

Analisi Matematica 1 - Esercizi del 24 Ottobre 2018

Esercizi sui numeri complessi

Esercizio 1. Scrivere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana e in forma trigonometrica:

a) $z = (1 - i)^6$

b) $z = \frac{4i}{\sqrt{3+i}}$

c) $z = 2i(i - 1) + \overline{(\sqrt{3} - i)^3}$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $zf(z) = |z|^3 - 8i$ e scriverle in forma cartesiana.

Esercizio 3. Determinare tutte le radici delle seguenti equazioni di variabile complessa:

a) $z^2 = i(\operatorname{Re} z)^2 + 3|z|$.

b) $(z + i)^6 + 8i = (1 + 8i)(z + i)^3$.

Esercizi sul principio di induzione

Esercizio 4. Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni:

i.

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

ii.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

iii.

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Esercizio 5. Dimostrare la disuguaglianza:

$$n^n \leq e^n n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$