Soluzioni II Esonero-I Appello - 23/1/2018
Analisi Matematica 1 (canale Fi-K)

$\boxed{\textbf{1)} \text{ Studiare il grafico della funzione } f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}e^x.}$

Dominio=$\{x \neq \frac{1}{2}\}$ $\{f > 0\} = \{|x| > \frac{1}{2}\}$ Intersezione assi: $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, -1)$

Asintoti verticali: $\lim_{x \to \frac{1}{2}^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

Asintoti orizz./obliqui: $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = e^x \frac{4x^2-5}{(2x-1)^2}$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = \{|x| > \frac{\sqrt{5}}{2}\}$

$\boxed{\textbf{1)} \text{ Studiare il grafico della funzione } f(x) = xe^{\frac{3x+1}{3x-1}}.}$

Dominio=$\{x \neq \frac{1}{3}\}$ $\{f > 0\} = (0, +\infty)$ Intersezione assi: $(0, 0)$

Asintoti verticali: $\lim_{x \to \frac{1}{3}^{+}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \frac{1}{3}^{-}} f(x) = 0$

Asintoti orizz./obliqui: $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = e$, $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ex] = e \lim_{x \to \pm\infty} x[e^{\frac{2}{3x-1}} - 1] = \dfrac{2}{3}e$

$f'(x) = e^{\frac{3x+1}{3x-1}} \frac{9x^2-12x+1}{(3x-1)2}$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = (-\infty, \frac{2-\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{2+\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

$\boxed{\textbf{2)} \text{ Calcolare il limite } \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x \ln(1+x) - x^2}{\sqrt{1+x^3} - 1}.}$

Dagli sviluppi di Taylor abbiamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \ln(1+x) - x^2}{\sqrt{1+x^3} - 1} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \ln(1+x) - x^2}{x^3} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{(x + O(x^3))(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)) - x^2}{x^3} = -1$$

$\boxed{\textbf{2)} \text{ Calcolare il limite } \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)}.}$

Dagli sviluppi di Taylor abbiamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))^2}{x^3(1 + x + O(x^2) - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{3} + O(x^5)}{x^4 + O(x^5)} = \frac{1}{3}$$

3) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{\sqrt{n^2+\ln(n!)}-\sqrt{n^2+1}}{n(\ln n)^2}\right)$.

Da $\ln(n!) \leq n\ln n << n^2$, $n(\ln n)^2$ otteniamo tramite razionalizzazione che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+\ln(n!)}-\sqrt{n^2+1}}{n(\ln n)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)-1}{n(\ln n)^2(\sqrt{n^2+\ln(n!)}+\sqrt{n^2+1})} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)-1}{n^2(\ln n)^2} = 0,$$

e quindi dal limite notevole del seno abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{\sqrt{n^2+\ln(n!)}-\sqrt{n^2+1}}{n(\ln n)^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)-1}{n(\ln n)^2} = 0.$$

3) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{\ln(n!)})^{n(\sqrt{n^2+\ln(n!)}-\sqrt{n^2+4})}$.

Da $\ln(n!) \leq n\ln n << n^2$ otteniamo tramite razionalizzazione che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{n(\sqrt{n^2+\ln(n!)}-\sqrt{n^2+4})}{\ln(n!)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(\ln(n!)-4)}{\ln(n!)(\sqrt{n^2+\ln(n!)}+\sqrt{n^2+4})}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+\ln(n!)}+\sqrt{n^2+4}} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

e quindi dal limite notevole dell'esponenziale abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{\ln(n!)})^{n(\sqrt{n^2+\ln(n!)}-\sqrt{n^2+4})} = \lim_{n\to+\infty} \left[(1+\frac{1}{\ln(n!)})^{\ln(n!)}\right]^{\frac{n(\sqrt{n^2+\ln(n!)}-\sqrt{n^2+4})}{\ln(n!)}} = \sqrt{e}.$$

4) Calcolare $\int \frac{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}{\cos x \sin^3 x + \cos^4 x}dx$.

Ponendo $t = \tan x$ abbiamo che

$$\begin{aligned}&\int \frac{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}{\cos x \sin^3 x + \cos^4 x}dx = \int \frac{t^2+3t-1}{t^3+1}dt = \int [\frac{2t}{t^2-t+1} - \frac{1}{t+1}]dt\\ &= \int [\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{4}{3}\frac{1}{(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})^2+1} - \frac{1}{t+1}]dt = \ln\frac{|\tan^2 x - \tan x + 1|}{|\tan x + 1|} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}})\end{aligned}$$

poiché $t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$.

4) Calcolare $\int \frac{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x}{\cos x \sin^3 x - \cos^4 x}dx$.

Ponendo $t = \tan x$ abbiamo che

$$\begin{aligned}&\int \frac{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x}{\cos x \sin^3 x - \cos^4 x}dx = \int \frac{2t^2-4t-1}{t^3-1}dt = \int [\frac{3t}{t^2+t+1} - \frac{1}{t-1}]dt\\ &= \int [\frac{3}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+1} - 2\frac{1}{(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2+1} - \frac{1}{t-1}]dt = \frac{1}{2}\ln\frac{|\tan^2 x + \tan x + 1|^3}{(\tan x - 1)^2} - \sqrt{3}\arctan\frac{2\tan x + 1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

poiché $t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)$.

$\boxed{\textbf{5)}\ \text{Calcolare} \displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.}$

Ponendo $x^2-2=(x+t)^2$, ossia $x=-\frac{2+t^2}{2t}$ e $dx=\frac{2-t^2}{2t^2}dt$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} &= 2\int \frac{dt}{t^2+2t+2} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = 2\arctan(t+1)\Big|_{t=\sqrt{x^2-2}-x} \\ &= 2\arctan(\sqrt{x^2-2}-x+1).\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5)}\ \text{Calcolare} \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.}$

Ponendo $x^2+2x+5=(x+t)^2$, ossia $x=\frac{t^2-5}{2(1-t)}$ e $dx=\frac{2t-t^2-5}{2(1-t)^2}dt$, abbiamo che

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = -\int \frac{dt}{t-1} = -\ln|t-1|\Big|_{t=\sqrt{x^2+2x+5}-x} = -\ln|\sqrt{x^2+2x+5}-x-1|.$$

$\boxed{\textbf{6)}\ \text{Discutere la convergenza di} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\cos(\frac{1}{n\ln^2 n})\right)\ln n\ln(n!).}$

Da $\ln(n!)\le n\ln n$ e dal limite del coseno abbiamo che

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{[1-\cos(\frac{1}{n\ln^2 n})]\ln n\ln(n!)}{\frac{1}{n\ln^2 n}} = \frac{1}{2}\limsup_{n\to+\infty}\frac{\ln n\ln(n!)}{n\ln^2 n}\le\frac{1}{2}.$$

Poiché $\displaystyle\sum_{n=2}\frac{1}{n\ln^2 n}<+\infty$, dal criterio del confronto asintotico otteniamo che

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\cos(\frac{1}{n\ln^2 n})\right)\ln n\ln(n!)<+\infty.$$

$\boxed{\textbf{6)}\ \text{Discutere la convergenza di} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n^2\ln^2 n}}-1)\ln(n!).}$

Da $\ln(n!)\ge\ln n$ e dal limite dell'esponenziale abbiamo che

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{n(e^{\frac{1}{n^2\ln^2 n}}-1)\ln(n!)}{\frac{1}{n\ln n}} = \liminf_{n\to+\infty}\frac{\ln(n!)}{\ln n}\ge 1.$$

Poiché $\displaystyle\sum_{n=2}\frac{1}{n\ln n}=+\infty$, dal criterio del confronto asintotico otteniamo che

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n^2\ln^2 n}}-1)\ln(n!)=+\infty.$$

$\boxed{\textbf{7)}\ \text{Calcolare} \displaystyle\int (3-x^2-2x)^{-\frac{3}{2}}dx.}$

Ponendo $x+1=2\cos t$ abbiamo che

$$\int (3-x^2-2x)^{-\frac{3}{2}}dx = \int [4-(x+1)^2]^{-\frac{3}{2}}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{4}\frac{\cos t}{\sin t}\Big|_{\arccos(\frac{x+1}{2})} = \frac{1}{4}\frac{x+1}{\sqrt{3-x^2-2x}}.$$

$\boxed{\textbf{7)}\ \text{Calcolare} \displaystyle\int (2-x^2-x)^{-\frac{3}{2}}dx.}$

Ponendo $2x+1=3\cos t$ abbiamo che

$$\int (2-x^2-x)^{-\frac{3}{2}}dx = 8\int [9-(2x+1)^2]^{-\frac{3}{2}}dx = -\frac{4}{9}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = \frac{4}{9}\frac{\cos t}{\sin t}\Big|_{t=\arccos(\frac{2x+1}{3})} = \frac{2}{9}\frac{2x+1}{\sqrt{2-x^2-x}}$$