Soluzioni IV Appello - 18/9/2018
Analisi Matematica 1 (canale Fi-K)

1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = x - \sqrt{4x - x^2}$.

Dominio$=[0,4]$ $\{f > 0\} = (2,4]$ Intersezione assi: $(0,0)$, $(2,0)$

$f'(x) = \frac{\sqrt{4x-x^2}+x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = (2-\sqrt{2}, 4)$

2) Calcolare il limite $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [\sin x]^{\frac{1}{(2x-\pi)^2}}$.

Dal teorema di L'Hôpital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{(2x-\pi)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4(2x-\pi)} = -\frac{1}{8}$$

e quindi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [\sin x]^{\frac{1}{(2x-\pi)^2}} = e^{-\frac{1}{8}}.$$

3) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n!+2^n}-\sqrt{n!+n^2}}{\sqrt{n!+3^n}-\sqrt{n!+\log n}}$.

Razionalizzando abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n!+2^n}-\sqrt{n!+n^2}}{\sqrt{n!+3^n}-\sqrt{n!+\log n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-n^2}{3^n-\log n}\frac{\sqrt{n!+3^n}+\sqrt{n!+\log n}}{\sqrt{n!+2^n}+\sqrt{n!+n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-n^2}{3^n-\log n} = 0$$

in virtú di $\log n << n^2 << 2^n << 3^n << n!$.

4) Calcolare $\int \frac{dx}{5\cos x - 3}$.

Ponendo $t = \tan\frac{x}{2}$ abbiamo che

$$\int \frac{dx}{5\cos x - 3} = \int \frac{dt}{1-4t^2} = \frac{1}{2}\int [\frac{1}{2t+1} - \frac{1}{2t-1}]dt = \frac{1}{4}\log|2\tan\frac{x}{2}+1| - \frac{1}{4}\log|2\tan\frac{x}{2}-1|.$$

5) Calcolare $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Ponendo $x^2+1 = (x+t)^2$, ossia $x = \frac{1-t^2}{2t}$ e $dx = -\frac{1+t^2}{2t^2}dt$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-t^2)^2}{2t^3}dt = -\frac{1}{2}\int [\frac{1}{2t^3} - \frac{1}{t} + \frac{t}{2}]dt = -\frac{1}{8}(t^2 - \frac{1}{t^2}) + \frac{1}{2}\log t \\ &= -\frac{1}{2}\log(\sqrt{x^2+1}+x) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{6)}\ \text{Discutere la convergenza di } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2}{e^n + 2^n}.}$$

Siccome $n^2 << 2^n << e^n$, abbiamo che $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{e^n + 2^n} = 0$. Dal limite notevole del seno e dal criterio del confronto asintotico il carattere della serie coincide con quello della serie

$$\sum_{n=1} \frac{n^2}{e^n + 2^n},$$

che converge per il criterio della radice $n-$esima

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{e^n + 2^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e^n + 2^n}} = \frac{1}{e} < 1.$$