Soluzioni I Esonero - 22/12/2017
Analisi Matematica 1 (canale Fi-K)

$\boxed{\textbf{1)}\ \text{Studiare il grafico della funzione } f(x) = \dfrac{x^2}{\ln|x| - 1}.}$

Dominio=$\{x \neq 0, \pm e\}$ $\{f > 0\} = \{|x| > e\}$ Intersezione assi: no

Asintoti verticali: $\lim_{x \to -e^{\pm}} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x \to e^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ Asintoti orizz./obliqui: no

$f'(x) = \frac{x(2\ln|x|-3)}{(\ln|x|-1)^2}$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = (-e^{\frac{3}{2}}, -e) \cup (-e, 0) \cup (e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$

$\boxed{\textbf{1)}\ \text{Studiare il grafico della funzione } f(x) = \sqrt[3]{(x-3)(x-6)^2}.}$

Dominio=$\mathbb{R}$ $\{f > 0\} = (3, 6) \cup (6, +\infty)$

Intersezione assi: $(0, -3\sqrt[3]{4})$, $(3, 0)$, $(6, 0)$ Asintoti verticali: no

Asintoti orizz./obliqui: $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{(x-3)(x-6)^2 - x^3}{3x^2} = -5$

$f'(x) = \frac{(x-6)(x-4)}{(x-3)^{\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{4}{3}}}$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = (-\infty, 3) \cup (3, 4) \cup (6, +\infty)$

$\boxed{\textbf{2)}\ \text{Determinare tutte le radici complesse dell'equazione } (\tfrac{z+1}{4z^2-4z+1})^2 = \tfrac{2i}{\sqrt{3}+i}.}$

Risolvendo $z + 1 = \pm e^{i\frac{\pi}{6}}(4z^2 - 4z + 1)$ si ottengono le radici

$$z_+ = \frac{1 \pm 4e^{i\frac{\pi}{6}} + \sqrt{1 \pm 24e^{i\frac{\pi}{6}}}}{\pm 8e^{i\frac{\pi}{6}}}, \quad z_- = \frac{1 \pm 4e^{i\frac{\pi}{6}} - \sqrt{1 \pm 24e^{i\frac{\pi}{6}}}}{\pm 8e^{i\frac{\pi}{6}}}.$$

$\boxed{\textbf{2)}\ \text{Determinare tutte le radici complesse dell'equazione } (\tfrac{z+i}{4z^2-4iz-1})^2 = \tfrac{2i}{1+\sqrt{3}i}.}$

Risolvendo $z + i = \pm e^{i\frac{\pi}{12}}(4z^2 - 4iz - 1)$ si ottengono le radici

$$z_+ = \frac{1 \pm 4ie^{i\frac{\pi}{12}} + \sqrt{1 \pm 24ie^{i\frac{\pi}{12}}}}{\pm 8e^{i\frac{\pi}{12}}}, \quad z_- = \frac{1 \pm 4ie^{i\frac{\pi}{12}} - \sqrt{1 \pm 24ie^{i\frac{\pi}{12}}}}{\pm 8e^{i\frac{\pi}{12}}}.$$

$\boxed{\textbf{3)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{\ln(1+x) - x}.}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x)-x} &= -\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+\sin x}{x}(1+x) = -\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+\sin x}{x}\\ &= -\lim_{x\to 0}(2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}+\cos x) = -3\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{3)}\text{ Calcolare il limite } \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{\sqrt{1+x^2}-1}.}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{\sqrt{1+x^2}-1} = 2\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}(e^x+\sin x) = 1$$

$\boxed{\textbf{4)}\text{ Calcolare il limite } \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{\ln n}{n^2})^{n(\sqrt{\ln^2(n!)+2}-\sqrt{\ln^2(n!)+1})}.}$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{\ln n}{n^2})^{n(\sqrt{\ln^2(n!)+2}-\sqrt{\ln^2(n!)+1})} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{\ln n}{n^2})^{\frac{n}{\sqrt{\ln^2(n!)+2}+\sqrt{\ln^2(n!)+1}}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}[(1+\frac{\ln n}{n^2})^{\frac{n^2}{\ln n}}]^{\frac{\ln n}{n(\sqrt{\ln^2(n!)+2}+\sqrt{\ln^2(n!)+1})}} = 1\end{aligned}$$

poiché $0 \le \frac{\ln n}{n(\sqrt{\ln^2(n!)+2}+\sqrt{\ln^2(n!)+1})} \le \frac{1}{2n} \to 0$.

$\boxed{\textbf{4)}\text{ [5 punti] Calcolare il limite } \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^3(\sqrt{\ln^2(n!)+4}-\sqrt{\ln^2(n!)+2})}.}$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^3(\sqrt{\ln^2(n!)+4}-\sqrt{\ln^2(n!)+2})} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{\frac{2n^3}{\sqrt{\ln^2(n!)+4}+\sqrt{\ln^2(n!)+2}}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}[(1+\frac{1}{n})^n]^{\frac{2n^2}{\sqrt{\ln^2(n!)+4}+\sqrt{\ln^2(n!)+2}}} = +\infty\end{aligned}$$

poiché $\frac{2n^2}{\sqrt{\ln^2(n!)+4}+\sqrt{\ln^2(n!)+2}} \ge \frac{n^2}{2\ln(n!)} \ge \frac{n}{2\ln n} \to +\infty$.