e quindi valgono le prime due proprietà, 1) e 2), enunciate nella proposizione. Inoltre da un elementare fatto algebrico segue che²⁰

$$\sum_{j=1}^N f_j = 1 - \prod_{j=1}^N (1 - \psi_j) \quad (10.29)$$

²⁰Per induzione su N : per $N = 1$ la (10.29) è vera. Assumiamo la (10.29) vera per $N - 1$ e dimostriamola per N : $\sum_{j=1}^N f_j = \sum_{j=1}^{N-1} f_j + f_N = 1 - \prod_{j=1}^{N-1} (1 - \psi_j) + \left(\prod_{j=1}^{N-1} (1 - \psi_j) \right) \psi_N = 1 - \left(\prod_{j=1}^{N-1} (1 - \psi_j) \right) (1 - \psi_N) = 1 - \prod_{j=1}^N (1 - \psi_j)$.

quindi se $x \in D$, x appartiene a qualche K_j e da (10.29) segue anche la proprietà 3). ■

Dimostrazione (del Teorema 10.9) In vista dell'Osservazione 10.10 punto (iii), dimostreremo la (10.22) per una $f \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R})$. Fissato $\bar{x} \in E \equiv \partial A$, siano $j, g, K_{r,\rho}$ e $\hat{K}_r$ come al punto (ii) di (E6), § 10.1. Introduciamo anche le seguenti notazioni: $\bar{x} \equiv (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$ cosicché $g: \bar{x} \in \hat{K}_r \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$; $G(\bar{x}) \equiv (x_1, \dots, g(\bar{x}), \dots, x_n)$ (qui ed in seguito useremo questa notazione sottintendendo che la funzione g sta al posto di x_j), dunque l'insieme $\partial A \cap K_{r,\rho} = \{G(\bar{x}) : \bar{x} \in \hat{K}_r\}$. Infine, eventualmente diminuendo il valore di r possiamo assumere che $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) \neq 0$ per ogni $x \in K_{r,\rho}$.

Divideremo la dimostrazione in vari passi.

1) Calcoliamo la normale esterna $\nu(x)$ per $x \in K_{r,\rho} \cap \partial A$ in termini della funzione $g(\bar{x})$. Prendendo la derivata parziale rispetto a x_i per $i \neq j$ nella relazione $\phi(x_1, \dots, g, \dots, x_n) = 0$ (valida in $\hat{K}_r$) si ottiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(G(\bar{x})) + \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(G(\bar{x})) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (\bar{x} \in \hat{K}_r, i \neq j)$$

Dunque, su $\partial A \cap K_{r,\rho}$, si ha²¹

$$\nu \equiv \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}(G(\bar{x})) = \text{segno} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, 1, \dots, -\frac{\partial g}{\partial x_n} \right)}{\sqrt{1 + |g'|^2}}, \quad (10.30)$$

dove, naturalmente, l'1 sta al j° posto e $g' \equiv \partial_{\bar{x}} g$.

2) Calcoliamo la quantità in (10.10) su $\partial A \cap K_{r,\rho}$ (cosa necessaria per trovare un'espressione "esplicita" di σ_{n-1} su $\partial A \cap K_{r,\rho}$). Qui, come già detto, l'inclusione φ coincide con G e la variabile $(n-1)$ -dimensionale u con $\bar{x} \in \hat{K}_r$. In generale, nel caso $k = n-1$, si ha

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial u} \right|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \det \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \hat{\varphi}_i, \dots, \varphi_n)}{\partial u} \right|^2. \quad (10.31)$$

Inoltre, nel caso presente (e con le solite convenzioni), la matrice $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ è una matrice $n \times (n-1)$ avente la seguente forma

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial u} \equiv \frac{\partial G}{\partial \bar{x}} \equiv \frac{\partial(x_1, \dots, g, \dots, x_n)}{\partial(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)} =$$

²¹Se α è un numero reale diverso da zero, $\text{segno}(\alpha) = \alpha/|\alpha|$; naturalmente nella formula (10.30) ν e ϕ sono calcolate in $G(\bar{x}) = (x_1, \dots, g(\bar{x}), \dots, x_n)$ e g è calcolata in $\bar{x} \in \hat{K}_r$; quando non vi sia ambiguità ometteremo di indicare gli argomenti delle varie funzioni.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_{j-1}} & \frac{\partial g}{\partial x_{j+1}} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.32)$$

(la riga che contiene le derivate di g è la j -esima). Quindi la matrice $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \hat{\varphi}_j, \dots, \varphi_n)}{\partial \tilde{x}}$ è la matrice identità ed ha determinante uguale ad uno, mentre se $i \neq j$, scambiando la i -ma riga con la j -esima riga si trova

$$\left| \det \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \hat{\varphi}_i, \dots, \varphi_n)}{\partial \tilde{x}} \right| = \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|, \quad (i \neq j).$$

Dunque

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial u} \right|^2 &= \sum_{i=1}^n \left| \det \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \hat{\varphi}_i, \dots, \varphi_n)}{\partial u} \right|^2 \\ &= 1 + \sum_{i \neq j} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|^2 \equiv 1 + |g'|^2. \end{aligned} \quad (10.33)$$

3) Supponiamo che $f \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R})$ abbia supporto contenuto in $K_{r,\rho}$, rettangolo “centrato” in $\tilde{x} \in \partial A$ [come in 1)] e dimostriamo che vale (10.22). Vi sono due casi: o $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} > 0$ (su $K_{r,\rho}$) oppure $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} < 0$; i due casi si trattano in maniera simile e per fissare le idee assumeremo $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} > 0$. In tal caso $\nu_j > 0$ [vedi (10.30)] il che significa²² che i punti interni di A si trovano “sotto” il grafico di g o, più precisamente, $A \cap K_{r,\rho} = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{x}_j - \rho < x_j < g(\tilde{x}), \tilde{x} \in \hat{K}_r\}$. Dunque poiché stiamo assumendo che $\text{supp } f \subset K_{r,\rho}$, integrando prima rispetto a x_j , troviamo

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\hat{K}_r} \left(\int_{\tilde{x}_j - \rho}^{g(\tilde{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_j \right) d\tilde{x}. \quad (10.34)$$

Se $i = j$, dal Teorema fondamentale del calcolo (in una variabile) e dal fatto che $f(x_1, \dots, \tilde{x}_j - r, \dots, x_n) = 0$ per²³ $\tilde{x} \in \hat{K}_r$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{x}_j - \rho}^{g(\tilde{x})} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j &= f(x_1, \dots, g(\tilde{x}), \dots, x_n) - f(x_1, \dots, \tilde{x}_j - \rho, \dots, x_n) \\ &= f(x_1, \dots, g(\tilde{x}), \dots, x_n). \end{aligned} \quad (10.35)$$

²²Si ricordi la discussione nella nota 16.

²³Si noti che punti della forma $(x_1, \dots, \tilde{x}_j - \rho, \dots, x_n)$ con $\tilde{x} \in \hat{K}_r$ appartengono alla frontiera di $K_{r,\rho}$ e dunque, poiché $\text{supp } f \subset K_{r,\rho}$, $f(x_1, \dots, \tilde{x}_j - \rho, \dots, x_n) = 0$.

Poiché (per (10.30) e per le nostre ipotesi) $\nu_j = (1 + |g'|)^{-\frac{1}{2}}$, da (10.33), dalla definizione (10.12), da (10.34) e (10.35) segue che

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_j} dx &= \int_{\tilde{K}_r} f(x_1, \dots, g(\tilde{x}), \dots, x_n) d\tilde{x} \\ &= \int_{\tilde{K}_r} f(x_1, \dots, g(\tilde{x}), \dots, x_n) \frac{1}{\sqrt{1 + |g'|^2}} \sqrt{1 + |g'|^2} d\tilde{x} \\ &= \int_{\partial A \cap K_{r,\rho}} f \nu_j d\sigma_{n-1} = \int_{\partial A} f \nu_j d\sigma_{n-1} . \end{aligned} \quad (10.36)$$

Sia ora $i \neq j$. In tal caso

$$\partial_{x_i} \int_{\tilde{x}_j-r}^{g(\tilde{x})} f(x) dx_j = f(x_1, \dots, g(\tilde{x}), \dots, x_n) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x}) + \int_{\tilde{x}_j-r}^{g(\tilde{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_j . \quad (10.37)$$

D'altra parte, ancora per il Teorema fondamentale del calcolo e per il fatto che $\text{supp } f \subset K_{r,\rho}$, se denotiamo con $x_{\pm r}$ un punto $x \in K_{r,\rho}$ con la i -ma componente x_i fissata ed uguale a $\tilde{x}_i \pm r$ e con $\tilde{x}_{\pm r}$ un punto $\tilde{x} \equiv (x_1, \dots, \tilde{x}_j, \dots, x_n) \in \tilde{K}_r$ con x_i fissato ed uguale a $\tilde{x}_i \pm r$, si trova²⁴

$$\int_{\tilde{x}_i-r}^{\tilde{x}_i+r} \partial_{x_i} \left(\int_{\tilde{x}_j-r}^{g(\tilde{x})} f(x) dx_j \right) dx_i = \int_{\tilde{x}_j-r}^{g(\tilde{x}_r)} f(x_r) dx_j - \int_{\tilde{x}_j-r}^{g(\tilde{x}_{-r})} f(x_{-r}) dx_j = 0 , \quad (10.38)$$

che, insieme a (10.37), implica

$$\int_{\tilde{x}_i-r}^{\tilde{x}_i+r} \left(\int_{\tilde{x}_j-r}^{g(\tilde{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_j \right) dx_i = - \int_{\tilde{x}_i-r}^{\tilde{x}_i+r} f(x_1, \dots, g(\tilde{x}), \dots, x_n) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x}) dx_i . \quad (10.39)$$

Integrando su A prima rispetto a x_j , poi rispetto a x_i e poi rispetto alle altre componenti, da (10.39) segue, per $i \neq j$, che²⁵

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} dx &= \int_{A \cap K_{r,\rho}} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = - \int_{\tilde{K}_r} f(x_1, \dots, g(\tilde{x}), \dots, x_n) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= \int_{\tilde{K}_r} f(x_1, \dots, g, \dots, x_n) \frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)}{\sqrt{1 + |g'|^2}} \sqrt{1 + |g'|^2} d\tilde{x} \\ &= \int_{\tilde{K}_r} f(x_1, \dots, g, \dots, x_n) \nu_i \sqrt{1 + |g'|^2} d\tilde{x} \\ &= \int_{\partial A \cap K_{r,\rho}} f \nu_i d\sigma_{n-1} = \int_{\partial A} f \nu_i d\sigma_{n-1} . \end{aligned}$$

²⁴Si noti che la variabile x_i appare nell'argomento di g e di f ; inoltre i punti $x_{\pm r}$ appartengono alla frontiera di $K_{r,\rho}$ e dunque la funzione f vi si annulla.

²⁵Come già osservato, su $A \cap K_{r,\rho}$ la variabile x_j varia tra $\tilde{x}_j - \rho$ e $g(\tilde{x})$, mentre le variabili x_i , per $i \neq j$, variano tra $\tilde{x}_i - r$ e $\tilde{x}_i + r$; si ricordino anche le osservazioni che precedono (10.36).

Dunque (10.22) vale quando il supporto di f è contenuto in un rettangolo (con le proprietà sopra elencate) centrato su un punto della frontiera di A .

4) Sia ora K un cubo aperto la cui chiusura è contenuta in A e dimostriamo (10.22) per funzioni $f \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R})$ che abbiano supporto contenuto in K . In questo caso f è nulla sul bordo di A e quindi il secondo membro di (10.22) è nullo. Quanto al membro di sinistra, se $\bar{x}$ è il centro del cubo K e $2r$ il suo lato, e se, per i fissato, denotiamo con $\hat{K}$ il cubo $\{(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : |x_h - \bar{x}_h| < r, \text{ per } h \neq i\}$ si ha

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} dx &= \int_K \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\hat{K}} \left(\int_{\bar{x}_i-r}^{\bar{x}_i+r} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n \\ &= \int_{\hat{K}} \left(f(x_1, \dots, \bar{x}_i + r, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, \bar{x}_i - r, \dots, x_n) \right) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

5) Completiamo ora la dimostrazione di (10.22) per funzioni arbitrarie $f \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R})$. Se $x \in A$ sia $K(x)$ un cubo chiuso (non degenere) centrato in x e contenuto in A (tali cubi esistono perché A è aperto); se $x \in \partial A$ sia $K(x)$ un rettangolo che goda delle proprietà elencate all'inizio della dimostrazione [prima del punto 1)]. L'unione di $\overset{\circ}{K}(x)$ forma un ricoprimento del compatto $\bar{A}$ e per il Lemma 10.11 esiste una partizione dell'unità $\{f_j : 1 \leq j \leq N\}$ subordinata al ricoprimento $\{\overset{\circ}{K}(x) : x \in \bar{A}\}$. Per ogni j , il prodotto $f_j f$ è una funzione di classe $C^1(\bar{A})$ e con supporto contenuto o in un rettangolo $K(x)$ con $x \in \partial A$ o in un cubo $K(x)$ contenuto in A . Dunque per i punti 3) e 4) si ha, per ogni $1 \leq j \leq N$, che

$$\int_A \frac{\partial(f_j f)}{\partial x_i} dx = \int_{\partial A} (f_j f) \nu_i d\sigma_{n-1},$$

e dunque (ricordando che $\sum_{j=1}^N f_j(x) = 1$ per ogni $x \in \bar{A}$) troviamo

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} dx &= \int_A \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f \sum_{j=1}^N f_j \right) dx = \sum_{j=1}^N \int_A \frac{\partial}{\partial x_i} (f f_j) dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\partial A} f_j f \nu_i d\sigma_{n-1} = \int_{\partial A} \left(\sum_{j=1}^N f_j \right) f \nu_i d\sigma_{n-1} \\ &= \int_{\partial A} f \nu_i d\sigma_{n-1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Come applicazione del Teorema della divergenza discutiamo brevemente l'integrazione in coordinate polari in $\mathbb{R}^n$. Useremo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} D_{r,R}^n &\equiv \{x \in \mathbb{R}^n : r \leq |x| \leq R\}, & B_r^n &\equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}, \\ S^{n-1} &\equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}, \end{aligned} \quad (10.40)$$

dove $0 \leq r < R$ e, come al solito, $|\cdot|$ denota la norma euclidea. Supponiamo ora che f sia una funzione integrabile su $D_{r,R}^n$, allora la funzione $(\rho, y) \in [r, R] \times S^{n-1} \rightarrow f(\rho y)$ è integrabile su $[r, R] \times S^{n-1}$ e si ha

$$\int_{D_{r,R}^n} f(x) dx = \int_r^R \rho^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} f(\rho y) d\sigma_{n-1} \right) d\rho. \quad (10.41)$$

Dimostrazione (di (10.41) nel caso in cui $f \in C^1(D_{r,R}^n)$) Per ogni $\rho > 0$, facendo il cambio di variabile $x = \rho y$, si ha che

$$\int_{B_\rho^n} f(x) dx = \rho^n \int_{B_1^n} f(\rho y) dy, \quad (10.42)$$

e derivando rispetto a ρ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_{B_\rho^n} f(x) dx \right) &= n\rho^{n-1} \int_{B_1^n} f(\rho y) dy + \rho^n \int_{B_1^n} (\nabla f)(\rho y) \cdot y dy \\ &= \rho^{n-1} \int_{B_1^n} \left(n f(\rho y) dy + \rho y \cdot (\nabla f)(\rho y) \right) dy, \end{aligned} \quad (10.43)$$

e la quantità nell'ultimo integrale non è altro che la divergenza della funzione vettoriale $y \rightarrow y f(\rho y)$. Dunque da (10.43) e dal Teorema della divergenza segue che²⁶

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_{B_\rho^n} f(x) dx \right) = \rho^{n-1} \int_{B_1^n} \nabla \cdot (y f(\rho y)) dy = \rho^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(\rho y) d\sigma_{n-1}, \quad (10.44)$$

ed integrando tale relazione tra r e R si ottiene²⁷ (10.41). ■

Prendendo $f \equiv 1$, (10.41) fornisce la relazione tra la misura n -dimensionale della sfera unitaria con la misura $(n-1)$ -dimensionale della superficie sferica S^{n-1} :

$$n m(B_1^n) = \sigma_{n-1}(S^{n-1}). \quad (10.45)$$

In 10.30 viene calcolato, per ogni n , il valore di $m(B_1^n)$.

10.4 1-Forme differenziali in $\mathbb{R}^n$ e teoremi di Green e Stokes

In questo paragrafo discuteremo alcune conseguenze del Teorema della divergenza e cioè "i teoremi classici di Green e Stokes"; per far ciò, generalizzando il concetto di differenziale di una funzione (scalare) di n variabili, introdurremo le 1-forme differenziali su $\mathbb{R}^n$. Sia $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ con A aperto in $\mathbb{R}^n$. Sappiamo che, per

²⁶Si noti che la normale esterna a S^{n-1} nel punto y coincide con y .

²⁷Naturalmente: $\int_{B_R^n} f(x) dx - \int_{B_r^n} f(x) dx = \int_{D_{r,R}^n} f(x) dx$.

ogni $x \in A$, il differenziale df è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ che agisce nel seguente modo

$$df(\xi) \equiv df_x(\xi) = \nabla f(x) \cdot \xi, \quad (10.46)$$

per ogni vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$; più concisamente²⁸ $df(\xi) = \nabla f \cdot \xi$. In particolare se $f(x) = x_i$ è la funzione lineare che ad x associa la sua i -esima coordinata, si ha

$$dx_i(\xi) = (\nabla x_i) \cdot \xi = e^{(i)} \cdot \xi = \xi_i \quad (10.47)$$

ovvero il differenziale della funzione x_i non è altro che la proiezione sulla i -esima coordinata di ξ .

Definizione 10.12 *I differenziali dx_i sono esempi di 1-forme differenziali (o in breve "1-forme") e verranno chiamati 1-forme elementari. Le 1-forme differenziali in A sono combinazioni lineari (aventi funzioni per coefficienti) delle n 1-forme elementari. Più precisamente ω^1 è una 1-forma differenziale su A se*

$$\omega^1 = \sum_{i=1}^n g_i dx_i \quad (10.48)$$

con $g_i \in C(A, \mathbb{R})$; se $g_i \in C^k(A, \mathbb{R})$ diremo che ω^1 è di classe C^k .

Fissato $x \in A$, l'azione di una 1-forma su vettori in $\xi \in \mathbb{R}^n$ è definita (per linearità) nella maniera ovvia:

$$\omega_x^1(\xi) = \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i(\xi) = \sum_{i=1}^n g_i(x) \xi_i. \quad (10.49)$$

Come sopra, normalmente sottointenderemo la dipendenza (*non lineare*) della 1-forma dal punto $x \in A$ e scriveremo semplicemente $\omega^1(\xi)$ al posto di $\omega_x^1(\xi)$. Chiaramente, poichè i differenziali sono funzioni lineari su $\mathbb{R}^n$, anche le 1-forme lo sono:

$$\omega^1(a_1 \xi^{(1)} + a_2 \xi^{(2)}) = a_1 \omega^1(\xi^{(1)}) + a_2 \omega^1(\xi^{(2)}). \quad (10.50)$$

Quindi una 1-forma è, per ogni $x \in A$ fissato, la più generale applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ ed inoltre la dipendenza da x è regolare. In particolare, se f è una funzione regolare su A il suo differenziale df è una 1-forma su A :

$$df = \sum_{i=1}^n f_{x_i} dx_i. \quad (10.51)$$

Dare una 1-forma in $A \subset \mathbb{R}^n$ (in cui penseremo sempre fissata la base standard $e^{(i)}$) equivale dunque ad assegnare n funzioni regolari, o, equivalentemente un "campo

²⁸Non riportando esplicitamente nella notazione la dipendenza *non lineare* da $x \in A$ (cosa che faremo spesso in seguito).

vettoriale" $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Data $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ chiameremo ω_F^1 la 1-forma i cui coefficienti g_i sono le componenti di F :

$$\omega_F^1 \equiv \sum_{i=1}^n F_i dx_i . \quad (10.52)$$

Si noti che da (10.51) e (10.52) segue che

$$\omega_{\nabla f}^1 = df . \quad (10.53)$$

Osservazione 10.13 (i) Non si confonda il significato degli "indici" x e F in (10.49) e (10.52): usando il simbolismo in (10.49) dovremmo scrivere $\omega_{F,x}^1(\xi) = \sum_{i=1}^n F_i(x) dx_i(\xi)$, ma normalmente ometteremo la x in tali scritture.

(ii) Una 1-forma ω^1 "di classe $C^p(A)$ ", è per definizione una 1-forma in cui i coefficienti g_i sono funzioni $C^p(A)$ (anche nel caso A non sia aperto).

Nel caso $n = 1$ siamo abituati a vedere il simbolo " dx " all'interno di un integrale ed ora, infatti, definiremo l'integrale di una 1-forma. Per far questo dobbiamo prima formalizzare il concetto di *orientamento su curve*. Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un elemento di curva e sia φ un'inclusione tale che $\varphi((a, b)) = \Gamma$, definiamo l'**orientamento su Γ** indotto da φ come

$$\text{Or}(\varphi) \equiv \{ \psi : \psi \text{ è un'inclusione su } \Gamma : \frac{d}{dt}(\psi^{-1} \circ \varphi) > 0 \} . \quad (10.54)$$

Da questa definizione segue che: (i) la relazione $\psi \in \text{Or}(\varphi)$ definisce una *relazione di equivalenza*; (ii) se definiamo l'**inclusione inversa di φ** come

$$\bar{\varphi}(t) \equiv \varphi(-t) , \quad t \in [-b, -a] \quad (10.55)$$

allora $\bar{\varphi} \notin \text{Or}(\varphi)$; (iii) se ψ è una inclusione su Γ allora o $\psi \in \text{Or}(\varphi)$ oppure $\psi \in \text{Or}(\bar{\varphi})$. L'orientamento $\text{Or}(\bar{\varphi})$ si chiama **orientamento opposto** (o inverso) di $\text{Or}(\varphi)$ e scriveremo $\text{Or}(\bar{\varphi}) = -\text{Or}(\varphi)$. Diremo anche che $(\Gamma, \text{Or}(\varphi))$ è la curva Γ orientata nel verso che va da $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$. Allo stesso modo, prendendo un'inclusione continua e regolare a tratti²⁹, si definisce l'*orientamento su curve regolari a tratti*: naturalmente in questo caso la relazione differenziale in (10.54) verrà richiesta nei punti in cui φ è derivabile.

Sia Γ un elemento di curva regolare orientato in A : $\Gamma = \varphi((a, b))$ e $\text{Or} = \text{Or}(\varphi)$ e sia $\omega^1 \equiv \omega_F^1$ una 1-forma in A . Definiamo, allora, l'**integrale di ω^1 sulla curva orientata Γ** come

$$\int_{\Gamma, \text{Or}} \omega^1 \equiv \int_a^b F \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i \circ \varphi \varphi'_i dt , \quad (10.56)$$

²⁹Si ricordi il punto (iii) dell'Osservazione 10.5.

Dal punto (vii) dell'Osservazione 10.3 segue che tale integrale *non dipende dalla particolare inclusione ma solo da Γ e dall'orientamento scelto*. Si noti che (10.56) può essere riscritta come

$$\int_{\Gamma, \text{Or}} \omega^1 = \int_a^b \omega^1(\varphi') dt \quad (10.57)$$

dove la scrittura completa dell'integrando a destra è $\omega_{F, \varphi(t)}^1(\varphi'(t))$. Come ci si aspetta, cambiando l'orientamento l'integrale in (10.56) cambia segno:

$$\int_{\Gamma, -\text{Or}} \omega^1 = - \int_{\Gamma, \text{Or}} \omega^1 \quad (10.58)$$

Comunque, spesso, quando non vi siano ambiguità, *ometteremo l'indicazione esplicita dell'orientamento nel simbolo di integrale di 1-forme*.

Tale definizione si generalizza in maniera ovvia al caso di curve chiuse o di curve regolari a tratti contenute in A .

Nel caso $n = 1$ possiamo dunque interpretare l'integrale $\int_a^b f dx$ come l'integrale della 1-forma $f dx$ su $\Gamma = (a, b)$ (si ricordi l'esempio (E1) con $n = 1$ della sezione 10.1).

Se $\omega^1 = df$ è il differenziale di una funzione $f \in C^1(A)$ e $\Gamma = \varphi((a, b))$ è un elemento di curva orientato in A di estremi $x_0 = \varphi(a)$ ed $x = \varphi(b)$, otteniamo (sottointendendo $\text{Or} = \text{Or}(\varphi)$)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega^1 &\equiv \int_{\Gamma} df = \int_a^b \nabla f \cdot \varphi' dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f \circ \varphi dt = f(x) - f(x_0) , \end{aligned} \quad (10.59)$$

Integrando sui tratti di regolarità di una curva regolare a tratti³⁰, si vede subito che la (10.59) vale anche per curve regolari a tratti. In particolare, se Γ è una curva (regolare a tratti e) chiusa (cioè $x_0 = x$) si ha

$$\int_{\Gamma} df = 0 , \quad (\Gamma \text{ curva chiusa regolare a tratti}) . \quad (10.60)$$

Chiaramente, dire che una 1-forma ω^1 ha integrale nullo su ogni curva chiusa è equivalente a dire che l'integrale (10.57) dipende solo dagli estremi di Γ . Infatti vale anche il viceversa:

Proposizione 10.14 *Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Una 1-forma ω^1 su A è il differenziale di una funzione f se e solo se per ogni curva chiusa Γ regolare a tratti si ha*

$$\int_{\Gamma} \omega^1 = 0 . \quad (10.61)$$

³⁰I valori nei punti interni dove l'inclusione non è differenziabile si cancellano a due a due.

Dimostrazione Il “solo se” lo abbiamo già dimostrato. Assumiamo ora che valga (10.61) e sia $\omega^1 \equiv \omega_F^1$. Per l'osservazione fatta dopo (10.60), l'integrale di ω^1 dipende solo dagli estremi di una curva Γ . Fissiamo un qualunque punto $x_0 \in A$ e, per ogni $x \in A$, consideriamo una qualunque curva $\Gamma(x) \subset A$ regolare a tratti con primo estremo in x_0 e secondo estremo³¹ in x . Per ipotesi, risulta ben definita la funzione

$$f(x) \equiv \int_{\Gamma(x)} \omega^1 . \quad (10.62)$$

Facciamo ora vedere che $f_{x_i} = F_i$: sia $h \in \mathbb{R}$ tale che il segmento $P \equiv P(x, x + h e^{(i)})$ sia interamente contenuto in A . Sia $P = \{z = z(t) \equiv x + t h e^{(i)}, t \in [0, 1]\}$. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(f(x + h e^{(i)}) - f(x)) &= \frac{1}{h} \int_P \omega_F^1 \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 F(x + t h e^{(i)}) \cdot z' dt = \int_0^1 F(x + t h e^{(i)}) \cdot e^{(i)} dt \\ &= \int_0^1 F_i(x + t h e^{(i)}) dt \end{aligned} \quad (10.63)$$

e tale quantità tende, quando $h \rightarrow 0$, a $F_i(x)$. ■

Definizione 10.15 Sia $\omega^1 \equiv \omega_F^1$ una 1-forma su $A \subset \mathbb{R}^n$; ω^1 si dice *esatta* se $F = df$ per qualche $f \in C^2(A)$; tale f viene chiamata “*primitiva di F*”. ω_F^1 si dice *chiusa* se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} , \quad \forall i, j . \quad (10.64)$$

Chiaramente, per il lemma di Schwarz, una 1-forma esatta è chiusa. In generale non è vero il viceversa. Infatti, sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e sia

$$\omega^1 = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \quad (10.65)$$

(cosicché $\omega^1 \in C^\infty(A)$). E' immediato controllare che ω^1 è chiusa ma d'altra parte è anche facile vedere che se Γ è il cerchio unitario orientato in senso antiorario allora

$$\int_{\Gamma} \omega^1 = 2\pi , \quad (10.66)$$

e quindi, per la Proposizione 10.14 ω^1 non è esatta su³² A .

³¹Questo significa che se $\Gamma = \varphi((a, b))$, e $\text{Or} = \text{Or}(\varphi)$, $x_0 = \varphi(a)$ e $x = \varphi(b)$; si ricordi anche che un aperto connesso è connesso per poligonalità (ed una poligonale è una curva regolare a tratti).

³²Si noti però che $\omega^1 = d(\arctan(y/x)) = d(-\arctan(x/y))$ in $\{(x, y) : y \neq 0\}$ il che mostra che ω^1 è esatta su domini della forma $\mathbb{R}^2 \setminus P$ dove P è una qualunque semiretta chiusa che parte dall'origine (esercizio 10.35).

Un viceversa parziale si ottiene facendo opportune ipotesi sul dominio A . Un insieme A si dice **stellato** se esiste un punto $x_0 \in A$ tale che per ogni $x \in A$ il segmento di estremi x_0 e x è interamente contenuto in A ; in tal caso si dirà che A è stellato rispetto a³³ x_0 . Vale allora la seguente³⁴

Proposizione 10.16 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme stellato. Una 1-forma su A è chiusa se e solo se è esatta.*

Dimostrazione Assumiamo per semplicità che $x_0 = 0$ (caso a cui ci si può sempre ridurre tramite il cambio di variabili $x = x_0 + y$). Sia $\omega^1 \equiv \omega_F^1$ con F che verifichi (10.64) e si consideri la funzione

$$f(x) \equiv \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 F_i(tx) dt, \quad (10.67)$$

che per le ipotesi su A è ben definita. Dai risultati noti sulla derivazione sotto segno di integrale, da (10.64) e dal Teorema fondamentale del calcolo segue che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \int_0^1 F_j(tx) dt + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 t \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx) dt \\ &= \int_0^1 F_j(tx) dt + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 t \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(tx) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t F_j(tx)) dt = F_j(x). \end{aligned}$$

Ovvero $F = \nabla f$ e cioè ω^1 è esatta. Il viceversa, come già osservato, è conseguenza immediata del lemma di Schwarz. ■

Osservazione 10.17 Si noti che la formula (10.62) fornisce una ricetta per costruire una primitiva di una 1-forma esatta. Ad esempio $\omega^1 \equiv (\sin(xy) + xy \cos(xy)) dx + x^2 \cos(xy) dy$ è esatta su $\mathbb{R}^2$ (come deriva dal Lemma di Poincaré, essendo ω^1 chiusa su $\mathbb{R}^2$). Dato (x, y) scegliamo $\Gamma(x, y)$ come la poligonale orientata di vertici (in ordine) $(0, 0)$, $(x, 0)$ e (x, y) : $\Gamma(x, y) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con $\Gamma_1 = \{(tx, 0) : 0 \leq t \leq 1\}$ e $\Gamma_2 = \{(x, ty) : 0 \leq t \leq 1\}$. Si ha allora $\int_{\Gamma_1} \omega^1 = 0$ e $\int_{\Gamma_2} \omega^1 = yx^2 \int_0^1 \cos(txy) dt = x \sin(xy)$; quindi $x \sin(xy)$ è una primitiva di ω^1 .

Nella definizione della divergenza di una funzione $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ (con $A \subset \mathbb{R}^n$) il simbolo $\nabla \cdot f$ può essere interpretato come il prodotto scalare tra l'“operatore differenziale vettoriale” $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ e il campo vettoriale f . Nel caso $n = 3$ vi è un altro prodotto notevole, il prodotto vettoriale, e il prodotto vettoriale tra

³³ Ad esempio un insieme convesso è stellato rispetto ad un suo qualunque punto.

³⁴ Questo risultato e le sue generalizzazioni sono note come “Lemma di Poincaré”.

l'“operatore differenziale vettoriale” $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ e il campo vettoriale f definisce un nuovo campo vettoriale che prende il nome di **rotore** di f :

$$\nabla \times F \equiv \text{rot } F \equiv \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right). \quad (10.68)$$

Osservazione 10.18 (i) Si noti che la divergenza è definita per n arbitrario al contrario del rotore che è definito solo per $n = 3$.

(ii) Un campo $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ tale che $\nabla \times F = 0$ si chiama **irrotazionale**. Ricordando la definizione di 1-forma chiusa si ha che $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ è irrotazionale se e solo se ω_F^1 è chiusa.

Proposizione 10.19 Sia A un aperto di $\mathbb{R}^3$. Allora

(i) $\nabla \times (\nabla f) = 0, \forall f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$;

(ii) $\nabla \cdot (\nabla \times G) = 0, \forall G \in C^2(A, \mathbb{R}^3)$;

Sia ora $A \subset \mathbb{R}^3$ un aperto stellato e $H, F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$. Allora

(iii) $\nabla \times F = 0 \iff \exists f \in C^2(A, \mathbb{R})$ tale che $F = \nabla f$;

(iv) $\nabla \cdot H = 0 \iff \exists G \in C^2(A, \mathbb{R}^3)$ tale che $H = \nabla \times G$.

Dimostrazione La (i) e la (ii) seguono immediatamente dalle definizioni date e dal Lemma di Schwarz.

La (iii), in vista del punto (ii) dell'Osservazione 10.18, non è altro che la Proposizione 10.16 nel caso $n = 3$.

(iv): l'implicazione “ $\Leftarrow$ ” è un caso speciale del punto (ii). La dimostrazione dell'implicazione “ $\Rightarrow$ ” è assai simile alla dimostrazione della Proposizione 10.16. Infatti, assumiamo (senza perdita di generalità) che A sia stellato rispetto a $x_0 = 0$ e definiamo la funzione $\tilde{H} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\tilde{H}_i \equiv \int_0^1 t H_i(tx) dt.$$

Allora, una verifica diretta mostra che la funzione cercata G è data dal prodotto vettoriale tra $\tilde{H}$ e la trasformazione identica $x \rightarrow x$ ovvero da

$$G \equiv (\tilde{H}_2 x_3 - \tilde{H}_3 x_2, \tilde{H}_3 x_1 - \tilde{H}_1 x_3, \tilde{H}_1 x_2 - \tilde{H}_2 x_1).$$

Verifichiamo, a titolo di esempio, che $(\nabla \times G)_1 = H_1$ ovvero che $\frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = H_1$: dalle definizioni date segue che

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_3}{\partial x_2} &= \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_2} x_2 - \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_2} x_1 + \tilde{H}_1, \quad \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_3} x_1 - \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_3} x_3 - \tilde{H}_1, \\ \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial x_j} &= \int_0^1 t^2 \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(tx) dt. \end{aligned}$$

Quindi, poiché $\nabla \cdot H = 0$ (e quindi $\frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_1}$), si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial G_2}{\partial x_3} &= \int_0^1 \left\{ t^2 \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} x_3 - x_1 \left[\frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right] \right) + 2tH_2 \right\} dt \\ &= \int_0^1 t^2 \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} x_3 + x_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \right) + 2tH_1 \Big\} dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(t^2 H_1(tx) \right) dt \equiv H_1 . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Per formulare i teoremi classici di Green e Stokes abbiamo ancora bisogno di alcune definizioni. Dato un aperto regolare $A \subset \mathbb{R}^2$, si chiama *orientamento positivo* su ∂A , (o anche “orientamento antiorario”) l’orientamento Or_+ indotto da una parametrizzazione $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di ∂A tale che

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = (-\nu_2, \nu_1) , \quad (10.69)$$

dove $\nu \equiv (\nu_1, \nu_2)$ è la normale esterna a A nel punto $x = \varphi(t) \in \partial A$; in tal caso la coppia $(\partial A, \text{Or}_+)$ si denota anche con ∂A^+ . Una **superficie elementare con bordo ed orientabile in $\mathbb{R}^3$** è un elemento di 2-varietà regolare $S \subset \mathbb{R}^3$ dato dall’immagine di una inclusione $\psi \in C^2(A, \mathbb{R}^3)$ con A aperto regolare di $\mathbb{R}^2$: $S \equiv \psi(A)$; il **bordo** di S , denotato³⁵ ∂S , è la curva regolare chiusa $\psi(\partial A)$. Ad una inclusione (ψ, A) che realizza una superficie elementare con bordo ed orientabile $S = \psi(A)$ possiamo associare un versore ν^+ normale a³⁶ S definito, per ogni $x = \psi(u) \in S$, ($u \in A$), da

$$\nu^+ \equiv \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right|} , \quad (10.70)$$

ed un orientamento su ∂S definito da $\text{Or}(\psi \circ \varphi)$ dove φ è tale che $\partial A^+ = (\partial A, \text{Or}(\varphi))$; la coppia $(\nu^+, \partial S^+)$, con $\partial S^+ \equiv (\partial S, \text{Or}(\psi \circ \varphi))$ viene detta **orientata positivamente**. Si hanno allora i seguenti risultati

Teorema 10.20 (Teorema di Green) *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto regolare e sia $F \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^2)$. Allora*

$$\int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx = \int_{\partial A^+} \omega_F^1 . \quad (10.71)$$

Teorema 10.21 (Teorema classico di Stokes) *Sia S una superficie elementare con bordo ed orientabile in $\mathbb{R}^3$ e $F \in C^1(\overline{S}, \mathbb{R}^3)$. Allora*

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot \nu^+ d\sigma_2 = \int_{\partial S^+} \omega_F^1 , \quad (10.72)$$

³⁵Si noti che, in questo contesto, il simbolo “ ∂S ” non denota la frontiera insiemistica di S , che, infatti, coincide con $\overline{S}$ (essendo $\overset{\circ}{S} = \emptyset$).

³⁶“Versore” significa di norma unitaria ($|\nu^+| = 1$) e “normale a S ” significa “ortogonale ad ogni vettore tangente a S ” ($\nu^+ \cdot \xi = 0$ per ogni ξ tangente a S nel punto x).

dove ν^+ è un versore normale a S tale che la coppia $(\nu^+, \partial S^+)$ è orientata positivamente.

Osservazione 10.22 (i) Il Teorema di Green può essere utile per calcolare aree di figure piane tramite integrali di 1-forme. Infatti, se applichiamo la (10.71), rispettivamente, ai campi $F \equiv (0, x_1)$, $F \equiv (-x_2, 0)$ oppure $F \equiv \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$, (osservando che in tutti questi casi $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 1$) si ottiene la formula

$$m(A) \equiv \text{Area}(A) = \int_{\partial A^+} x_1 dx_2 = - \int_{\partial A^+} x_2 dx_1 = \frac{1}{2} \int_{\partial A^+} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1). \quad (10.73)$$

(ii) L'integrale di una 1-forma ω_F^1 su di una curva chiusa orientata Γ prende il nome di **circuitazione del campo F su Γ** . Dunque il Teorema di Stokes può essere formulato dicendo che *il flusso totale del rotore di un campo F attraverso una superficie elementare S con bordo orientabile, nel verso della normale ν^+ , coincide con la circuitazione di F su ∂S^+* .

(iii) Non è difficile mostrare che *il Teorema della divergenza ed i teoremi di Green e Stokes continuano a valere nel caso in cui le superfici su cui si integra siano solo regolari a tratti*³⁷. Ad esempio il Teorema della divergenza è applicabile a cubi, coni, etc.

Dimostrazione (del Teorema di Green) Applicando il Teorema della divergenza su A al campo vettoriale $(F_2, -F_1)$, se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è tale che $\varphi([a, b]) = \partial A$ e $\text{Or}_+ = \text{Or}(\varphi)$, si ha

$$\begin{aligned} \int_A \nabla \cdot (F_2, -F_1) dx &= \int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx \\ &= \int_{\partial A} (F_2, -F_1) \cdot \nu d\sigma_1 = \int_a^b F \cdot \frac{\varphi'}{|\varphi'|} |\varphi'| dt \\ &= \int_{\partial A^+} \omega_F^1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dimostrazione (del Teorema di Stokes) Sia $S = \psi(A)$ con A aperto regolare in $\mathbb{R}^2$ e sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi([a, b]) = \partial A$ e $\text{Or}_+ = \text{Or}(\varphi)$. Sia

$$G(u) \equiv \left(F \circ \psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, F \circ \psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right), \quad \text{con } \psi \equiv \psi(u), u \in A. \quad (10.74)$$

³⁷Bisogna, naturalmente, adattare (nella maniera ovvia) le varie definizioni date. La dimostrazione di questa estensione del Teorema della divergenza può essere fatta approssimando in modo regolare la frontiera ∂A di un dominio A "regolare a tratti" (usando, per esempio, la convoluzione con funzioni C_0^∞ con supporto in un intorno opportuno delle "singolarità" di ∂A): se $\partial A^{(j)}$ denotano tali approssimazioni regolari, è allora facile vedere che $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{A^{(j)}} \nabla \cdot F = \int_A \nabla \cdot F$ e che (essendo la parte singolare di $\partial A^{(j)}$ un "insieme di misura $(n-1)$ -dimensionale nulla") anche $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\partial A^{(j)}} F \cdot \nu d\sigma_{n-1} = \int_{\partial A} F \cdot \nu d\sigma_{n-1}$.

Applicando il Teorema di Green a G , si ottiene

$$\begin{aligned}
 \int_A \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_1} - \frac{\partial G_1}{\partial u_2} \right) du &= \int_{\partial A^+} \omega_G^1 \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_a^b F_i(\psi \circ \varphi) \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j} \varphi'_j(t) dt \\
 &= \int_a^b \sum_{i=1}^3 F_i(\psi \circ \varphi) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial u_1}(\varphi) \varphi'_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial u_2}(\varphi) \varphi'_2 \right) \\
 &= \int_a^b \sum_{i=1}^3 F_i(\psi \circ \varphi) \frac{d}{dt} \psi_i \circ \varphi = \int_{\partial S^+} \omega_F^1. \quad (10.75)
 \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot \nu^+ d\sigma_2 = \int_A \nabla \times F(\psi) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) du. \quad (10.76)$$

Ed infine

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_2}{\partial u_1} - \frac{\partial G_1}{\partial u_2} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_1} \left(F_i \circ \psi \frac{\partial \psi_i}{\partial u_2} \right) - \frac{\partial}{\partial u_2} \left(F_i \circ \psi \frac{\partial \psi_i}{\partial u_1} \right) \\
 &= \sum_{i,j} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial u_1} \frac{\partial \psi_i}{\partial u_2} - \frac{\partial \psi_j}{\partial u_2} \frac{\partial \psi_i}{\partial u_1} \right) \\
 &= \sum_{i>j} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial u_1} \frac{\partial \psi_i}{\partial u_2} - \frac{\partial \psi_j}{\partial u_2} \frac{\partial \psi_i}{\partial u_1} \right) \\
 &\equiv (\nabla \times F) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right). \quad (10.77)
 \end{aligned}$$

Mettendo assieme (10.75)÷(10.77) si ha l'asserto. ■

Esercizi e complementi

E 10.1 Se qualcuna delle affermazioni fatte in (E1)÷(E7) di § 10.1 non fosse completamente chiara, la si dimostri con cura!

E 10.2 Dire se le seguenti funzioni definiscono delle inclusioni differenziabili e, in caso affermativo, si disegni la traccia dei relativi elementi di curva e se ne calcoli la lunghezza:

- (i) $\varphi(t) = r(t - \text{sen } t, 1 - \text{cos } t)$, $t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, ($r > 0, 1 > \varepsilon > 0$),
 (ii) $\varphi(t) = t(\text{cos } t, \text{sen } t)$, $t \in [a, b]$, ($0 < a < b$),

(iii) φ come in (i) ma con $t \in [0, 1]$.

[L'elemento di curva in (i) prende il nome di "elemento di cicloide"; quello in (ii) "elemento di spirale".]

E 10.3 Trovare un'inclusione, nell'intorno di $x_0 = (1, 10, 2, 0)$, che realizzi $\{\phi = 0\}$ con

$$\phi(x) = x_1^2 + x_2^5(x_3 - 2) + \cos x_4 - 2.$$

E 10.4 Si diano i dettagli della dimostrazione relativa all'affermazione fatta nel punto (i) dell'Osservazione 10.7.

C 10.5 (Prodotto vettoriale) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è una *operazione bilineare ed antisimmetrica* che associa ad una coppia di vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$ un terzo vettore $v \times w \in \mathbb{R}^3$ di coordinate³⁸

$$(v \times w)_i \equiv \det[e^{(i)}, v, w], \quad (10.78)$$

ovvero

$$v \times w = \sum_{i=1}^3 e^{(i)} \det[e^{(i)}, v, w], \quad \left(e_j^{(i)} \equiv \delta_{ij} \right). \quad (10.79)$$

Si noti che, per definizione di i -esima coordinata, si ha

$$e^{(i)} \cdot (v \times w) = \det[e^{(i)}, v, w]. \quad (10.80)$$

Dati due vettori linearmente indipendenti v e w definiamo $\pi_{v,w}$ il piano generato da v e w

$$\pi_{v,w} \equiv V(v, w) \equiv \{y \in \mathbb{R}^3 : y = av + bw \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}. \quad (10.81)$$

Ed infine, dati tre vettori indipendenti $v^{(i)} \in \mathbb{R}^3$, definiamo

$$\begin{aligned} \text{Or}(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}) &\equiv \left\{ (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \right. \\ &\quad \left. \det[y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}] \det[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}] > 0 \right\}. \end{aligned} \quad (10.82)$$

E' facile vedere che³⁹ l'appartenenza a $\text{Or}(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ è una *relazione d'equivalenza*; una base (ordinata) $(y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$ in $\text{Or}(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ si dice che *definisce lo stesso orientamento di* (o anche *che è equiorientata con*) $(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$.

Si verificano facilmente le seguenti proprietà del prodotto vettoriale $v \times w$, di $\pi_{v,w}$ e dell' "orientamento" $\text{Or}(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$:

Proprietà del prodotto vettoriale

- 1) $v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2)e^{(1)} - (v_1 w_3 - v_3 w_1)e^{(2)} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)e^{(3)}$.
- 2) L'operazione $(v, w) \rightarrow v \times w$ è bilineare⁴⁰ ed antisimmetrica⁴¹.
- 3) $e^{(\sigma_1)} = \varepsilon_\sigma e^{(\sigma_2)} \times e^{(\sigma_3)}$, dove σ è una permutazione di $\{1, 2, 3\}$ e ε_σ è il segno di tale permutazione⁴².
- 4) $w \cdot v^{(1)} \times v^{(2)} = \det[w, v^{(1)}, v^{(2)}]$ e quindi $w \cdot v^{(1)} \times v^{(2)} = v^{(1)} \cdot v^{(2)} \times w = v^{(2)} \cdot w \times v^{(1)}$.

³⁸In alcuni testi (soprattutto di fisica) il prodotto vettoriale tra v e w viene denotato con il simbolo " $v \wedge w$ ".

³⁹Esercizio 10.7.

⁴⁰Cioè lineare sia in v che in w .

⁴¹Cioè $v \times w = -w \times v$.

⁴²Si ricordi la nota 3 di §9.11.

5) $v \times w \perp v, v \times w \perp w$.

6) $v \times w \neq 0$ se e solo se $\text{rango}[v, w] = 2$ se e solo se v e w sono linearmente indipendenti (cioè “non appartengono alla stessa retta” o equivalentemente “non sono paralleli”).

7) $|v \times w|^2 = |v|^2 |w|^2 - (v \cdot w)^2$.

8) Se U è una matrice ortogonale (3×3), $|Uv \times Uw| = |v \times w|$.

9) Se $U \in SO(3)$, allora $Uv \times Uw = U(v \times w)$.

10) $(v \times w, v, w) \in \text{Or}(e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)})$.

11) Se v e w sono indipendenti, allora $\pi_{v,w} = \pi_{v \times w}$.

12) $|v \times w|$ coincide con l'area del parallelogramma generato da v e w (per una formulazione più precisa si veda 10.6).

Dimostrazione della 9): usando la 4) e la (10.80), per ogni i si ha:

$$\begin{aligned} e^{(i)} \cdot U(v \times w) &= U^T e^{(i)} \cdot (v \times w) = \det[U^T e^{(i)}, v, w] = \det[U^{-1} e^{(i)}, v, w] \\ &= \det(U^{-1}[e^{(i)}, Uv, Uw]) = \det[e^{(i)}, Uv, Uw] = e^{(i)} \cdot (Uv \times Uw). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La definizione del prodotto vettoriale può essere facilmente ricordata se si nota che la seguente *identità formale*:

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} e^{(1)} & e^{(2)} & e^{(3)} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \quad (10.83)$$

dove il determinante formale verrà pensato sviluppato secondo la prima “riga”.

E 10.6 (i) Siano v e w due vettori in $\mathbb{R}^3$ indipendenti. Si dimostri che esiste $U \in SO(3)$ tale che $U(v \times w) = \lambda e^{(3)}$ con $\lambda > 0$.

(ii) Si dimostri che $Uv, Uw \in \pi_{e^{(1)}, e^{(2)}}$.

Sia $Uv = (\bar{v}, 0)$, $Uw = (\bar{w}, 0)$ con $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^2$. Definiamo l'area del parallelogramma $P \equiv \{a_1 v + a_2 w \text{ con } a_i \in [0, 1]\}$ come la misura (bidimensionale) di $\Pi(\bar{v}, \bar{w})$.

(iii)* Si dimostri che la definizione in (ii) *non dipende* dalla particolare scelta di U (che non è unica).

(iv) Si dimostri che $|v \times w|$ coincide con l'area del parallelogramma P .

E 10.7 Si dimostri che $\text{Or}(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ è una classe di equivalenza nell'insieme delle triple ordinate di vettori indipendenti in $\mathbb{R}^3$.

E 10.8 Dimostrare che se $(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}) \in \text{Or}(e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)})$ allora

$$v^{(3)} \cdot v^{(1)} \times v^{(2)} > 0. \quad (10.84)$$

Ora si mediti sulla “regola della mano destra”.

C 10.9 (Ascissa curvilinea) Se Γ è un elemento di curva regolare, esiste una parametrizzazione “canonica” in termini della lunghezza. Se $\Gamma = \varphi((a, b))$ definiamo la seguente funzione, chiamata **ascissa curvilinea**:

$$s(t) \equiv \int_a^t |\varphi'(u)| du \quad (10.85)$$

ovvero $s(t)$ è la lunghezza dell'elemento di curva di estremi $\varphi(a)$ e $\varphi(t)$: in particolare $s(a) = 0$ e $s(b) = L(\Gamma)$. Essendo $s'(t) = |\varphi'(t)| \neq 0$ tale funzione è strettamente crescente in $[a, b]$ e quindi invertibile. Sia $t(s)$ la funzione inversa. Poniamo allora

$$\tilde{\varphi}(s) \equiv \varphi(t(s)) . \quad (10.86)$$

E' chiaro che tale inclusione *non dipende da* φ ⁴³. Dato un elemento di curva regolare Γ e fissato un suo estremo x_0 si chiama **parametrizzazione secondo l'ascissa curvilinea** con punto iniziale x_0 la parametrizzazione $\gamma(s) \equiv \tilde{\varphi}(s)$ dove $\varphi : [a, b] \rightarrow \Gamma$ è una qualunque inclusione su Γ tale che $\varphi(a) = x_0$ e $\tilde{\varphi}(s)$ è definita in (10.86).

C 10.10 (Rette e vettori tangenti)

Sia $\Gamma \equiv \varphi(I)$ un elemento di curva regolare in $\mathbb{R}^n$ ($I = (a, b)$ e φ è una inclusione di $[a, b]$ in $\mathbb{R}^n$). Ricordiamo che una qualunque retta in $\mathbb{R}^n$ passante per un punto x_0 è data da

$$\ell \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_0 + t\xi \text{ con } t \in \mathbb{R}\} , \quad (10.87)$$

dove ξ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$. Non è restrittivo assumere che⁴⁴ $|\xi| = 1$ cosa che d'ora in avanti faremo. Ricordiamo anche che dato un punto $x \in \mathbb{R}^n$ ed un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^n$ si definisce la *distanza di x da X* (rispetto alla norma euclidea $|\cdot|$) come

$$\text{dist}(x, X) \equiv \inf_{y \in X} |x - y| . \quad (10.88)$$

Si ha allora la seguente semplice

Proposizione 10.23 *Dato un punto $x \in \mathbb{R}^n$ ed una retta passante per $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\ell \equiv \{x_0 + t\xi\}$ (con $|\xi| = 1$), si consideri il seguente punto su ℓ*

$$p_\ell(x) \equiv x_0 + (x - x_0) \cdot \xi \xi . \quad (10.89)$$

Allora $p_\ell(x)$ verifica

$$\text{dist}(x, \ell) = |x - p_\ell(x)| \quad (10.90)$$

ed è l'unico punto di ℓ per cui (10.90) valga.

Il punto $p_\ell(x)$ si chiama **proiezione di x su ℓ** .

Dimostrazione Per trovare la distanza di x da ℓ bisogna minimizzare la funzione $t \rightarrow |x - x_0 - t\xi|$ o, equivalentemente, la funzione $|x - x_0 - t\xi|^2$. Tale quantità, per (B.4), è uguale a

$$|x - x_0|^2 + t^2 - 2t(x - x_0) \cdot \xi \quad (10.91)$$

che raggiunge il suo minimo per l'unico valore $t = (x - x_0) \cdot \xi$. ■

⁴³Cioè se $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'altra inclusione su Γ tale che $\psi(c) = \varphi(a)$ allora $\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\psi}(s)$.

⁴⁴Basta infatti cambiare il paramero t con $s = |\xi|t$.

Definizione 10.24 Sia $x_0 \in \Gamma$ elemento di curva regolare in $\mathbb{R}^n$. Una retta ℓ passante per x_0 si dice *tangente a Γ* (nel punto x_0) se per ogni successione di punti $x^{(j)} \in \Gamma$, $x^{(j)} \neq x_0$, tali che $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(j)} = x_0$ si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(x^{(j)}, \ell)}{|x^{(j)} - x_0|} = 0. \quad (10.92)$$

Si noti che la quantità $\frac{\text{dist}(x^{(j)}, \ell)}{|x^{(j)} - x_0|}$ non è altro che il seno dell'angolo tra la retta ℓ e la retta passante per i punti x_0 e $x^{(j)}$.

Proposizione 10.25 Sia $\Gamma \equiv \varphi((a, b))$ un elemento di curva regolare⁴⁵ in $\mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \Gamma$. Allora esiste un'unica retta tangente a Γ in x_0 data da

$$\ell \equiv \{x = \varphi(t_0) + s\tau : s \in \mathbb{R}\}, \quad \text{dove} \quad \tau \equiv \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}. \quad (10.93)$$

Il versore τ definito in (10.93) si chiama *versore tangente* alla curva Γ nel punto x_0 mentre $\varphi'(t_0)$ è un **vettore tangente** a Γ in x_0 .

Osservazione 10.26 Il versore tangente τ definito in (10.93) è definito a meno del segno⁴⁶. Il verso scelto in (10.93) fissa un verso (cioè un "orientamento") sulla retta tangente che corrisponde al verso in cui $\varphi(t)$ "percorre" l'elemento Γ .

Dimostrazione (della Proposizione 10.25) Assumiamo, per semplicità di notazione che $t_0 = 0$ e che $x_0 = 0$ (situazione che può sempre essere raggiunta tramite traslazioni in t e x). Dimostriamo prima che ℓ è tangente a Γ in $x_0 = 0$. Sia $x^{(j)} \in \Gamma$ una successione convergente a 0 (con $x^{(j)} \neq 0$); questo equivale a dire che $x^{(j)} = \varphi(t_j)$ con $t_j \rightarrow 0$, ($t_j \neq 0$), e $\varphi(0) = 0$. Dalla Proposizione 10.23 si ha che

$$\frac{\text{dist}(x^{(j)}, \ell)}{|x^{(j)}|} = \frac{|\varphi(t_j) - \varphi(t_j) \cdot \tau \tau|}{|\varphi(t_j)|}. \quad (10.94)$$

D'altra parte per la formula di Taylor al prim'ordine si ha che esiste una funzione (vettoriale) $\delta(t)$ tale che

$$\varphi(t) = \varphi'(0)t + \delta(t), \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\delta(t)|}{t} = 0. \quad (10.95)$$

Inoltre, dalla definizione di τ , segue che

$$\varphi'(0) \cdot \tau \tau = \varphi'(0). \quad (10.96)$$

Sostituendo (10.95) in (10.94) ed usando (10.96) otteniamo

$$\frac{\text{dist}(x^{(j)}, \ell)}{|x^{(j)}|} = \frac{|\delta(t_j) - \delta(t_j) \cdot \tau \tau|}{|t_j| |\varphi'(0) + \frac{\delta(t_j)}{t_j}|} \quad (10.97)$$

e tale quantità tende a 0, quando $j \rightarrow \infty$, in virtù di (10.95) (ed essendo $|\varphi'(0)| \neq 0$).

⁴⁵Come al solito φ è una inclusione dell'intervallo $[a, b]$ in $\mathbb{R}^n$.

⁴⁶In effetti, la Proposizione 10.25 asserisce l'unicità della retta tangente e ad una retta corrispondono due versori.

Dimostriamo ora l'unicità della retta tangente. Supponiamo che esista un'altra retta tangente $\ell' \equiv \{x_0 + s\tau' : s \in \mathbb{R}\}$ con $|\tau'| = 1$ e $\tau' \neq \pm\tau$ (il che equivale a dire che le rette ℓ e ℓ' sono distinte). Sia $x^{(j)} \neq 0$ una successione di punti in Γ che tendono a 0. Essendo le due rette tangenti a Γ si ha che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|x^{(j)} - x^{(j)} \cdot \tau \cdot \tau|}{|x^{(j)}|} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|x^{(j)} - x^{(j)} \cdot \tau' \cdot \tau'|}{|x^{(j)}|} = 0. \quad (10.98)$$

Sia $y^{(j)} \equiv \frac{x^{(j)}}{|x^{(j)}|}$. Tale successione appartiene a $S^{n-1} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Tale insieme è compatto, quindi esiste una sottosuccessione $y^{(j_k)}$ convergente ad un punto $\bar{y}$ di S^{n-1} . Inserendo tale sottosuccessione in (10.98) e prendendo il limite per $k \rightarrow \infty$, otteniamo che

$$\bar{y} - \bar{y} \cdot \tau \cdot \tau = 0 = \bar{y} - \bar{y} \cdot \tau' \cdot \tau' \quad (10.99)$$

ovvero $\bar{y} = \bar{y} \cdot \tau \cdot \tau = \bar{y} \cdot \tau' \cdot \tau'$. Prendendo la norma di tali relazioni e ricordando che $|\bar{y}| = 1$, vediamo che $\bar{y} \cdot \tau = \pm 1$ e $\bar{y} \cdot \tau' = \pm 1$, il che implica $\tau = \pm\tau'$ (essendo $\bar{y} \cdot \tau \cdot \tau = \bar{y} \cdot \tau' \cdot \tau'$) producendo una contraddizione. ■

E 10.11 Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ l'unione dei due segmenti $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0, 0 \leq x_1 < 1\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, 0 \leq x_2 < 1\}$. Si dimostri che Γ è una 1-varietà regolare a tratti ma non è un elemento di 1-varietà regolare in $\mathbb{R}^2$.

10.12 Verificare che i vettori tangenti alla cicloide (10.2) nei punti $(x, y) = \varphi(n\pi)$ sono paralleli all'asse delle x .

C 10.13 (Volumi di parallelepipedi k -dimensionali in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq k$)

Siano $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ k vettori in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq k$; sia $\Pi_0 \equiv \Pi(v^{(1)}, \dots, v^{(k)})$ il parallelepipedo generato da $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$. Lo scopo di questo paragrafo è di definire il volume (la misura) k -dimensionale di Π_0 (per le notazioni si veda § 9.11). Tale definizione è basata sui due seguenti lemmi (la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio). Sia $V \equiv V(v^{(1)}, \dots, v^{(k)})$ lo spazio vettoriale generato da $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$.

Lemma 10.27 Siano $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ vettori indipendenti in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq k$; sia $B \equiv \{w^{(1)}, \dots, w^{(k)}\}$ una base ortonormale in V . Denotiamo con $u^{(i)} \in \mathbb{R}^k$ il vettore delle coordinate di $v^{(i)}$ rispetto a B (cioè $u^{(i)} \equiv (u_1^{(i)}, \dots, u_k^{(i)})$ e $v^{(i)} = \sum_{j=1}^k u_j^{(i)} w^{(j)}$), e denotiamo con U e A le matrici $U \equiv [u^{(1)}, \dots, u^{(k)}]$ e $A \equiv [v^{(1)}, \dots, v^{(k)}]$; $U \in \text{Mat}(k \times k)$ e $A \in \text{Mat}(n \times k)$. Allora $U^T U = A^T A$.

Lemma 10.28 Siano $k, n, v^{(i)}$ ed A come nel Lemma precedente e sia $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ un isomorfismo lineare che conservi il prodotto scalare. Allora

$$\text{mis}_k \left(\varphi(\Pi[v^{(1)}, \dots, v^{(k)}]) \right) = \text{mis}_k \left(\Pi[\varphi(v^{(1)}), \dots, \varphi(v^{(k)})] \right) = \sqrt{A^T A}. \quad (10.100)$$

Definizione 10.29 Se $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ sono vettori in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq k$ e se $\Pi_0 \equiv \Pi(v^{(1)}, \dots, v^{(k)})$ denota il parallelepipedo generato in $\mathbb{R}^n$ dai vettori $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$, si definisce la misura euclidea k -dimensionale di Π_0 come

$$\text{mis}_k(\Pi_0) \equiv \text{mis}_k \left(\varphi(\Pi[v^{(1)}, \dots, v^{(k)}]) \right), \quad (10.101)$$

dove $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ è un qualunque isomorfismo lineare che conservi il prodotto scalare.

Osservazione 10.30 (i) Un isomorfismo che conservi il prodotto scalare conserva anche gli angoli e le lunghezze e quindi conserva la "geometria euclidea".

(ii) In particolare da (10.100) mostra che la misura k -dimensionale di $\varphi(\Pi_0)$ non dipende dal particolare isomorfismo φ (purchè, naturalmente φ conservi il prodotto scalare). Dunque la Definizione 10.29 è ben posta.

(iii) Per una nota formula di algebra lineare⁴⁷ si ha che se A è una matrice $n \times k$ con $k \leq n$ allora il determinante di $A^T A$ è uguale alla somma dei quadrati dei determinanti di tutti i minori di rango massimo (ossia k). Dunque l'oggetto formale " $d\sigma_k$ " che appare in (10.12) (e cioè nella definizione della misura di una varietà k -dimensionale in $\mathbb{R}^n$) può essere interpretata come la misura k -dimensionale del parallelepipedo "infinitesimo" generato dai vettori $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} du_i$ (e si ricordi che i vettori $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}$ generano lo spazio tangente alla varietà).

E 10.14* Sia S la porzione cilindrica in $\mathbb{R}^3$ data da $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1, x^2 + y^2 = 1, \text{ e } y > 0\}$. Si dimostri che per ogni $M > 0$ (comunque grande) e per ogni $\delta > 0$ (comunque piccolo) esistono N triangoli con interni a due a due disgiunti e con vertici su S tali che la somma delle loro aree supera M .

E 10.15 Si verifichi che se definiamo i numeri L, M, N tramite la relazione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \equiv L e^{(1)} - M e^{(2)} + N e^{(3)} \quad (10.102)$$

ed i numeri E, F, G tramite

$$E \equiv \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right|^2, \quad F \equiv \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right|^2, \quad G \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad (10.103)$$

allora

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right|^2 = L^2 + M^2 + N^2 = E^2 F^2 - G^2. \quad (10.104)$$

(Tali notazioni sono usate in vari testi).

E 10.16 Dimostrare che se $S \equiv \{(x, f(x)) : x \in U\}$, con U aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, è il grafico di una funzione $f \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R})$, allora

$$\text{Area}(S) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2} du. \quad (10.105)$$

E 10.17 (Superfici di rotazione in $\mathbb{R}^3$) Sia $\Gamma \equiv \{(u(t), v(t)) : t \in (a, b)\}$ un elemento di curva regolare (eventualmente chiusa) in $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ e α un numero in $(0, 2\pi]$. Si dimostri che

$$S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = u(t) \cos \theta, y = u(t) \sin \theta, z = v(t) \text{ con } t \in (a, b), \text{ e } \theta \in (0, \alpha)\}$$

è un elemento di superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli l'area in termini di un integrale su (a, b) .

⁴⁷Tale formula è una generalizzazione della formula per il determinante del prodotto di due matrici quadrate ed in alcuni testi è nota come "Teorema di Binet"; si veda, ad esempio, "E. Sernesi Geometria I, ed. Boringhieri.

E 10.18 Sia $\Gamma \equiv \varphi((a, b))$ un elemento di curva regolare in $\mathbb{R}^2$, sia $f \in C(\bar{\Gamma}; (0, \infty))$ e sia $S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Gamma \text{ e } 0 < z < f(x, y)\}$. Si dimostri che S è un elemento di superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ e si dimostri che

$$\text{Area}(S) = \int_{\Gamma} f d\sigma_1.$$

E 10.19 Calcolare l'area superficiale dell'ellissoide di rotazione

$$\left(\frac{x_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{R}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{r}\right)^2 = 1 \quad (10.106)$$

dove $R \neq r$ sono due numeri positivi.

E 10.20 Si calcoli l'area della superficie del toro T^2 ottenuto ruotando una circonferenza di raggio r attorno ad un asse a distanza $R > r$ dal centro della circonferenza.

Si noti che T^2 ammette la parametrizzazione:

$$T^2 = \{x = (R + r \cos t) \cos \theta, y = (R + r \cos t) \sin \theta, z = r \sin t, \text{ con } 0 \leq t, \theta \leq 2\pi\}.$$

E 10.21 (Orientamento su superfici) Fissare una particolare inclusione φ che realizza S , elemento di superficie, equivale a fissare un **orientamento su S** : si definisce $\text{Or}(\varphi)$ la classe di equivalenza costituita da tutte le inclusioni $\psi: \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\psi(V) = S$ tali che $\det \frac{\partial \psi}{\partial v} > 0$, dove $v(u) \equiv \psi^{-1} \circ \varphi(u)$. Dimostrare che l'orientamento $\text{Or} = \text{Or}(\varphi)$ è una classe di equivalenza.

E 10.22 Sia $\text{Or} = \text{Or}(\varphi)$ un orientamento fissato su $S = \varphi(U)$. Trovare l'orientamento opposto.

E 10.23 Dimostrare che su ogni elemento di superficie $S = \varphi(U)$ si hanno due soli orientamenti, ovvero ogni inclusione ψ che realizza S o appartiene a $\text{Or}(\varphi)$ o appartiene a $\text{Or}(\bar{\varphi}) = -\text{Or}(\varphi)$.

E 10.24 (Orientamento su elementi di k -varietà) Le definizioni date nel caso di curve e superfici in $\mathbb{R}^3$ si estendono immediatamente al caso generale. Sia $S = \varphi(U)$ un elemento di k -superficie in $\mathbb{R}^n$. Si definisce l'**orientamento** indotto da φ su S la classe di equivalenza costituita da tutte le inclusioni $\psi: \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\psi(V) = S$ tali che $\det \frac{\partial \psi}{\partial v} > 0$ dove $v(u) \equiv \psi^{-1} \circ \varphi(u)$.

Si generalizzino gli esercizi 10.21, 10.22 e 10.23.

C 10.25 (Spazio tangente ad una varietà)

Sia $S = \varphi(U)$ un elemento di k -varietà in $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \equiv \varphi(u_0) \in S$.

Definizione 10.31 Si chiama *spazio tangente a S in x_0* , e si denota TS_{x_0} , l'insieme dei vettori $\xi \in \mathbb{R}^n$ tali che $\xi = z'(t_0)$ per una qualche $z: (a, b) \rightarrow S$ di classe C^1 tale che $z(t_0) = x_0$ con $a < t_0 < b$.

Si noti che se $z'(t_0) \neq 0$, l'immagine di un intorno sufficientemente piccolo di t_0 è un elemento di curva regolare in S passante per x_0 ; d'altra parte prendendo $z: t \in (0, 1) \rightarrow z(t) \equiv x_0 \in S$ si vede che $0 \in TS_{x_0}$. Per ogni $x_0 = \varphi(u_0) \in S = \varphi(U)$ passano k -curve speciali, dette **curve coordinate**, date da

$$\gamma^{(i)}(t) \equiv \varphi(u_0 + te^{(i)}) \equiv \varphi(u_{01}, \dots, u_{0i} + t, \dots, u_{0k}) \quad (10.107)$$

dove $\{e^{(i)}\}$ è la base standard in $\mathbb{R}^k$ e t varia in $[-\delta, \delta]$ per δ sufficientemente piccolo⁴⁸. Quindi i k vettori

$$\xi^{(i)} \equiv (\gamma^{(i)})'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u_0) \quad (10.108)$$

appartengono a TS_{x_0} . Infatti, vale la seguente

Proposizione 10.32 *Lo spazio TS_{x_0} è un sottospazio vettoriale di dimensione k di $\mathbb{R}^n$ ed una base di tale spazio vettoriale è data dai k vettori $\xi^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$ definiti in (10.108).*

Dimostrazione Tramite una traslazione ($t = t_0 + s$) possiamo assumere che gli elementi di TS_{x_0} siano realizzati da applicazioni differenziabili z definite in un intorno di 0 tali che $z(0) = x_0$. Dato $\xi \in TS_{x_0}$, facciamo vedere che ξ può scriversi come combinazione lineare dei vettori $\xi^{(i)}$. Sia $\xi = z'(0)$. Definiamo $v(t) \equiv \varphi^{-1} \circ z(t)$. Tale funzione (per il punto (vii) dell'Osservazione 10.3) appartiene a $C^1(\{0\}, \mathbb{R}^k)$ ed inoltre $\varphi(v(t)) = z(t)$ e $u_0 \equiv v(0)$. Derivando $\varphi(v(t)) = z(t)$ si ottiene che, per ogni $j = 1, \dots, n$,

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i}(u_0) v'_i(0) = z'_j(0), \quad (10.109)$$

cioè $\xi = \sum_{i=1}^k a_i \xi^{(i)}$ con $a_i \equiv v'_i(0)$. Mostriamo che TS_{x_0} è uno spazio vettoriale. Se $\xi \equiv z'(0) \in TS_{x_0}$ e $a \in \mathbb{R}$ allora $a\xi = w'(0)$ dove $w(t) \equiv z(at)$ e quindi $a\xi \in TS_{x_0}$. Se $\xi, \eta \in TS_{x_0}$ per quanto visto precedentemente si ha che $\xi = \sum_{i=1}^k a_i \xi^{(i)}$ e $\eta = \sum_{i=1}^k b_i \xi^{(i)}$ e quindi $\xi + \eta = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(u_0 + (a_1 + b_1)t, \dots, u_{0k} + (a_k + b_k)t)$ ovvero $\xi + \eta \in TS_{x_0}$. Infine che i vettori $\xi^{(i)}$ siano linearmente indipendenti deriva immediatamente dalla definizione di inclusione (in particolare dal fatto che lo jacobiano $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0)$ ha rango massimo). ■

Si noti che se $k = 1$, TS_{x_0} non è la retta ℓ tangente definita in 10.10 ma è la retta parallela a ℓ passante per l'origine.

E 10.26 (i) Si trovi una inclusione $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(U) = S^2 \cap \{x_3 > \varepsilon\} \equiv \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 = 1 \text{ e } x_3 > \varepsilon\}$ ($0 < \varepsilon < 1$)

(ii) Si determinino gli spazi tangenti a $\varphi(U)$ (φ come in (i) con $\varepsilon = \frac{1}{3}$) nei punti $x_0 = (0, 0, 1)$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

E 10.27 (i) Se S è un elemento di $(n-1)$ -superficie in $\mathbb{R}^n$ dato da $\{\phi = 0\} \cap B$ con $\phi \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R})$ e B sfera aperta in $\mathbb{R}^n$, si dimostri che

$$\nabla \phi(x) \perp TS_x \quad (10.110)$$

per ogni $x \in S$.

(ii) Si trovino i versori (cioè "i vettori di norma 1") normali a S in x .

E 10.28 (Versori normali in $\mathbb{R}^3$) Sia $S = \varphi(U)$ un elemento di 2-superficie in $\mathbb{R}^3$. Dalle proprietà del prodotto vettoriale deriva che il vettore $n = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$ è ortogonale ai vettori tangenti $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$, e, poiché tali vettori formano una base per lo spazio tangente

⁴⁸ "Sufficientemente piccolo" significa che $\gamma^{(i)}([-\delta, \delta])$ è contenuto in S .

a S in $\varphi(u)$, segue che il vettore n è ortogonale all'intero spazio $TS_{\varphi(u)}$. Il vettore unitario ("versore")

$$\nu \equiv \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right|} \quad (10.111)$$

verrà chiamato **la normale "positiva"** a S in $x = \varphi(u)$ e verifica

$$|\nu| = 1, \quad \nu \perp TS_{\varphi(u)} \quad \left(\nu, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) \in \text{Or}(e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}) . \quad (10.112)$$

La parola "positiva" si riferisce all'ultima proprietà in (10.112).

C 10.29 Una conseguenza immediata del lemma della partizione dell'unità è il seguente

Corollario 10.33 ("Lemma di Urysohn") Siano $D \subset U \subset \mathbb{R}^n$ con D compatto e U aperto. Allora esiste una funzione $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ a valori in $[0, 1]$ con supporto contenuto in U tale che $f(x) = 1$ per ogni $x \in D$.

Dimostrazione Per ogni $x \in D$, sia $B(x)$ una sfera centrata in x e la cui chiusura è contenuta in U . Allora $\{B(x) : x \in D\}$ è un ricoprimento di D e, se $\{f_j : 1 \leq j \leq N\}$ è una partizione dell'unità di D subordinata a tale ricoprimento, possiamo prendere $f \equiv \sum_{j=1}^N f_j$. ■

C 10.30 (Calcolo del volume della sfera euclidea in $\mathbb{R}^n$) Denotiamo con Ω_n il volume della sfera euclidea in $\mathbb{R}^n$ ovvero $\Omega_n \equiv m(B_1^n)$. Applicando la (10.41) a $f(x) \equiv e^{-|x|^2}$ con $r = 0$ e R arbitrario e mandando R ad infinito, ricordando (9.103), si trova

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = n\Omega_n \int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho^2} d\rho = \frac{n\Omega_n}{2} \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt \equiv \frac{n\Omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

dove $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ è la "funzione Γ di Eulero" (si veda 10.31), da cui

$$\Omega_n = \frac{2 \pi^{\frac{n}{2}}}{n \Gamma(n/2)}. \quad (10.113)$$

E 10.31 (La funzione Γ di Eulero) Sia $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$. Si dimostrino le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z), \quad (\forall z); & \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}; \\ \Gamma(n+1) &= n!, \quad (n \in \mathbb{N}); & \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \end{aligned}$$

Da queste relazioni e da (10.113) segue che il volume della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ è dato da

$$\Omega_n = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(n/2)!}, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n!!}, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

E 10.32 Siano

$$g : x \in A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow g(x) \in \mathbb{R}, \quad f : y \in B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow (f_1(y), \dots, f_n(y)) \in A,$$

funzioni C^1 sui rispettivi domini. Dimostrare che

$$d(g \circ f) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \circ f \right) df_i. \quad (10.114)$$

E 10.33 (i) Si trovino tutti i vettori $\xi \in \mathbb{R}^2$ tali che $\langle dx_1 + dx_2 \rangle(\xi) = 0$.

(ii) Sia $\omega^1 = \omega_F^1$ una 1-forma in $A \subset \mathbb{R}^n$ e si fissi $x_0 \in A$. Si dimostri che $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \omega_{F, x_0}^1(\xi) = 0\}$ è uno spazio vettoriale. Qual è la dimensione di tale spazio vettoriale?

(iii) Sia $F(x, y) \equiv (x, y)$. Si trovi una curva $\Gamma = \varphi((0, 1))$ in $\mathbb{R}^2$ tale che $\omega_{F, \varphi}^1(\varphi') = 0$ per ogni $t \in (0, 1)$.

E 10.34 Far vedere che $\omega = xdy + ydx$ è esatta in $\mathbb{R}^2$ e verificare direttamente che $\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_3} \omega$, dove Γ_1 è il segmento di estremi $(0, 0)$ e $(1, 1)$; Γ_2 è la poligonale di vertici (in ordine) $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$; Γ_3 è l'arco di circonferenza di raggio unitario, centro $(0, 1)$, estremi $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e lunghezza $\frac{\pi}{4}$ [e in tutti e tre i casi l'orientamento è quello corrispondente al verso che va da $(0, 0)$ a $(1, 1)$].

E 10.35 (i) Si dimostri che la forma ω^1 definita in (10.65) è chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e che vale (10.66). (ii) Si dimostri che ω^1 è esatta su un qualunque dominio della forma $\mathbb{R}^2 \setminus P$ con P una qualunque semiretta chiusa con estremo nell'origine.

E 10.36 Si dimostri (10.58).

E 10.37 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un dominio stellato che non contenga l'origine e sia f una funzione continua su $[0, \infty)$. Si dica se $\omega^1 \equiv f(|x|) \sum_{i=1}^n x_i dx_i$ è esatta su A ed in caso affermativo se ne calcoli una primitiva.

E 10.38* Sia $A \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e sia ω^1 una 1-forma chiusa su A . Dimostrare che se Γ è un cerchio centrato nell'origine e se $\int_{\Gamma} \omega^1 = 0$ allora ω^1 è esatta in A .

E 10.39 Sia T il triangolo in $\mathbb{R}^2$ con vertici in $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 0)$ e sia $\omega \equiv \sinh(x + y)dx + xdy$. Si calcoli

$$\int_{\partial T^+} \omega$$

sia direttamente che usando la formula di Green.

E 10.40 Si dimostri che una k -varietà regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$ con $k < n$ è un insieme di misura nulla.

E 10.41 Sia $\omega^1 = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$ definita su $A \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$.

(i) Dire se ω^1 è esatta su A ed in caso affermativo, calcolare la primitiva $U(x, y)$ tale che $U(0, e) = U(0, -e) = 1$. (ii) Calcolare $\int_{\Gamma} \omega^1$ dove $\Gamma \equiv \{(x, y) = e(\cos^{100} t, \sin^{100} t) : 0 \leq t \leq \pi/2\}$ orientata nel verso che va da $(e, 0)$ a $(0, e)$.

A Esercizi vari

E A.1 Verificare il Teorema della divergenza nel seguente caso: $f(x, y) = (1 + xy, x)$, $A = \{(x, y) : (x - 2)^2 + y^2 < 1, y > 0\}$.

E A.2 Sia

$$f(x, y) = \int_{2+\sin y^2}^4 \sinh(t^2 x + y) dt$$

- (a) Calcolare f_x e f_y ;
- (b) dimostrare che f non ha punti critici in $\mathbb{R}^2$;
- (c) determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f su $\mathbb{R}^2$.

E A.3 Calcolare $\int_S f d\sigma_3$, dove $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_i > 0 \forall i\}$ e $f(x) = x_4^2$.

E A.4 Sia $f(x) = \exp(\cos x)$. Trovare M tale che $|\hat{f}_n| \leq M/n^4$ ($\hat{f}_n = n$ -esimo coefficiente di Fourier).

E A.5 Sia

$$u_n(x) = \max\left(x^n, \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 1.$$

- (a) Discutere la convergenza della serie $\sum u_n$;
- (b) dimostrare che la serie $\sum u_n$ è continua ma non C^1 sul suo insieme di definizione.

E A.6 Per $x \in \mathbb{R}^n$, sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ma $f \notin C^1(\mathbb{R}^n)$ e discutere la differenziabilità di f ;
- (b) trovare un numero positivo δ per il quale se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < 1/100$, con x_0 tale che $|x_0| = 1$;
- (c) f è differenziabile nel punto $(\sqrt{2}, 1, 1, \dots, 1)$?

E A.7 Calcolare $\int_T x^3 y e^{-x^2} dx dy$ dove $T \equiv \{1 < xy < 2; x > 0\}$.

E A.8 (i) Calcolare $\frac{\partial}{\partial x_i} g(|x|)$ dove $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e g è una funzione $C^1((0, \infty))$. (ii) Sia $\omega \equiv 3 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|^2} dx_i$. Calcolare $\int_\Gamma \omega$ dove Γ è la curva $\{(1+t, t^2, \dots, t^n) : t \in [0, 1]\}$ nel verso che va da $(1, 0, \dots, 0)$ a $(2, 1, \dots, 1)$.

E A.9 (i) Si calcoli la serie di Taylor di $\log(s+t)$ nell'intorno di $(s_0, t_0) = (1, 0)$. (ii) Si calcoli la serie di Taylor di $\log(x - y^2)$ nell'intorno di $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

E A.10 Sia $u_n(x) \equiv \frac{1}{n^2} \int_1^{x^2} \exp(-nxt^4) dt$. Discutere la convergenza (puntuale, uniforme e totale) di $u(x) \equiv \sum_{n \geq 1} u_n(x)$ e di $v(x) \equiv \sum_{n \geq 1} u'_n(x)$ e dire per quali x la funzione $u(x)$ è derivabile e la sua derivata coincide con $v(x)$.

E A.11 Determinare l'estremo superiore ed inferiore (specificando se si tratta di massimi o minimi) della funzione $f(x, y) \equiv 1/(x^2 + y^2)$ sull'insieme $A \equiv \{(x, y) : xy + \frac{1}{2} \sin(xy) > 1\}$.

E A.12 Data una funzione f su $\mathbb{R}^n$ si definisca l'insieme $A \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 1\}$. Si diano esempi di funzioni $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ per cui $A \neq \emptyset$ e per le quali valga: (i) A è un rettangolo degenere; (ii) A è un rettangolo non degenere; (iii) A è un insieme di misura nulla che non sia un rettangolo; (iv) $\int_A f < 1$; (v) $\int_A f > 1$; (vi) $\int_A f = 1$.

E A.13 Sia $f : x \in \mathbb{R}^2 \rightarrow y \in \mathbb{R}^2$ data da $f(x) \equiv (x_1 + \sin(x_1 x_2), x_2 + \sin x_1^2)$. Si trovi una sfera $B_r(0) \equiv \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < r\}$ su cui sia definita e regolare la funzione inversa di f .

E A.14 Si calcoli $\int_S f d\sigma$ dove $S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cap \{x > 0\}$ e $f \equiv x^2 - 2yz^2$.

E A.15 Sia Γ la curva in $\mathbb{R}^3$ data dall'intersezione delle superfici $\{y = x^2\}$ e $\{z = x^3\}$ e limitata dai piani $\{x = 1\}$ e $\{x = 2\}$. Verificare che Γ è un elemento di curva regolare e calcolare $\int_\Gamma f ds$ con $f \equiv \log |z|/(1 + 4y + 9xz)^{\frac{1}{2}}$.

E A.16 Siano $A_1 \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < |x|, \text{ e } x^2 + y^2 < 4\}$, $A_2 \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $\omega \equiv -\frac{y+x}{x^2+y^2} dx + \frac{x-y}{x^2+y^2} dy$. (i) Dire se ω è esatta su A_1 e/o su A_2 . (ii) Sia Γ il quadrato di centro l'origine e lato 2 orientato in senso orario e si calcoli $\int_\Gamma \omega$.

E A.17 Sia $E \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x+y < 1\}$ e si calcoli l'integrale $\int_E e^{-|x-y|} \sin 2x dx dy$.

E A.18 Sia $\varphi(t) \equiv (1 + \sin t, \sin 2t)$. (i) Dimostrare che $\Gamma \equiv \{\varphi(t) : t \in [0, \pi]\}$ è una curva chiusa, semplice (cioè senza autointersezioni) e regolare a tratti. (ii) Calcolare, usando il teorema di Green, l'area racchiusa da Γ .

E A.19 Sia $A \equiv \{(x, y) \in (1, \infty) \times (0, \infty) : yx \leq 1\}$ e sia $A_k \equiv A \cap \{x \leq k\}$. (i) Dimostrare che A_k è misurabile per ogni k e dedurre che A è misurabile. (ii) Dire per quali α la funzione $x^\alpha \in \mathcal{L}^1(A)$.

E A.20 Per $\alpha \geq 1$ sia $f_\alpha \equiv e^{-\alpha x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$). (i) Dimostrare che $f_\alpha \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e calcolare $\int_{\mathbb{R}} f_\alpha$. (ii) Sia $u_k \equiv f_{2^k}$ per $k \geq 1$. Dimostrare che la serie $\sum u_k$ converge quasi ovunque ad una funzione $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e calcolare $\int_{\mathbb{R}} g$.

E A.21 Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}$ per: (i) $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i^2$; (ii) $f(x) = (x_1 + x_2^2, \cos(x_1, x_2))$; (iii) $f(x, y, z) = \frac{y}{z - x^2}$.

E A.22 Sia $f(x) \equiv e^{x_1^2 + x_2^2} + \sinh x_1$. Calcolare: (i) $\frac{\partial^\alpha f}{\alpha!}$ con $\alpha = (2, 3)$; (ii) f' ; (iii) f'' ; (iv) $\partial^2 f(0)$ (ξ)² con $\xi \equiv (1, 1)$.

E A.23 Sviluppare in serie di Taylor attorno a $x_0 = 0$ la funzione $|x| \operatorname{sen} |x|$, ($x \in \mathbb{R}^n$).

E A.24 Sia $x \in \mathbb{R} \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$ la funzione con supporto $[-1, 1]$ che vale $1 - |x|$ per $|x| \leq 1$; data una successione di numeri $c_k > 0$, sia $u_k(x) \equiv c_k u(x - 2k)$. (i) Dimostrare che la serie $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$; (ii) trovare una condizione sufficiente sui c_k affinché la serie $\sum u_k$ converga totalmente su $\mathbb{R}$; (iii) trovare una successione $\{c_k\}$ tale che $\sum u_k$ converga uniformemente su $\mathbb{R}$ ma non vi converga totalmente.

E A.25 Sia $f(x, y) \equiv 0$ se $x = 1$ e $f(x, y) \equiv ye^{-\left(\frac{y}{x-1}\right)^2}$ per $x \neq 1$. (i) Dimostrare che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\})$. (ii) Studiare la continuità e regolarità di f in $(1, 0)$. (iii) Studiare i punti critici di f . (iv) Trovare $\delta > 0$ tale che $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < 1/100$ per $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ con $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e (qualora f fosse continua in $(1, 0)$) con $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

E A.26 Si dimostri che non esiste alcuna $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che $\nabla f = (x \operatorname{sen} y, y \operatorname{sen} x)$.

E A.27 Si trovino i punti stazionari e si dica se si tratta di massimi o minimi (relativi o assoluti) di $f(x, y) = (x + 3y)e^{-xy}$.

E A.28 Dire se è continua la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

E A.29 Calcolare $\partial_x^\alpha f(x_0)$ e $\partial_x^p f(x_0)(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)})$, con $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^4$, $p = 3$, $\alpha = (2, 1)$, $x_0 = (1, -1)$, $\xi^{(1)} = (1, 0)$, $\xi^{(2)} = (2, 2)$, $\xi^{(3)} = (3, 1)$.

E A.30 Trovare i massimi e minimi di $F(x) = \int_0^1 \log(1 + x^2 + y^2) dy$.

E A.31 Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x, y) = x^2 y$ su $D \equiv \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

E A.32 Si consideri la funzione $f: y \in \mathbb{R}^2 \rightarrow f(y) = (f_1(y), f_2(y)) \in \mathbb{R}^2$ definita come

$$f_1 = y_1 + y_1^2 \cos y_2, \quad f_2 = y_2 + y_1^2.$$

Si dica se la funzione f è invertibile in un intorno di $y_0 = (0, 0)$ e se sì, si dia una stima di r_1 in modo tale che valga la condizione del teorema della funzione inversa.

E A.33 Fissato un numero naturale $N > 0$, si trovi un δ tale che $|f(x) - f(x_0)| < 10^{-N}$ per ogni $|x - x_0| < \delta$ nel seguente caso: $f = \log[\cos(\prod_{i=1}^n x_i)]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = 0$.

E A.34 Si trovi una soluzione particolare della seguente equazione differenziale

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = f(t), \quad f(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(4nt).$$

E A.35 Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\ddot{x}x^3 + 1 = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

E A.36 Si discuta l'insieme di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ e, si dimostri, in particolare, che la serie non converge totalmente su $\mathbb{R}$.

E A.37 Scrivere la serie di Fourier di $|\sin x|$ (su $[-\pi, \pi]$) e se ne discuta la convergenza.

E A.38 Sia $u = \sum_{k \geq 1} a_k x^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza positivo, con $a_1 \neq 0$, e si assuma che la funzione inversa di u , $v \equiv u^{-1}$ (che è tale che $v \circ u(x) = x$), sia anch'essa una serie di potenze con raggio di convergenza positivo. Calcolare i coefficienti dello sviluppo attorno a zero di v .

E A.39 Sia $f(x) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k^2} \sin(2^k x)$. Si dimostri che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma che f non è analitica in 0.

E A.40 Trovare il massimo e minimo di

$$f(x, y) \equiv \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad \text{su } D \equiv \{x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

E A.41 Risolvere, facendo uso degli esponenziali di matrici, il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} u' - u - 2v &= 0, \\ v' - u - 2v &= 0. \end{aligned}$$

E A.42 Si trovi la serie di Taylor di $x_2^4 + \sinh(x_1 + \dots + x_n)$.

E A.43 Calcolare $\int_D x^2 y^2 dx dy$ dove $D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

E A.44 Calcolare $\int_T \cos \frac{x-y}{x+y} dx dy$ dove T è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

E A.45 Si dimostri che l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ è un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^2$.

E A.46 Si determini la serie di Taylor in $x = 0$ di $(4 - x^2)^{-1/2}$ e se ne calcoli il raggio di convergenza.

E A.47 (i) Si discuta la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(\log n)^x}.$$

(ii) Si discuta la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ e se ne calcoli la somma.

E A.48 Si calcoli l'area della frontiera dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}.$$

E A.49 Si consideri, su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la 1-forma

$$\omega \equiv \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

(i) Dire se ω è chiusa. (ii) Calcolare l'integrale di ω su di una circonferenza orientata positivamente di raggio r e centrata nell'origine. (iii) Dire se ω è esatta e, in caso affermativo, se ne trovi una primitiva.

E A.50 Studiare la regolarità di

$$f = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{se } x = 0 \\ y, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

E A.51 Trovare un'immersione, nell'intorno di $x_0 = (1, 10, 2, 0)$, che realizzi $\{\phi = 0\}$ con $\phi(x) = x_1^2 + x_2^5(x_3 - 2) + \cos x_4 - 2$.

E A.52 Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 10 in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) \equiv \log(1 + x_1 x_2 x_3), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

E A.53 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^4 |x_i|^5 \right)^{\frac{1}{5}}$$

sul bordo sferico $\{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$.

E A.54 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & x &\in (0, 1), & t > 0, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & t &> 0, \\ u(x, 0) &= \sin^2 \pi x. \end{aligned}$$

E A.55 Si calcoli il seguente integrale

$$\int_D \frac{dx}{1 + x_1 + x_2 + x_3}, \quad D \equiv \{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\} \cap \{x : x_i \geq 0 \forall i\}.$$

E A.56 Sia $z = z(x, y)$ la funzione definita implicitamente dalle relazioni:

$$z^3 - 2xy + y = 0, \quad z(1, 1) = 1.$$

Si calcoli il polinomio di Taylor di grado 2 nell'intorno di $(1, 1)$.

E A.57 Si trovi l'espansione in serie di potenze $y = \sum_{n \geq 0} y_n x^n$ e se ne determini il raggio di convergenza della soluzione della seguente equazione differenziale:

$$(1 - x)y' = 1 + x - y, \quad y(0) = 0.$$

E A.58 Calcolare l'integrale

$$\int_D z \, dx \, dy \, dz ,$$

dove D è l'insieme compatto delimitato dalle superfici $z^2 = x^2 + y^2$ e $z = 1$.

E A.59 Si calcoli il seguente integrale

$$\int_D \frac{dx}{(1+|x|^2)^2} , \quad D \equiv [0, \infty) \times [0, \infty) .$$

E A.60 Si calcoli il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione y^x nell'intorno di $(1, 1)$.

E A.61 (i) Si discuta la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos \frac{x}{n} - \cos \frac{x}{2n} \right\} .$$

(ii) Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica di periodo 2π definita come segue nell'intervallo $[-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 1 , & \text{se } 0 \leq x < \pi . \end{cases}$$

E A.62 Si esprima un numero positivo $a > 0$ come prodotto di quattro numeri positivi con somma minima.

E A.63 Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ la cui frontiera $\partial\Omega$ sia una superficie regolare chiusa. Sapendo che il volume di Ω è 1, si calcoli il flusso (esterno) attraverso $\partial\Omega$ di $F(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}^3$).

E A.64 Si calcoli il seguente integrale

$$\int_D \log \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy , \quad D \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} .$$

E A.65 (i) Si dica quante funzioni continue $(x, y) \rightarrow z(x, y)$ soddisfano l'equazione

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$$

nell'intorno di $(x, y) = (0, 0)$. (ii) Si calcolino le derivate parziali delle funzioni di cui al punto (i) (sempre in un intorno dell'origine).

E A.66 Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$yy'' + y'^2 = y'^3 , \quad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 1 .$$

E A.67 (i) Si discuta la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{x^n} .$$

(ii) Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n!} .$$

E A.68 Trovare i massimi e i minimi (se esistono) della funzione $\exp(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{2} - y^2$ sull'insieme $\{x \geq 1\} \cap \{4x^2 + y^2 \leq 8\}$.

E A.69 (i) Si calcoli la norma $\|\cdot\|_{2,2}$ della matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. (ii) Si calcoli e^{At} (con $t \in \mathbb{R}$). (iii) Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^2$, si calcoli $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; x_0)$ dove $\varphi(t; x_0)$ denota la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$.

E A.70 Sia $u_n(x) \equiv \int_0^\infty e^{-t^2} \cos n(t-x) dt$. (i) Si studi la convergenza della serie $\sum u_n$. (ii) Si studi la regolarità della serie $\sum u_n$ sul suo insieme di definizione. (iii) Dire se $\sum u_n$ definisce una funzione periodica ed in caso affermativo se ne calcolino i coefficienti di Fourier.

E A.71 Sia $\omega^1 \equiv \frac{(x_1 + x_2|x|)dx_1 + (x_2 + x_1|x|)dx_2}{|x|}$, per $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. (i) Dire se ω^1 è chiusa. (ii) Calcolare $\int_\Gamma \omega^1$ dove Γ denota la circonferenza unitaria centrata nell'origine orientata in senso antiorario. (iii) Dire se ω^1 è esatta.

E A.72 Sia $f(x) \equiv \begin{cases} \frac{\log(1+|x|)}{|x|}, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$ (i) Discutere la regolarità di f in $x = 0$ (continuità, derivabilità etc.). (ii) Trovare $\delta > 0$ tale che $|f(x)| < 1/10$ per $|x| < \delta$.

E A.73 Sia $\omega^1 = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$ definita su $A \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$. (i) Dire se ω^1 è esatta su A ed in caso affermativo, calcolare la primitiva $U(x, y)$ tale che $U(0, e) = U(0, -e) = 1$. (ii) Calcolare $\int_\Gamma \omega^1$ dove $\Gamma \equiv \{(x, y) = e(\cos^{100} t, \sin^{100} t) : 0 \leq t \leq \pi/2\}$ orientata nel verso che va da $(e, 0)$ a $(0, e)$.

E A.74 Siano

$$s(t) \equiv \begin{cases} \sin(1/t), & \text{se } t \neq 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \end{cases} \quad c(t) \equiv \begin{cases} \cos(1/t), & \text{se } t \neq 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

e sia $f(x, y) = x^2 s(x) + y^2 c(y)$. Discutere la regolarità di f (continuità, differenziabilità, etc.).

E A.75 Sia $r > 0$, $S_r \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq r\}$ e Ω_r l'insieme limitato la cui frontiera è S_r . Calcolare i seguenti integrali

$$(i) \int_{S_r} x^2 z d\sigma, \quad (ii) \int_{\Omega_r} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz.$$

E A.76 Sia $x(t)$ una soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 3\dot{x} + x = |\sin t|$, calcolare $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

E A.77 Per $x \in \mathbb{R}^2$ sia $\|x\| \equiv \sqrt{\frac{x_1^2}{100} + x_2^2}$. (i) Dire se $\|\cdot\|$ definisce una norma su $\mathbb{R}^2$ ed in caso affermativo trovare due costanti positive a e b tali che $a|x|_\infty \leq \|x\| \leq b|x|_\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$. (ii) Calcolare il $\|\cdot\|$ -diametro del disco unitario $B^2 \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ovvero calcolare il $\sup_{x,y \in B_1^2} \|x - y\|$.

E A.78 Studiare la serie $u(t) \equiv \sum_{n \geq 1} \cos(n^4 t^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^{100} t} \right)$ indicando in particolare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme, totale; si studi, inoltre, la regolarità di u .

E A.79 Trovare la soluzione della seguente equazione differenziale:

$$u_t = 3u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=10}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k^2 x}{2^k}.$$

E A.80 Sia Γ la curva chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ delimitata da $\{y = x\}$ e $\{y = x^3\}$. (i) Usando le formule di Green si calcoli l'area delimitata da Γ . (ii) Sia $\omega \equiv \frac{ydx - (x+2)dy}{(x+2)^2 + y^2}$ e si calcoli $\int_{\Gamma^+} \omega$ dove Γ^+ è la curva Γ con l'orientamento antiorario. (iii) Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_{\Gamma} x^3 ds$.

E A.81 Siano $v^{(1)} \equiv (-10, 0, 2)$, $v^{(2)} \equiv (1, 1, 0)$ e $v^{(3)} \equiv (0, 0, 1)$ e sia $P \subset \mathbb{R}^3$ il parallelepipedo $\{x_1 v^{(1)} + x_2 v^{(2)} + x_3 v^{(3)} : 0 \leq x_i \leq 1\}$. Si calcolino il volume di P e l'integrale $\int_P y_1 y_2 dy$.

E A.82 Sia X_T lo spazio di Banach delle funzioni delle funzioni continue su $[-T, T]$ con norma uniforme $\|u\|_\infty \equiv \sup_{|t| \leq T} |u(t)|$ e sia $\Phi_a : X_T \rightarrow X_T$ definita come

$$(\Phi_a u)(t) \equiv a + t^2 + \int_0^t \operatorname{sen} u(s) ds.$$

(i) Trovare $T > 0$ tale che Φ_a sia una contrazione da X_T in se stesso. (ii) Quale equazione differenziale soddisfa il punto fisso di Φ_a ?

E A.83 Studiare la convergenza delle serie:

$$\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2^{nx}}{e^{x^n} - n}.$$

Se $u(x)$ denota il valore della prima serie si calcoli $u(\frac{1}{2})$.

E A.84 Sia $f(x, y) \equiv |x|^2 + y^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6y - 11$, $(x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R})$. (i) Quante soluzioni g di classe C^∞ nell'intorno del punto $(1, -2)$ esistono dell'equazione $f(x, g(x)) = 0$? (ii) Si verifichi che se $g(1, -2) > 0$ allora g ha un massimo relativo stretto in $(1, -2)$.

E A.85 Si calcoli il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 + 100z^2 \leq 1\}.$$

E A.86 Trovare il massimo ed il minimo della funzione $f(x, y) = \max\{x + y, 1\}$ sul disco chiuso (in $\mathbb{R}^2$) di raggio 1 e centrato nell'origine.

E A.87 Sia $f(x)$ la funzione dispari, periodica di periodo 2π che vale 1 per $0 < x \leq \pi/2$ e 2 per $\pi/2 < x < \pi$. (i) Si disegni il grafico di f per $x \in [-\pi, \pi]$ (si segnino chiaramente i valori di f in $k\pi$). (ii) Si calcolino, nella maniera più esplicita possibile, i coefficienti di Fourier di f . (iii) Si calcoli il valore della somma $\sum_{k \geq 1} (-1)^k / (2k + 1)$.

E A.88 Sia $S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = (2 + \cos u) \sin v, y = (2 + \cos u) \cos v, z = \sin u, (u, v) \in [0, 2\pi]^2\}$. Si dimostri che S è una superficie regolare e si calcoli $\int_S \operatorname{Arcsen} z \, d\sigma$ ($\operatorname{Arcsen} 0 = 0$).

E A.89 (i) Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità della funzione $f(x) \equiv x_1 |x|^\alpha$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $f(0) \equiv 0$. (ii) Sia $f(0) \equiv 0$ e per $x \in \mathbb{R}^2 \neq 0$ sia $f(x) = |x|^{2p} \sin |x|^{-1}$. Si dica per quali p f_{x_1} esiste ed è continua.

E A.90 Si discuta, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'esistenza e l'unicità delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 3y^{2/3} + \alpha, \quad y(0) = 0.$$

E A.91 Sia $A \equiv \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Si trovi $V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tale che

$$-\nabla V(x) = Ax, \quad V(0) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}^2).$$

E A.92 Si trovino il massimo ed il minimo della funzione $f(x, y) = xy$ sull'insieme $D \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y^2 \leq 3\}$.

E A.93 Sia $f(0, 0) = 0$ e, per $(x, y) \neq (0, 0)$, sia $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1} \sin(x^3 + y^3)$. Si studi la regolarità di f in $\mathbb{R}^2$ (continuità, differenziabilità, derivabilità, etc.)

E A.94 Sia $\Gamma \equiv \{(x, y, z) : x = \sin t - t \cos t + 5, y \equiv 0, z = t \sin t + \cos t - \frac{t^2}{2}, 0 < t < \frac{\pi}{2}\}$. (i) Si controlli che Γ è un elemento di curva regolare in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli la lunghezza. (ii) Si calcoli l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando Γ attorno all'asse delle z di un angolo pari a $\pi/2$.

E A.95 Sia

$$f(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha x/k} \frac{\cos k^2 x}{k^{100}}.$$

(i) Si studi la convergenza della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (convergenza puntuale, uniforme, totale). (ii) Si trovino i valori di α per cui f è $C^\infty(\mathbb{R})$. (iii) Per $\alpha = 0$ f è una funzione periodica e pari. Calcolare i primi cinque coefficienti di Fourier $a_0, \dots, a_4$.

E A.96 Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^3} x_1^2 x_3^2 e^{-|x|^2} dx.$$

E A.97 Si trovi la soluzione della seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned}u_{tt} - 2u_{xx} &= 0, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0; \\u(x, 0) &\equiv \sum_{k=1}^{100} k \operatorname{sen} k^2 x, & u_t(x, 0) &\equiv 0; \\u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & \forall t > 0.\end{aligned}$$

E A.98 Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_S (x^2 + y^2)^n d\sigma, \quad S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ e } 0 \leq z \leq 1\}.$$

E A.99 Sia $D \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq a\}$. (i) Facendo un opportuno cambiamento di variabili si trasformi D in un quadrato di uguale area, di lati paralleli agli assi coordinati e di centro l'origine. (ii) Si calcoli l'integrale di $x^2 y - |x| y^{20}$ sul dominio $A \equiv \{\sqrt{2} \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{2}\}$.

E A.100 Sia T il triangolo in $\mathbb{R}^2$ con vertici in $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 0)$ e sia $\omega \equiv \sinh(x + y)dx + xdy$. Si calcoli

$$\int_{\partial T^+} \omega$$

sia direttamente che usando la formula di Green.

E A.101 Per ogni n intero positivo sia

$$R_n \equiv \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + 2^{-n}\right] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$$

e sia $A \equiv \bigcup_{n \geq 1} R_n$. Dimostrare che A è misurabile secondo Peano-Jordan e calcolarne la misura.

E A.102 Si discutano i massimi e minimi relativi ed assoluti (qualora esistano) della funzione $f(x, y) = xy^2(x + y - 1)$ nel dominio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$.

E A.103 Trovare il valore massimo e quello minimo (qualora esistano) della somma degli spigoli di parallelepipedi rettangoli di volume unitario.

E A.104 Sia

$$f(x) \equiv \sum_{n \geq 1} \frac{(\operatorname{sen} nx)^2}{2^n}.$$

(i) Si verifichi che f è una funzione pari $C^\infty(\mathbb{R})$ periodica di periodo 2π . (ii) Si calcolino i coefficienti di Fourier di f e, usando la formula di Parseval, si calcoli il valore dell'integrale tra 0 e π di f^2 .

E A.105 Si trasformi il problema di Cauchy $\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$, $x(0) = -2$, $\dot{x}(0) = 1$, in un problema di Cauchy per una funzione vettoriale $u(t) \equiv (u_1(t), u_2(t))$ e si risolva quest'ultimo facendo uso di esponenziali di matrici.

E A.106 Sia $f(x, y) \equiv (\sin(x - y^2), x^4 + \tan y)$. Si enunci il teorema della funzione inversa, si dimostri che f è invertibile in un intorno di $(0, 0)$ e si trovi una sfera su cui è definita la funzione inversa.

E A.107 Discutere la convergenza (puntuale, totale e uniforme) delle seguenti serie di funzioni

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} e^{-nx}, (\alpha \in \mathbb{R}); \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{1}{n}}{2^n (x-1)^n}.$$

Si calcoli il limite per x che tende ad infinito della serie in (i).

E A.108 Calcolare il valore della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

E A.109 Sia $f(x) \equiv \sin(x_1 x_4^{100}) + \exp(|x|^2)$, $x \in \mathbb{R}^4$. Trovare un $\delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ allora $|f(x) - f(0)| < 1/100$.

E A.110 Si calcoli la serie di Taylor in un intorno di zero della funzione

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt.$$

E A.111 Sia $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tale che $f(x) = 0$ se $|x| > 1$ e $f(0) = 1$. Dimostrare che f non può essere analitica su tutto $\mathbb{R}$.

B Suggerimenti e soluzioni di alcuni esercizi

0.3: Considerare prima il caso in cui f sia positiva e, nel caso generale, si decomponga f come $f_+ - f_-$. **0.6** Su $E \equiv [a, 0) \cup (0, 1) \cup (1, b]$ con $-\infty < a < 0 < b < \infty$. **0.5** Per dimostrare che $\int f > 0$ si noti che f è pari e che $\sin x = (1 - \cos x)'$. **0.10** $f =$

$\sum_{k=1}^{\infty} k \chi_{I_k}$ con $I_k \equiv [k, k + 2^{-k}]$. **1.6:** Per dimostrare la convergenza uniforme, si dimostri

prima che gli intervalli I_n sono disgiunti. **1.8:** Si consideri f_n lineare a tratti che valga 0 al di fuori dell'intervallo $I_n \equiv (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$ e valga $2n$ nel punto di mezzo di I_n . **1.10:** Se $\alpha_p(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ allora $\alpha_p = x \alpha'_{p-1}$ [$\alpha_0 = 1/(x-1)$, $\alpha_1 = x/(1-x)^2$, ...]. **1.11:**

$2^N - N - 1$. **1.14:** Si noti che $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx - f(0) = \int_{a_n}^{b_n} \delta_n(x) [f(x) - f(0)] dx$. **1.15:** Dal

teorema fondamentale del calcolo segue che: $\left| \sum_{n=N}^M u_n(x) \right| \leq \left| \sum_{n=N}^M \int_{x_0}^x u'_n \right| + \left| \sum_{n=N}^M u_n(x_0) \right|;$

si usi ora il Teorema 1.5. **1.17:** $u_n \equiv \frac{x^n}{n!} + 1$. **1.23** (i): Si osservi che $\int_a^b u(x+t) dt = \int_{a+x}^{b+x} u(y) dy$ e si usi il teorema fondamentale del calcolo; (iii): si dimostri, usando il punto

(i), la seguente formula: $D_h u(x) = \int_0^1 u'(x+th)dt$, $D_h^p u(x) = \int_0^1 \left(\dots \int_0^1 \left(\int_0^1 u^{(p)}(x+h(t_1+\dots+t_p))dt_1 \dots \right) dt_p \right) dt_p$, e si giustifichi (per induzione) il passaggio al limite sotto segno di integrale. **2.4:** Poiché $x = v(y)$ è l'inversa di $y = u(x)$ si ha che $v \circ u(x) = x$. Quindi, essendo $u(0) = 0$, si ha $v(0) = 0$ ovvero $b_0 = 0$ ed inoltre $x = \sum_{n \geq 1} b_n u^n(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sum_{k \geq n} a_k^{(n)} x^k$, dove si è posto come al solito $u^n(x) = \sum_{k \geq n} a_k^{(n)} x^k$. Scambiando l'ordine delle sommatorie si ottiene $x = \sum_{k \geq 1} x^k \left(\sum_{n=1}^k b_n a_k^{(n)} \right)$. Osservando che $a_k^{(k)} = a_1^k$ ed eguagliando i coefficienti della relazione appena ottenuta si perviene a $b_1 a_1 = 1$ e, per $k \geq 2$, $\sum_{n=1}^k b_n a_k^{(n)} = 0$. Quindi

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_k = -\frac{1}{a_1^k} \sum_{n=1}^{k-1} b_n a_k^{(n)}, \quad (\forall k \geq 2). \quad (\text{B.1})$$

2.5: ricordando (2.6) si trova $a_k^{(n)} = \binom{k-1}{n-1}$. **2.7:** $u = (1-x)^{-1}$. **2.10** (i): Ricordando **1.25** ed osservando che $\frac{d}{dt} \frac{\gamma(t)^{k+1}}{k+1} = \gamma(t)^k$, si ha, per $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z_1$,

$$\int_{\gamma} z^k dz \equiv \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\gamma(t)^{k+1}}{k+1} dt = \frac{\gamma(b)^{k+1} - \gamma(a)^{k+1}}{k+1} = \frac{z_1^{k+1} - z_0^{k+1}}{k+1};$$

(ii): Si usi il punto (i) per far vedere che, nel caso di serie di potenze, le definizioni di integrale complesso date in **2.9** e **2.10** coincidono. **2.13:** Se fosse $e = p/q$, varrebbe (2.53) con $z = 1$ e con $N = q$, etc. **3.9:** Per $k \geq 2$ si ha $\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1}{2^k} \frac{(2k-3)!!}{k!}$ e $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{1}{2^k} \frac{(2k-1)!!}{k!}$. **3.1:** il "solo se" è facile; per dimostrare il "se" si dimostri che la seguente funzione $\tilde{f}$ definita da

$$\tilde{f} \equiv \begin{cases} f, & x \in [a, b], \\ \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a+)}{j!} (x-a)^j, & x < a, \\ \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(b-)}{j!} (x-b)^j, & x > b, \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

è una estensione C^k di f a tutto $\mathbb{R}$ ossia $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R})$ e $\tilde{f}(x) \equiv f(x)$ quando $x \in (a, b)$. **3.5:** Si dimostri prima che f non è analitica nei punti "diadici" (cioè nei punti della forma $p + h2^{-k}$ con p, h, k interi) osservando che le serie di Taylor di f in tali punti hanno tutte la stessa coda. **3.10:** il raggio di convergenza di $\sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$ è 1. **3.11** (ii): $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$; (iv): si noti che $x \coth x$ è una funzione pari. **3.13:** Si usi (1.13). **4.10** Si ricordi il punto (iv) dell'Osservazione 4.8. **4.11:** $\hat{f}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in \frac{2\pi}{T} x} dx$; $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in \frac{2\pi}{T} x}$; $\frac{1}{T} \int_0^T |f(x) - \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{in \frac{2\pi}{T} x}|^2 dx = \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx - \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}_n|^2$; $\widehat{f^{(k)}} = \left(in \frac{2\pi}{T}\right)^k \hat{f}_n$; $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 \left|\frac{2\pi}{T} n\right|^{2k} \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f^{(k)}(x)|^2 dx$. **5.17:** $\alpha|x|^{\alpha-2} x_i$. **5.5:** Supponiamo per assurdo che $A \subset \mathbb{R}^n$ sia un insieme non vuoto diverso da $\mathbb{R}^n$ e simultaneamente aperto e chiuso. Allora $\partial A = \emptyset$. D'altra parte sia $x_0 \in A$

e $x_1 \notin A$ e sia $L \equiv \{x = x(t) \equiv x_0 + t(x_1 - x_0) : 0 \leq t \leq 1\}$ il segmento chiuso di estremi x_0 e x_1 . Allora se $\bar{t} \equiv \sup\{t \geq 0 : x(\tau) \in A \text{ per ogni } 0 \leq \tau \leq t\}$ si ha che $x(\bar{t}) \in \partial A$ (contraddizione). **5.18:** Si dimostri (per induzione) che $6^k \leq (2k+1)!$ per ogni $k \geq 1$. **5.35:** Si dimostri prima che per ogni invasione di $\mathbb{N}^n$ A_j e per ogni j esistono $j_1 < j_2$ tali che $K_{j_1} \subset A_j \subset K_{j_2}$ dove K_j denota il cubo di interi $K_j \equiv \{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha|_\infty \leq j\}$. **5.37:** Poiché

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{|x^\alpha|}{\alpha!} = \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{|x_1|^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \right) \dots \left(\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{|x_n|^{\alpha_n}}{\alpha_n!} \right) = e^{|x_1|} \dots e^{|x_n|} = e^{|x_1| + \dots + |x_n|},$$

dalla Proposizione 5.36 segue che la serie converge assolutamente su $\mathbb{R}^n$ e che

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \exp(x_1 + \dots + x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{B.3})$$

5.39: Sia i_0 tale che $\limsup |a_{i_0}^{(k)}|^{\frac{1}{k}} = (\min R_i)^{-1}$. Allora: $R^{-1} = \limsup |a^{(k)}|^{\frac{1}{k}} = \limsup |a^{(k)}|_\infty^{\frac{1}{k}} = \limsup |a_{i_0}^{(k)}|^{\frac{1}{k}} = (\min R_i)^{-1}$. **5.42** (i): Supponendo (per assurdo) che x_0 sia un minimo locale, dalla continuità di f e dal fatto che $\inf f < f(x_0)$ segue che esiste un $x_1 \neq x_0$ tale che $f(x_0) = f(x_1)$ e quindi (Teorema di Rolle) esiste x_2 tra x_0 e x_1 (ma diverso da tali punti) per cui $f'(x_2) = 0$ contro l'ipotesi fatta; (ii): No, un controesempio, nel caso $n = 2$ è dato dalla funzione $f(x, y) = (e^{-x^2} + e^x)y^2(y^2 - 2) + e^{-x^2} - 1$ (soluzione proposta da L. Biasco). **7.13:** Triangolo equilatero. **5.53** (iii): $X \equiv C([0, 1], \mathbb{R})$ con distanza $d(f, g) \equiv \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$, $E \equiv \{x^k : k \in \mathbb{N}\}$. **5.60:** Si prenda $x = e^{(i)}$ e $y = e^{(j)}$. **5.62:** Si dimostrino prima i seguenti fatti: (1) due matrici A, B sono uguali se e solo se $Ax \cdot y = Bx \cdot y, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (si consideri il caso $x = e^{(i)}, y = e^{(j)}$); (2) se vale (5.169) allora U è invertibile (se non lo fosse esisterebbe un vettore non nullo v tale che $Uv = 0$, ma allora, per (5.169), si avrebbe...); (3) si dimostri che se U è ortogonale, $\det U = \pm 1$; (4) per dimostrare l'implicazione "(ii) $\implies$ (i)" si usi il fatto che

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2x \cdot y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n; \quad (\text{B.4})$$

per dimostrare l'equivalenza tra (iii) e (5.169) si ricordi che se chiamiamo $v^{(j)} \equiv Ue^{(j)}$, allora $[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}] = U$. **5.63** (ii): $U = [v, w]$ con v, w vettori ortonormali in $\mathbb{R}^2$ (cioè $|v| = |w| = 1$ e $v \cdot w = 0$). Il fatto che $|v| = 1$ significa che v appartiene al cerchio unitario S^1 e quindi esiste $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che $v = (\cos \theta, \sin \theta)$. Ora il vettore w deve essere ortogonale (e questo fissa due vettori opposti) e il fatto che il determinante deve essere 1 fissa univocamente la scelta di w in termine di v . **5.64** (i): Sia $R \equiv U^{(3)}(\theta_1)$ la rotazione attorno all'asse $e^{(3)}$ che porta il vettore $v \equiv Ue^{(3)}$ sul piano coordinato $\pi_{e^{(1)}, e^{(3)}} \equiv \{x_2 = 0\}$. Sia poi $S \equiv U^{(2)}(\theta_2)$ la rotazione attorno all'asse $e^{(2)}$ che porta il vettore Rv su $e^{(3)}$. Sia ora $T \equiv SRU$ e si dimostri che T è una rotazione attorno all'asse $e^{(3)}$. Da questo segue l'asserto. **6.1** (4): se $x^{(j)}$ denota la successione che ha tutti zeri tranne $x_j^{(j)} = 1, \ell^p$ contiene l'insieme $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$; (5) $\div$ (9): $C(I)$ contiene l'insieme $\{1, x, x^2, \dots\}$. **6.2** (ii): $u = \sum_{k \geq 1} k^{-2} (x/r)^k$ e $v = \sum_{k \geq 1} (x/r)^k$. **6.4:** Sia X uno spazio vettoriale (diciamo su $\mathbb{R}$) di dimensione n e si fissi una base $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$. Si consideri l'isomorfismo $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \sum x_i \xi^{(i)} \in X$. Se $\|\cdot\|_a$ è una norma su X si definisca, per $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|_a \equiv \|\varphi(x)\|_a$ e si dimostri che $|\cdot|_a$ è una norma su $\mathbb{R}^n$. **6.7** (i): Se v è un autovettore di A con autovalore λ , allora $\|A\| \geq |Av| |v|^{-1} = |\lambda|$; (ii): se λ_{i_0} è tale che $|\lambda_{i_0}| = \max |\lambda_i|$, considerare il versore $e^{(i_0)}$; (iii): $|Uv|^2 = Uv \cdot Uv = v \cdot U^T Uv = v \cdot v = |v|^2$; (iv): se A è reale e simmetrica può

essere diagonalizzata tramite una matrice ortogonale, si usino poi i punti precedenti. **6.12** (i): Sia $n = m = 1$ e $E = [-1, 1]$ e si prenda $f(x) = \sqrt{|x|}$; (ii): Sia f_k una successione di Cauchy in $(\text{Lip}(E, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\text{Lip}})$; allora f_k è di Cauchy in $(C(E, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\infty, E})$ e dunque esiste $f \in C(E, \mathbb{R}^n)$ tale che $\|f_k - f\|_{\infty, E} \rightarrow 0$; sia $M = \sup_k \|f_k\|_{\text{Lip}}$ che, essendo f_k di Cauchy, è un numero; allora, per ogni $x \neq y$, $M \geq \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{|x - y|} \rightarrow \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ e dunque $\|f\|_{\text{Lip}} < \infty$. **6.13** (i): Sia $n = m = 1$ e $E = [-1, 1]$ e si prenda $f(x) = |x|^\alpha$; (ii): la dimostrazione è uguale a quella per lo spazio $\text{Lip}(E, \mathbb{R}^n)$ in **6.12**. **6.22**: Se $f \in X$ allora $|f(x) - f(y)|/|x - y| < \|f\| |x - y|^{\alpha-1}$ e prendendo il limite per $x \rightarrow y$ (essendo $\alpha > 1$) si ottiene che $f' = 0$ su E . **6.24**: Sia $y = \frac{x}{|x|^\infty}$ cosicché (6.57) è equivalente a $\lim |y|_p = 1$ se $|y|_\infty = 1$; si dimostri, prima, che $|y|_p \geq 1$; per dimostrare l'uguaglianza si osservi prima che se $0 < a < 1$, $(1 + a^p)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$. **6.28**: $p < q \implies \ell^p \subsetneq \ell^q$. **6.34**: $\|A\| \leq 1$, infatti per ogni $f \in X$, $|(Af)(x)| \leq \|f\|_{\infty, [0, 1]} \int_0^1 e^{-(x-y)^2} dy \leq \|f\|_{\infty, [0, 1]}$. **6.35**: Esistono infiniti inversi destri dati da $T_a: x \equiv \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \rightarrow T_a x \equiv \{a, x_0, x_1, \dots\}$; $\|T_a\| = \max\{|a|, 1\}$. Su $Y \equiv \{x \in \ell^\infty : x_0 = 0\}$, S ha per inverso T_0 . **6.36**: $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$; infatti, poiché $A^2 = -I$ si ha che:

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(At)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k \geq 0} \frac{(At)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A.$$

6.39 (i): deriva dall'equivalenza delle norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_\infty$ [nella norma $\|\cdot\|_\infty$ l'esistenza del limite del rapporto incrementale $(A(t) - A(t_0))/(t - t_0)$ è equivalente all'esistenza di tutti i rapporti incrementali $(A_{ij}(t) - A_{ij}(t_0))/(t - t_0)$]; la matrice $(A(t) - A(t_0))/(t - t_0)$ ha per elementi di matrice $(A_{ij}(t) - A_{ij}(t_0))/(t - t_0)$; (ii): per il punto (i) si ha $((AB)')_{ij} = ((AB)_{ij})' = \sum_k (A_{ik} B_{kj})' = \sum_k A'_{ik} B_{kj} + \sum_k A_{ik} B'_{kj} = (A'B)_{ij} + (AB')_{ij}$; L'altra identità si dimostra allo stesso modo; (iii): poiché $AA^{-1} = I$ in un intorno di t_0 , derivando tale identità in t_0 (essendo la matrice identità costante si ha che $I' = 0$), dal punto (ii) segue che: $0 = (AA^{-1})' = A'A^{-1} + A(A^{-1})'$ ovvero la tesi; (iv): segue dalla definizione di derivata parziale. **6.37** (i): $\Lambda^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$; (ii): Se $v \in \mathbb{R}^n$ è un autovettore per $A \in \text{Mat}(n \times n)$ allora $A^2 v = \lambda^2 v$, etc. (iii): $(T^{-1}AT)^2 = T^{-1}A^2T$, etc. **7.2**: Si ricordi **3.3**. **7.6** (i): Si può prendere $\rho = (1/2)$ e $r = (1/\sqrt{2})$. **7.7**: Si il teorema è applicabile e si possono prendere $r = (\rho/8)$ e $\rho = (1/3)$. **7.8**: Si, f è invertibile in un intorno di $(0, 0)$ e tale intorno contiene la sfera chiusa di raggio ρ con $\rho = (1/8)$ [anche in questo caso basta verificare

$$\|I - T \frac{\partial f}{\partial y}(y)\|_\infty \leq \frac{1}{2n}, \quad \forall y \in Y_0, \quad (\text{B.5})$$

al posto di (7.22)]. **7.11**: Sia $n = 1$ e $\phi(x) = -x^2(x^2 - 1)$; allora $A_- = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $\partial A_- = \{-1, 1\}$, $E_0 = \{-1, 0, 1\}$. **7.15**: Cerchiamo il massimo ed il minimo (assoluti) di f su B^n . Poiché $f_{x_i} = \prod_{j \neq i} x_j$, si ha che se $\nabla f(x_0) = 0$ allora $f(x_0) = 0$ che chiaramente non è né un minimo né un massimo per f su B^n . Dunque il massimo e il minimo di f vengono assunti sulla frontiera di B^n che è S^{n-1} . Sia $F(x, \lambda) \equiv f(x) - \lambda \phi(x)$ con $\phi(x) = |x|^2 - 1$. I punti critici di F sono i punti di S^{n-1} tali che $f_{x_i} = \lambda \phi_{x_i}$ cioè $\prod_{j \neq i} x_j = 2\lambda x_i$, e moltiplicando tale relazione per x_i si ottiene $f(x) = 2\lambda x_i^2$ da cui $x_i^2 = x_j^2$ per ogni i e j (si noti che possiamo escludere $x_i = 0$ e anche $\lambda = 0$). Quindi $|x_i| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e quindi il massimo di f su B^n è $\frac{1}{n^{\frac{n}{2}}}$ ed il minimo è $-\frac{1}{n^{\frac{n}{2}}}$. **8.1**: Poiché $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, $|\sum_{k \geq 0} \frac{A^k u_0}{k!} t^k| \leq$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{|t|^k}{k!} |A^k u_0| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{|t|^k}{k!} \|A^k\| \|u_0\| = \|u_0\| e^{\|A\| |t|}. \quad \mathbf{8.9:} \quad e^A = \begin{pmatrix} \cosh xy & x \sinh xy \\ y \sinh xy & \cosh xy \end{pmatrix};$$

(si prenda $A \equiv \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sen} t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ e $b \equiv 0$ e si usino i punti (i) e (ii) qui sopra). **8.11** (i):

Si moltiplichi l'equazione differenziale per $\dot{x}(t)$. **8.12** (i): $\tau \rightarrow \varphi(t, \tau)$ è la soluzione di (8.66) con dati iniziali $u(\tau) = 0$ e $u'(\tau) = f(\tau)$. **8.17:** $\tilde{x}(t) \equiv x(t + T)$ soddisfa lo stesso problema di Cauchy di $x(t)$. **8.19** (i): Prendendo r e T_0 sufficientemente piccoli possiamo assumere che $c \equiv \sup_{D \times I} |f_x| T_0 < 1$. Sia $\varphi_0(t; x) \equiv x$, $\varphi_j(t; x) \equiv x + \int_{t_0}^t f(\varphi_{j-1}(\tau, x), \tau) d\tau$. Dall'ipotesi fatta segue che φ_j converge uniformemente su $D \times I$. Per induzione si dimostra che $\varphi_j \in C^1(D \times I)$. Sia $A_j \equiv \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$. Allora, su $D \times I$, si ha $\|A_j - A_{j-1}\| \leq c \|A_{j-1} - A_{j-2}\|$ e da questo segue che anche A_j converge uniformemente in $D \times I$. L'asserto segue ora dalla generalizzazione a più variabili del Teorema 1.11. **8.21:** Si cerchi u della forma $u = \sum_{n \geq 1} b_n(t) \operatorname{sen} n\pi x$. **8.24** (i): Si moltiplichi (8.72) per u_t e si integri per parti; (ii): se ce ne fossero due, u e v , si consideri la differenza $w \equiv u - v$ e se ne calcoli l'energia. **9.9** (vii): no. **9.22** (b): Ad ogni I_j^k si può associare (ed in un solo modo) una n -pla di 0 e 1 con $n = 2^k$; ad ogni punto di K si può associare (ed in un solo modo) una sequenza di 0 e 1. **9.23:** Se $I_x \equiv \{(x, y) \in [0, 1]^2 : 0 \leq y \leq 1\}$, $I^y \equiv \{(x, y) \in [0, 1]^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ e $\mathbb{Q}_1 \equiv \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ si può prendere $Q \equiv \bigcup_{x \in \mathbb{Q}_1} I_x \cup \bigcup_{x \in \mathbb{Q}_1} I^y$. **9.24:** $\int (\int f dx) dy = 1/2 = -\int (\int f dy) dx$; infatti $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ e $\int (\int |f| dx) dy = \infty$. **9.27:** $\int_A |f| = \int_A |f| \chi_{\{|f| \geq r\}} + \int_A |f| \chi_{\{|f| < r\}}$ e si usi **9.26**. **9.30:** $f \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=-k}^k (-1)^j 2^{|j|-1} \chi_{I_j}$ con $I_j \equiv (j-3^{-|j|}, j+3^{-|j|})$. **9.35:** $f_k \equiv 2^{k-1} \chi_{I_k}$ con $I_k \equiv (\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k}, \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k})$. **9.36:** $f_k(x) \equiv 0$ se $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ e se $0 < x = p/q$ con p e q interi positivi e primi tra loro e $p \leq q$, $f(x) \equiv k/q$, $f_k(0) \equiv k$. **9.37:**

$$\begin{aligned} \Delta(v^{(1)}, \dots, av^{(j)} + bw^{(j)}, \dots, v^{(n)}) &= (-1)^{j-1} \Delta(av^{(j)} + bw^{(j)}, \dots, v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \\ &= (-1)^{j-1} (a\Delta(v^{(j)}, \dots, v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) + b\Delta(w^{(j)}, \dots, v^{(1)}, \dots, v^{(n)})) \\ &= a\Delta(v^{(1)}, \dots, v^{(j)}, \dots, v^{(n)}) + b\Delta(v^{(1)}, \dots, w^{(j)}, \dots, v^{(n)}) . \end{aligned}$$

9.42 (i): $\frac{\partial F}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$. **9.43:** Si dimostrino, nell'ordine, le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx , \\ 2) \quad & \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{[-R, R]^2} e^{-|x|^2} dx \equiv \beta_R , \\ 3) \quad & \int_{B_R} e^{-|x|^2} dx < \beta_R < \int_{B_{\sqrt{2}R}} e^{-|x|^2} dx , \\ 4) \quad & \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{B_s} e^{-|x|^2} dx = \pi , \end{aligned}$$

qui, come al solito, $|x| \equiv |x|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $B_s \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < s\}$; per dimostrare 4) si usino le coordinate polari dell'esercizio **9.42**. **9.44** $I_{2k} = \sqrt{\pi} \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}$, $I_{2k+1} = \frac{k!}{2}$.

9.45: Si noti che se facciamo corrispondere a $x \in \mathbb{R}^2$ il numero complesso $x = x_1 + ix_2$, ($i = \sqrt{-1}$), la trasformazione $x \rightarrow \phi(x)$ non è altro che $z \rightarrow z^2$. 9.46: $\frac{\partial F}{\partial(\rho, \theta, \psi)} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \psi & -\rho \sin \theta \sin \psi & \rho \cos \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \psi & \rho \cos \theta \sin \psi & \rho \sin \theta \cos \psi \\ \cos \psi & 0 & -\rho \sin \psi \end{pmatrix}$, $\det \frac{\partial F}{\partial(\rho, \theta, \psi)} = -\rho^2 \sin \psi$. 9.48 (i): Si assuma $\alpha < 2\pi$ (il caso $\alpha = 2\pi$ si ottiene poi tramite limiti); (ii) l'insieme $E' \equiv \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \theta \leq \alpha \forall (\rho, z) \in E_0\}$ è normale e misurabile e $E = F(E')$ con F come in 9.47; (iii) $\text{Vol}(E) = \alpha \int_{E_0} \rho d\rho dz$. 9.49: $2\pi^2 r^2 R$. 10.14: Si prenda un numero arbitrariamente grande di rettangoli isosceli "paralleli" al piano $\{z = 0\}$. 10.17: $\text{Area}(\mathcal{S}) = \alpha \int_a^b u(t) \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2} dt$. 10.19: Se $\alpha \equiv R/r$, $\beta \equiv \sqrt{|\alpha^2 - 1|}$ si ha

$$2\pi Rr \left(\alpha + \frac{1}{\beta} \log(\alpha + \beta) \right) \text{ se } R > r,$$

$$2\pi Rr \left(\alpha + \frac{1}{\beta} \arcsen \beta \right) \text{ se } R < r.$$

10.20: $4\pi r^2 R$. 10.22: $-\text{Or} = \text{Or}(\bar{\varphi})$ con $\bar{\varphi}(v) \equiv \varphi(-v_1, v_2)$ sul dominio $\bar{V}$ con $V \equiv \{v \in \mathbb{R}^2 : v_1 = -u_1, v_2 = u_2\}$; si verifichi che in tal caso $v(u) = (-u_1, u_2)$. 10.27 (i): Se $\Gamma = z((a, b))$ è una curva in $\mathcal{S}$, $\phi(z(t)) \equiv 0$; (ii): i versori sono due e sono dati da

$$\nu = \pm \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}. \quad (\text{B.6})$$

10.33 (ii): La dimensione è $(n-1)$ essendo lo spazio in questione l'iperpiano $\pi_{F(x_0)}$. 10.38: (a) dimostrare che, se Γ_r denota il cerchio di centro l'origine e raggio r , dalle ipotesi segue che $\int_{\Gamma_r} \omega^1 = 0$ per ogni r ; (b) si definisca la seguente funzione $F(x) \equiv \int_{\Gamma(x)} \omega^1$ dove $\Gamma(x)$ è il segmento che unisce il punto $x_0 \equiv (1, 0)$ se $x \notin (-\infty, 0) \times \{x_2 = 0\}$ mentre se $x_2 = 0$ e $x_1 < 0$ $\Gamma(x)$ denota l'unione (orientata) del semicerchio superiore di centro l'origine e raggio 2 che va da $(0, 1)$ a $(-1, 0)$ e del segmento che unisce $(-1, 0)$ con x ; (c) far vedere che il valore di F non cambia se in (b) si prende il semicerchio inferiore nella costruzione di $\Gamma(x)$ per punti sull'asse negativo delle x_1 ; (d) far vedere che F è continua su A ; (e) far vedere che F è C^1 e concludere la tesi ricordando la dimostrazione della Proposizione 10.14.

Finito di stampare nel mese di settembre del 2011
dalla ERMES. Servizi Editoriali Integrati S.r.l.
00040 Ariccia (RM) – via Quarto Negroni, 15
per la Aracne editrice S.r.l. di Roma