Soluzioni IV Appello - 21/9/2017
Analisi Matematica 1 (canale Dam-K)

1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x}{x+1}$.

Dominio=$\{x \neq -1\}$ $\{f > 0\} = (-1, 0) \cup (8, +\infty)$ Intersezione assi: $(0, 0)$, $(8, 0)$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \pm\infty$

Asintoti orizz.i/obl.: $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{-9x}{x+1} = -9$

$f'(x) = \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$ Segno di $f'(x)$: $f' > 0$ in $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x+2}$.

Dominio=$\{x \neq -2\}$ $\{f > 0\} = (-2, 0) \cup (6, +\infty)$ Intersezione assi: $(0, 0)$, $(6, 0)$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to -2^\pm} f(x) = \pm\infty$

Asintoti orizz.i/obl.: $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{-8x}{x+2} = -8$

$f'(x) = \frac{x^2+4x-12}{(x+2)^2}$ Segno di $f'(x)$: $f' > 0$ in $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$

2) Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\log(\cos x) + 2\log(e^{x^2} - x^2) + x^2}{x^3 \sin x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(\cos x) + 2\log(e^{x^2} - x^2) + x^2}{x^3 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\log(\cos x) + 2\log(e^{x^2} - x^2) + x^2}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\log[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)] + 2\log[1 + \frac{x^4}{2} + O(x^6)] + x^2}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + \frac{x^4}{12} - \frac{x^4}{4} + O(x^6) + x^4 + x^2}{x^4} = \frac{5}{6}$$

2) Calcolare il limite $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\tan\frac{1}{x}}{2x - 2x^2\log(\frac{x+1}{x}) - 1}$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\tan\frac{1}{x}}{2x - 2x^2\log(\frac{x+1}{x}) - 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x^2 - 2x^3\log(1 + \frac{1}{x}) - x}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x^2 - 2x^3[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + O(\frac{1}{x^4})] - x}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x^2 - 2x^2 + x - \frac{2}{3} + O(\frac{1}{x}) - x} = -\frac{3}{2}$$

3) Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin[\log(1+2x)] - e^{2x} + 1}{\tan(x^2)}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin[\log(1+2x)] - e^{2x} + 1}{\tan(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin[\log(1+2x)] - e^{2x} + 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+2x}\cos[\log(1+2x)] - 2e^{2x}}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos[\log(1+2x)] - (1+2x)e^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0}[-\frac{2}{1+2x}\sin[\log(1+2x)] - 4(1+x)e^{2x}] = -4$$

3) Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - e^{\frac{x}{2}} + x^2}{1-\cos(3x)}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - e^{\frac{x}{2}} + x^2}{1-\cos(3x)} = \frac{2}{9}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - e^{\frac{x}{2}} + x^2}{x^2} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}{2x}$$
$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{18}\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{-\frac{3}{4}} - e^{\frac{x}{2}}}{x} = \frac{2}{9} + \frac{1}{18}\lim_{x\to 0}[-\frac{3}{2}(1+2x)^{-\frac{7}{4}} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}] = \frac{1}{9}$$

4) Calcolare il limite $\lim_{n\to +\infty} \frac{\sin^2(\frac{n!}{n^n})}{1-\cos[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}]}$.

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{\sin^2(\frac{n!}{n^n})}{1-\cos[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}]} = 2\lim_{n\to +\infty} \frac{(n!)^2(n+1)^{2n+2}}{[(n+1)!]^2 n^{2n}} = 2\lim_{n\to +\infty}(1+\frac{1}{n})^{2n} = 2e^2$$

4) Calcolare il limite $\lim_{n\to +\infty} \frac{[e^{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} - 1]^2}{\log[1+(\frac{n!}{n^n})^2]}$.

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{[e^{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} - 1]^2}{\log[1+(\frac{n!}{n^n})^2]} = \lim_{n\to +\infty} \frac{[(n+1)!]^2 n^{2n}}{(n!)^2(n+1)^{2n+2}} = \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}} = e^{-2}$$

5) Calcolare $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$. Poniamo $t = \tan\frac{x}{2}$ ottenendo

$$\int \frac{dx}{4-5\sin x} = \int \frac{dt}{2t^2-5t+2} = \frac{1}{3}\int [\frac{1}{t-2} - \frac{2}{2t-1}]dt = \frac{1}{3}\log|\frac{\tan\frac{x}{2}-2}{2\tan\frac{x}{2}-1}| + c$$

5) Calcolare $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$. Poniamo $t = \tan x$ ottenendo

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{t^2}{(t^2+2)(t^2+1)}dt = \int [\frac{2}{t^2+2} - \frac{1}{t^2+1}]dt = \sqrt{2}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}) - x + c$$

6) Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}-x}$. Poniamo $\sqrt{x^2-1} = x+t$, ossia $x = -\frac{t^2+1}{2t}$ e $dx = -\frac{t^2-1}{2t^2}dt$.
Otteniamo che

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}-x} = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2-1}{t^3}dt = -\frac{1}{2}\log|\sqrt{x^2-1}-x| - \frac{1}{4}\frac{1}{2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}} + c$$

6) Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x}}$. Poniamo $\sqrt{x^2+2x} = x+t$, ossia $x = \frac{t^2}{2(1-t)}$ e $dx = \frac{2t-t^2}{2(1-t)^2}dt$.
Otteniamo che

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x}} = 2\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+2x}-x} + c$$

7) Discutere la convergenza di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}]$. Converge dal criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2} < +\infty$$

7) Discutere la convergenza di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}}{n^2}$. Converge dal criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2[\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}]} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$$