Soluzioni III Appello - 02/07/2018
Analisi Matematica 1 (canale Fi-K)

1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = x - \sqrt{2x - x^2}$.

Dominio=$[0, 2]$ $\quad$ $\{f > 0\} = (1, 2]$ $\quad$ Intersezione assi: $(0, 0)$, $(1, 0)$

$f'(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}+x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$ $\quad$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$

2) Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}[\cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}$.

Dal teorema di L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log[\cos(2x)]}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = -2$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}[\cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6}.$$

3) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} (\frac{\pi}{2})^n \sin(\frac{2^{n+1} + \pi^{n+1}}{2^n + \pi^n})$.

Da $2^n << \pi^n$ e dal limite notevole del seno abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{\pi}{2})^n \sin(\frac{2^{n+1} + \pi^{n+1}}{2^n + \pi^n}) = -\lim_{n\to+\infty} (\frac{\pi}{2})^n \sin(\frac{2^{n+1} + \pi^{n+1}}{2^n + \pi^n} - \pi)$$

$$= (\pi - 2) \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^n}{2^n + \pi^n} \frac{\sin(\frac{2^n}{2^n+\pi^n}(2 - \pi))}{\frac{2^n}{2^n+\pi^n}(2 - \pi)} = \pi - 2.$$

4) Calcolare $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx$.

Abbiamo che

$$\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx = -\frac{1}{2(1 - \cos x)^2}.$$

5) Calcolare $\int \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx$.

Ponendo $x^2 + 2x + 2 = (x + t)^2$, ossia $x = \frac{t^2-2}{2(1-t)}$ e $dx = \frac{2t-t^2-2}{2(t-1)^2} dt$, abbiamo che

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{(2t - t^2 - 2)^2}{(t - 1)^3} = -\frac{1}{4} \int \frac{[(t - 1)^2 + 1]^2}{(t - 1)^3}$$

$$= -\frac{1}{4} \int [t - 1 + \frac{2}{t - 1} + \frac{1}{(t - 1)^3}] dt = -\frac{(t - 1)^2}{8} + \frac{1}{8(t - 1)^2} - \frac{1}{2} \log|t - 1| \Big|_{t=\sqrt{x^2+2x+2}-x}$$

$$= \frac{x + 1}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2} \log|\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x - 1|.$$

$\boxed{\textbf{6)}\ \text{Discutere la convergenza di } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log(\log n)}.}$

Dal criterio di condensazione di Cauchy il carattere della serie coincide con quello della serie

$$\sum_n \frac{2^n}{2^n \log(2^n) \log(\log 2^n)} = \sum_n \frac{1}{n \log 2(\log n + \log\log 2)},$$

che a sua volta ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_n \frac{2^n}{2^n \log 2[\log(2^n) + \log\log 2]} = \sum_n \frac{1}{\log 2[n \log 2 + \log\log 2]}.$$

Essendo quest'ultima divergente dal confronto con la serie armonica, abbiamo che la serie di partenza diverge.