Soluzioni II Appello - 18/06/2018
Analisi Matematica 1 (canale Fi-K)

$\boxed{\textbf{1)}\ \text{Studiare il grafico della funzione } f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}.}$

Dominio=$\{x \neq \pm 1\}$ $\{f > 0\} = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ Intersezione assi: $(0, 0)$

Asintoti verticali: $\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \mp\infty$

Asintoti orizz./obliqui: $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{1-x^2} = 0$

$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \setminus \{\pm 1, 0\}$

$\boxed{\textbf{2)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{x \to 1} (1-x) \tan(\frac{\pi}{2} x).}$

Dal teorema di L'Hôpital abbiamo che

$$\lim_{x \to 0} (1-x) \tan(\frac{\pi}{2} x) = \lim_{x \to 0} \frac{\tan(\frac{\pi}{2} x)}{\frac{1}{1-x}} = \frac{\pi}{2} [\lim_{x \to 0} \frac{1-x}{\cos(\frac{\pi}{2} x)}]^2 = \frac{\pi}{2} [\frac{2}{\pi} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} x)}]^2 = \frac{2}{\pi}.$$

$\boxed{\textbf{3)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{n \to +\infty} \dfrac{n \sin(n!)}{n^2+1}.}$

Da $|\sin(n!)| \leq 1$ otteniamo che

$$\lim_{n \to +\infty} |\frac{n \sin(n!)}{n^2+1}| \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+1} \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n \sin(n!)}{n^2+1} = 0.$$

$\boxed{\textbf{4)}\ \text{Calcolare } \displaystyle\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x} dx.}$

Ponendo $t = \tan x$ abbiamo che

$$\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x} dx = \int \frac{1+t}{(1-t)(1+t^2)} dt = \int [\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{1-t}] dt$$
$$= \frac{1}{2} \log(1+\tan^2 x) - \log|\tan x - 1| = -\log|\sin x - \cos x|.$$

$\boxed{\textbf{5)}\ \text{Calcolare} \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.}$

Ponendo $x^2+x+1=(x+t)^2$, ossia $x=\frac{t^2-1}{1-2t}$ e $dx=\frac{2(t-t^2-1)}{(1-2t)^2}dt$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{2}{t^2-1}dt = \int [\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}]dt = \log|\frac{t-1}{t+1}|\Big|_{t=\sqrt{x^2+x+1}-x} \\ &= \log|\frac{x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}|.\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{6)}\ \text{Discutere la convergenza di} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.}$

La serie converge dal criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{n+1}(\frac{n}{n+1})^{n+1}=\frac{n+2}{n+1}[(1+\frac{1}{n})^n]^{-\frac{n+1}{n}}\to e^{-1}<1.$$