Soluzioni III Appello - 4/7/2017
Analisi Matematica 1 (canale Dam-K)

$\boxed{\textbf{1)}\ \text{Studiare il grafico della funzione } f(x) = \sqrt[3]{(x-2)(x-4)^2}.}$

Dominio=$\mathbb{R}$ $\{f > 0\} = (2, +\infty)$ Intersezione assi: $(2,0)$, $(4,0)$, $(0, -2\sqrt[3]{4})$

Asintoti verticali: no

Asintoti orizz.i/obl.: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-10x^2 + 32x - 32}{3x^2} = -\frac{10}{3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}(x-4)^{-\frac{1}{3}}(3x-8)$ Segno di $f'(x)$: $f' > 0$ in $(-\infty, \frac{8}{3}) \cup (4, +\infty)$

$\boxed{\textbf{1)}\ \text{Studiare il grafico della funzione } f(x) = \sqrt[3]{4(2x-1)(x-1)^2}.}$

Dominio=$\mathbb{R}$ $\{f > 0\} = (\frac{1}{2}, +\infty)$ Intersezione assi: $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1,0)$, $(0, -\sqrt[3]{4})$

Asintoti verticali: no

Asintoti orizz.i/obl.: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-20x^2 + 16x - 4}{12x^2} = -\frac{5}{3}$

$f'(x) = \frac{4}{3}2^{-\frac{1}{3}}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(3x-2)$ Segno di $f'(x)$: $f' > 0$ in $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (1, +\infty)$

$\boxed{\textbf{2)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{x\to 0} \frac{5^{1-\sin^2 x} - 5^{\cos(\sqrt{2}x)}}{(1-\cos x)^2}.}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^{1-\sin^2 x} - 5^{\cos(\sqrt{2}x)}}{(1-\cos x)^2} = 20 \lim_{x\to 0} \frac{5^{1-\sin^2 x - \cos(\sqrt{2}x)} - 1}{x^4} = 20 \lim_{x\to 0} \frac{5^{1-(x-\frac{x^3}{6}+O(x^5))^2 - 1 + x^2 - \frac{x^4}{6} + O(x^6)} - 1}{x^4}$$
$$= 20 \lim_{x\to 0} \frac{5^{1-x^2+\frac{x^4}{3}+O(x^6)-1+x^2-\frac{x^4}{6}+O(x^6)} - 1}{x^4} = 20 \lim_{x\to 0} \frac{5^{\frac{x^4}{6}+O(x^6)} - 1}{x^4} = \frac{10}{3} \lim_{x\to 0} \frac{5^{\frac{x^4}{6}+O(x^6)} - 1}{\frac{x^4}{6} + O(x^6)} = \frac{10}{3} \ln 5$$

$\boxed{\textbf{2)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{x\to+\infty} x - x^2 \ln(1 + \sin(\frac{1}{x})).}$

$$\lim_{x\to+\infty} x - x^2 \ln(1 + \sin(\frac{1}{x})) = \lim_{x\to+\infty} x - x^2[\sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}\sin^2(\frac{1}{x}) + O(\frac{1}{x^3})] = \frac{1}{2} + \lim_{x\to+\infty} x - x^2 \sin(\frac{1}{x})$$
$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to+\infty} x - x^2[\frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^3})] = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\textbf{3)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \tan x}.}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\textbf{3)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \ln(1+x)}.}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\textbf{4)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{n\to +\infty} \ln n \left[1 - \cos(\frac{1}{\ln(n!)})\right].}$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln n \left[1 - \cos(\frac{1}{\ln(n!)})\right] = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{[\ln(n!)]^2} \le \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{(\ln n)^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

$\boxed{\textbf{4)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{n\to +\infty} n^3 \sin(\frac{1}{\ln(n!)}) \left[e^{\frac{1}{\ln(n!)}} - 1\right].}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \sin(\frac{1}{\ln(n!)}) \left[e^{\frac{1}{\ln(n!)}} - 1\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{[\ln(n!)]^2} \ge \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^2(\ln n)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(\ln n)^2} = +\infty$$

$\boxed{\textbf{5)}\ \text{Calcolare } \int \frac{dx}{9-8\cos^2 x} dx.}$ Poniamo $t = \tan x$ ottenendo

$$\int \frac{dx}{9-8\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1+9t^2} dt = \frac{1}{3} \arctan(3t) + c = \frac{1}{3} \arctan(3\tan x) + c$$

$\boxed{\textbf{5)}\ \text{Calcolare } \int \frac{dx}{9-8\sin^2 x} dx.}$ Poniamo $t = \tan x$ ottenendo

$$\int \frac{dx}{9-8\sin^2 x} = \int \frac{dt}{9+t^2} dt = \frac{1}{3} \arctan(\frac{t}{3}) + c = \frac{1}{3} \arctan(\frac{\tan x}{3}) + c$$

$\boxed{\textbf{6)}\ \text{Calcolare } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.}$ Poniamo $x^2 + 3x - 4 = (x+t)^2$, ossia $x = \frac{4+t^2}{3-2t}$ e $dx = 2\frac{3t-t^2+4}{(3-2t)^2} dt$. Otteniamo che

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{2}{3-2t} dt = -\ln|2t-3| + c = -\ln|2\sqrt{x^2+3x-4} - 2x - 3| + c$$

$\boxed{\textbf{6)}\ \text{Calcolare } \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x-2}}.}$ Poniamo $2x^2 + 3x - 2 = 2(x+t)^2$, ossia $x = 2\frac{1+t^2}{3-4t}$ e $dx = 4\frac{3t-2t^2+2}{(3-4t)^2} dt$. Otteniamo che

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x-2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{3-4t} dt = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|4t-3| + c = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|2\sqrt{2}\sqrt{2x^2+3x-2} - 4x - 3| + c$$

$\boxed{\textbf{7)}\text{ Discutere la convergenza di } \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n}.}$ Diverge dal criterio del confronto:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$\boxed{\textbf{7)}\text{ Discutere la convergenza di } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right) \ln(n!).}$ Dal criterio del confronto asintotico la serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^3}$ che converge dal criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n}}{n^2} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty$$