Soluzioni II Appello - 15/6/2017
Analisi Matematica 1 (canale Dam-K)

1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x^2-x-3}$.

Dominio=$\{x \neq -1, \frac{3}{2}\}$ $\{f > 0\} = (-1, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ Intersezione assi: $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{3})$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to(-1)^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ Asintoti orizz.i/obl.: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = -\frac{4x^2-4x+7}{(2x^2-x-3)^2}$ Segno di $f'(x)$: $f' < 0$ sempre

1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-2x-24}$.

Dominio=$\{x \neq -4, 6\}$ $\{f > 0\} = (-4, 2) \cup (6, +\infty)$ Intersezione assi: $(2, 0)$, $(0, \frac{1}{12})$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to(-4)^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to 6^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ Asintoti orizz.i/obl.: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = -\frac{x^2-4x+28}{(x^2-2x-24)^2}$ Segno di $f'(x)$: $f' < 0$ sempre

2) Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x\sin x)+1-e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x\sin x)+1-e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1} = 2\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - \frac{x^2\sin^2 x}{2} + O(x^6) - x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)}{2x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{6} + O(x^6) - \frac{x^4}{2} + O(x^6) - x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)}{x^4} = -\frac{5}{6}$$

2) Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\sin x - x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + O(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - x + \frac{x^3}{2} + O(x^5)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

3) Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} x\left(-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x+1}{x+2} + \arctan(x+1)\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{\pi}{2}\frac{x+1}{x+2} + \arctan(x+1)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\boxed{\textbf{3)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}\frac{x+2}{x+1} - \arctan x}{\sin(\frac{1}{x})}.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}\frac{x+2}{x+1} - \arctan x}{\sin(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2+1}}{-\cos(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}} = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\boxed{\textbf{4)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(n!)}{1+\ln(n!)}\right)^{n^2 \ln n}.}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(n!)}{1+\ln(n!)}\right)^{n^2 \ln n} = \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{\ln(n!)})^{-n^2 \ln n} = \lim_{n\to+\infty} \left[(1 + \frac{1}{\ln(n!)})^{-\ln(n!)}\right]^{\frac{n^2 \ln n}{\ln(n!)}} = 0$$

poiché

$$(1 + \frac{1}{\ln(n!)})^{-\ln(n!)} \to \frac{1}{e}, \quad \frac{n^2 \ln n}{\ln(n!)} \geq \frac{n^2 \ln n}{n \ln n} = n \to +\infty$$

$$\boxed{\textbf{4)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \sqrt{\ln(n!)+2} - \sqrt{\ln(n!)+1}\right)^{\sqrt[4]{\ln n}}.}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \sqrt{\ln(n!)+2} - \sqrt{\ln(n!)+1}\right)^{\sqrt[4]{\ln n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\ln(n!)+2} + \sqrt{\ln(n!)+1}}\right)^{\sqrt[4]{\ln n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\ln(n!)+2} + \sqrt{\ln(n!)+1}}\right)^{\sqrt{\ln(n!)+2}+\sqrt{\ln(n!)+1}}\right]^{\frac{\sqrt[4]{\ln n}}{\sqrt{\ln(n!)+2}+\sqrt{\ln(n!)+1}}} = 1$$

poiché

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\ln(n!)+2} + \sqrt{\ln(n!)+1}}\right)^{\sqrt{\ln(n!)+2}+\sqrt{\ln(n!)+1}} \to e$$

$$\frac{\sqrt[4]{\ln n}}{\sqrt{\ln(n!)+2} + \sqrt{\ln(n!)+1}} \leq \frac{\sqrt[4]{\ln n}}{2\sqrt{\ln(n!)}} \leq \frac{\sqrt[4]{\ln n}}{2\sqrt{\ln n}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{\ln n}} \to 0$$

$\boxed{\textbf{5)}\ \text{Calcolare } \int \frac{dx}{5 - 3\cos x} dx.}$ Poniamo $t = \tan\frac{x}{2}$ ottenendo

$$\int \frac{dx}{5 - 3\cos x} dx = \int \frac{dt}{1 + 4t^2} = \frac{1}{2}\arctan(2t) + c = \frac{1}{2}\arctan(2\tan(\frac{x}{2})) + c$$

$\boxed{\textbf{5)}\ \text{Calcolare } \int \frac{dx}{5 + 3\cos x} dx.}$ Poniamo $t = \tan\frac{x}{2}$ ottenendo

$$\int \frac{dx}{5 + 3\cos x} dx = \int \frac{dt}{4 + t^2} = \frac{1}{2}\arctan(\frac{t}{2}) + c = \frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{2}\tan(\frac{x}{2})) + c$$

$\boxed{\textbf{6)}\text{ Calcolare } \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.}$ Poniamo $x^2 + x + 1 = (x + t)^2$, ossia $x = \frac{t^2-1}{1-2t}$ e $dx = 2\frac{t-t^2-1}{(1-2t)^2}dt$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{2}{t^2-1}dt = \int [\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}]dt = \ln|\frac{t-1}{t+1}| + c \\ &= \ln|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1}| + c \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{6)}\text{ Calcolare } \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+2x+1}}.}$ Poniamo $4x^2 + 2x + 1 = (2x + t)^2$, ossia $x = \frac{t^2-1}{2(1-2t)}$ e $dx = \frac{t-t^2-1}{(1-2t)^2}dt$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+2x+1}} &= \int \frac{2}{t^2-1}dt = \int [\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}]dt = \ln|\frac{t-1}{t+1}| + c \\ &= \ln|\frac{\sqrt{4x^2+2x+1}-2x-1}{\sqrt{4x^2+2x+1}-2x+1}| + c \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{7)}\text{ Discutere la convergenza semplice o assoluta della serie } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.}$ Converge assolutamente dal criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\sin n}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$\boxed{\textbf{7)}\text{ Discutere la convergenza semplice o assoluta della serie } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n^3}.}$ Converge assolutamente dal criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1-\cos n}{n^3}| \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$$