# Soluzioni I Esonero - 20/12/2016
# Analisi Matematica 1 (canale Dam-K)

**1)** [6 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = xe^{\frac{x-1}{x+3}}$.

Dominio=$\{x \neq -3\}$ Segno di $f(x)$: $f > 0$ in $(0, +\infty)$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 0$

Asintoti orizz.i/obl.: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = e$, $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ex] = -\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4ex}{x+3} \frac{e^{-\frac{4}{x+3}} - 1}{-\frac{4}{x+3}} = -4e$

$f'(x) = e^{\frac{x-1}{x+3}} \frac{(x+1)(x+9)}{(x+3)^2}$ Segno di $f'(x)$: $f' > 0$ in $(-\infty, -9) \cup (-1, +\infty)$

**1)** [6 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = (x-3)e^{\frac{x-2}{x-1}}$.

Dominio=$\{x \neq 1\}$ Segno di $f(x)$: $f > 0$ in $(3, +\infty)$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$

Asintoti orizz./obl.: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = e$, $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - ex] = -3e - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ex}{x-1} \frac{e^{-\frac{1}{x-1}} - 1}{-\frac{1}{x-1}} = -4e$

$f'(x) = e^{\frac{x-2}{x-1}} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)^2}$ Segno di $f'(x)$: $f' > 0$ in $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

**2)** [4 punti] Determinare tutte le radici complesse dell'equazione $(z-i)^6 - 2(z-i)^3 + 4 = 0$.

Radici=$i + \sqrt[3]{2} e^{\pm i\frac{\pi}{9} + i\frac{2\pi k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$

**2)** [4 punti] Determinare tutte le radici complesse dell'equazione $(z+i)^8 - 2(z+i)^4 + 2 = 0$.

Radici=$-i + \sqrt[8]{2} e^{\pm i\frac{\pi}{16} + i\frac{\pi k}{2}}$, $k = 0, 1, 2, 3$

**3)** [4 punti] Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(x^2)\cos(\sqrt{2}x)}{(\sqrt{1+x^3} - 1)\tan x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(x^2)\cos(\sqrt{2}x)}{(\sqrt{1+x^3} - 1)\tan x} = \lim_{x\to 0} (\sqrt{1+x^3} + 1) \frac{x}{\tan x} \frac{e^{-x^2} - \cos(x^2)\cos(\sqrt{2}x)}{x^4}$$
$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(x^2)\cos(\sqrt{2}x)}{x^4}$$
$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6) - (1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8))(1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + O(x^6))}{x^4} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{6}x^4 + O(x^6)}{x^4} = \frac{5}{3}$$

**3)** [4 punti] Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2\cos^2 x}{(e^{1+2x^3}-1)\sin x}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2\cos^2 x}{(e^{1+2x^3}-1)\sin x} &= \frac{1}{e-1}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2) - x^2\cos^2 x}{\sin x}\\ &= \frac{1}{e-1}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2} - 2x\cos^2 x + 2x^2\sin x\cos x}{\cos x} = 0\end{aligned}$$

**4)** [4 punti] Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3^n}\left[\sqrt{(n!)^2+3^n} - \sqrt{(n!)^2+2^n}\right]$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3^n}\left[\sqrt{(n!)^2+3^n} - \sqrt{(n!)^2+2^n}\right] &= \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n}\frac{n!}{\sqrt{(n!)^2+3^n}+\sqrt{(n!)^2+2^n}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1-(\frac{2}{3})^n\right)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3^n}{(n!)^2}}+\sqrt{1+\frac{2^n}{(n!)^2}}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**4)** [4 punti] Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{n!}})^{(n!)(\sqrt{n!+2}-\sqrt{n!+1})}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{n!}})^{(n!)(\sqrt{n!+2}-\sqrt{n!+1})} &= \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{n!}})^{\frac{n!}{\sqrt{n!+2}+\sqrt{n!+1}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n!+2}+\sqrt{n!+1}}}\\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n!}}+\sqrt{1+\frac{1}{n!}}}} = \sqrt{e}\end{aligned}$$

**5)** [4 punti] Usando l'esercizio 1, determinare estremo superiore ed inferiore, discutendo se si tratta di un massimo o minimo, dell'insieme

$$A = \left\{xe^{\frac{x-1}{x+3}} \,:\, x > -3\right\} \cup \left\{(-1)^n\frac{n+1}{ne+1} \,:\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

$A = [-\frac{1}{e}, +\infty) \cup \{(-1)^n\frac{n+1}{ne+1}\} \Rightarrow \min A = -\frac{2}{e+1}$ $(n=1)$ e $\sup A = +\infty$ poiché $-\frac{2}{e+1} < -\frac{1}{e}$ e $-\frac{2}{e+1} \le (-1)^n\frac{n+1}{ne+1}$ per $n\in\mathbb{N}$, come segue da $\frac{2}{e+1} \ge \frac{n+1}{ne+1}$.

**5)** [4 punti] Usando l'esercizio 1, determinare estremo superiore ed inferiore, discutendo se si tratta di un massimo o minimo, dell'insieme

$$A = \left\{(x-3)e^{\frac{x-2}{x-1}} \,:\, x > 1\right\} \cup \left\{(-1)^n\frac{n+1}{n+3} - 2 \,:\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

$A = [-1, +\infty) \cup \{(-1)^n\frac{n+1}{n+3}\} \Rightarrow \inf A = -3$ e $\sup A = +\infty$ poiché:

- $-3 \le (-1)^n\frac{n+1}{n+3} - 2$ per $n\in\mathbb{N}$, come segue da $0 < \frac{n+1}{n+3} < 1$;
- dato $\epsilon > 0$ esiste $n$ dispari tale che $-3+\epsilon > (-1)^n\frac{n+1}{n+3} - 2 = -\frac{n+1}{n+3} - 2$, ossia $\epsilon > 1 - \frac{n+1}{n+3} = \frac{2}{n+3}$ (basta prendere $n > \frac{2}{\epsilon} - 3$).