Soluzioni I Esonero - 20/12/2018
Analisi Matematica 1 (canale Fi-K)

1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x}{2x+5}e^{2x}$.

Dominio=$\{x \neq -\frac{5}{2}\}$ $\quad$ $\{f > 0\} = (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (0, +\infty)$ $\quad$ Intersezione assi: $(0, 0)$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to(-\frac{5}{2})^\pm} f(x) = \mp\infty$ $\quad$ Asintoti orizz./obliqui: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, no a $+\infty$

$f'(x) = \frac{4x^2+10x+5}{(2x+5)^2}e^{2x}$ $\quad$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}, -\frac{5+\sqrt{5}}{4}) \cup (-\frac{5-\sqrt{5}}{4}, +\infty)$

1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x}{x+2}e^{-\frac{x}{2}}$.

Dominio=$\{x \neq -2\}$ $\quad$ $\{f > 0\} = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ $\quad$ Intersezione assi: $(0, 0)$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to(-2)^\pm} f(x) = \mp\infty$ $\quad$ Asintoti orizz./obliqui: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, no a $-\infty$

$f'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\frac{-x^2-2x+4}{(x+2)^2}$ $\quad$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = (-1-\sqrt{5}, -2) \cup (-2, -1+\sqrt{5})$

2) Determinare le radici in forma cartesiana di $(\frac{i+1}{i+2}z + 1)^4 = 8(\sqrt{3} + i)$.

Scrivendo $8(\sqrt{3} + i) = 16e^{i\frac{\pi}{6}}$ si ottengono le radici

$$\frac{i+1}{i+2}z + 1 = 2e^{i\pi\frac{1+12k}{24}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Siccome $\frac{i+2}{i+1} = \frac{3-i}{2}$, dall'espressione cartesiana degli esponenziali immaginari otteniamo

$$z = [3\cos(\pi\frac{1+12k}{24}) + \sin(\pi\frac{1+12k}{24}) - \frac{3}{2}] + i[3\sin(\pi\frac{1+12k}{24}) - \cos(\pi\frac{1+12k}{24}) + \frac{1}{2}]$$

con $k = 0, 1, 2, 3$.

2) Determinare le radici in forma cartesiana di $(\frac{i+2}{i+1}z + 2)^4 = 8\sqrt{2}(1 + i)$.

Scrivendo $8\sqrt{2}(1 + i) = 16e^{i\frac{\pi}{4}}$ si ottengono le radici

$$\frac{i+2}{i+1}z + 2 = 2e^{i\pi\frac{1+8k}{16}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Siccome $\frac{i+1}{i+2} = \frac{3+i}{5}$, dall'espressione cartesiana degli esponenziali immaginari otteniamo

$$z = \frac{2}{5}[3\cos(\pi\frac{1+8k}{16} - \sin(\pi\frac{1+8k}{16}) - 3] + \frac{2i}{5}[\cos(\pi\frac{1+8k}{16}) + 3\sin(\pi\frac{1+8k}{16}) - 1]$$

con $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\boxed{\textbf{3)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3) - \sin^3 x}{x^3[\cos(x^3) - \cos^3 x]}.}$$

Dagli sviluppi di Taylor di seno e coseno otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3) - \sin^3 x}{x^3[\cos(x^3) - \cos^3 x]} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + O(x^9) - (x - \frac{x^3}{6} + O(x^6))^3}{x^3[1 - \frac{x^6}{2} + O(x^{12}) - (1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4))^3]} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{2} + O(x^7)}{x^3[\frac{3}{2}x^2 + O(x^4)]} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{\textbf{3)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3) - \log^3(1+x)}{x^2[e^{\frac{x^3+x^2}{2}} - 1]}.}$$

Dagli sviluppi di Taylor di logaritmo ed esponenziale otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3) - \log^3(1+x)}{x^2[e^{\frac{x^3+x^2}{2}} - 1]} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + O(x^6) - (x - \frac{x^2}{2} + O(x^3))^3}{x^2\frac{x^3+x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3x^4}{2} + O(x^5)}{x^3[\frac{x^4}{2} + O(x^5)]} = 3.$$

4) [5 punti] Calcolare
a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}[\sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} - 1} - n]$
b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sin(2\pi\sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} - 1})$ usando il punto (a).

a) Razionalizzando abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}[\sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} - 1} - n] = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\frac{2\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} - 1} + n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{n^2}} + 1} = 1.$$

b) Per periodicitá del seno e dal limite notevole del seno abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sin(2\pi\sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} - 1}) &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sin[2\pi(\sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} - 1} - n)] \\ &= 2\pi \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} - 1} - n) = 2\pi. \end{aligned}$$

4) [5 punti] Calcolare
a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}[\sqrt{n^2 + 4\sqrt{n} + 1} - n]$
b) $\lim_{n\to+\infty} n[1 - \cos(2\pi\sqrt{n^2 + 4\sqrt{n} + 1})]$ usando il punto (a).

a) Razionalizzando abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}[\sqrt{n^2+4\sqrt{n}+1}-n] = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\frac{4\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^2+4\sqrt{n}+1}+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{4}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{n^2}}+1} = 2.$$

b) Per periodicitá del coseno e dal limite notevole del coseno abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n[1-\cos(2\pi\sqrt{n^2+4\sqrt{n}+1})] &= \lim_{n\to+\infty} n[1-\cos(2\pi(\sqrt{n^2+4\sqrt{n}+1}-n))] \\ &= 4\pi^2 \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+4\sqrt{n}+1}-n)^2 = 16\pi^2. \end{aligned}$$