Soluzioni II Appello - 17/6/2019
Analisi Matematica 1 (canale Fi-K)

1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-8}{3x+2}}$.

Dominio$=(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [2, +\infty)$ $\quad \{f > 0\} = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$ $\quad$ Intersezione assi: $(2, 0)$

Asintoti verticali: $\lim_{x \to -\frac{2}{3}^-} f(x) = +\infty$ $\quad$ Asintoti orizz.: no

$f'(x) = 3(\frac{x^3-8}{3x+2})^{-\frac{1}{2}} \frac{(x+2)(x^2-x+2)}{(3x+2)^2}$ $\quad$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = (-2, -\frac{2}{3}) \cup [2, +\infty)$

2) Calcolare il limite $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\log(e^x - 1)}{\log x}$.

Dal teorema di L'Hôpital e dal limite notevole dell'esponenziale abbiamo che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(e^x - 1)}{\log x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 1.$$

3) Calcolare il limite $\lim_{n \to +\infty} [\cos \dfrac{1}{n!}]^{\frac{1}{\sin \frac{1}{n!}(\sqrt{(n!)^2+4} - \sqrt{(n!)^2+3})}}$.

Dai limiti notevoli di seno/coseno/esponenziale e tramite una razionalizzazione abbiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cos \frac{1}{n!} - 1}{\sin \frac{1}{n!}(\sqrt{(n!)^2+4} - \sqrt{(n!)^2+3})} = -\lim_{n \to +\infty} n![1 - \cos \frac{1}{n!}][\sqrt{(n!)^2+4} + \sqrt{(n!)^2+3}] = -1$$

e quindi otteniamo che

$$\lim_{n \to +\infty} [\cos \frac{1}{n!}]^{\frac{1}{\sin \frac{1}{n!}(\sqrt{(n!)^2+4} - \sqrt{(n!)^2+3})}} = \lim_{n \to +\infty} \left\{[1 + (\cos \frac{1}{n!} - 1)]\right\}^{\frac{\cos \frac{1}{n!} - 1}{\sin \frac{1}{n!}(\sqrt{(n!)^2+4} - \sqrt{(n!)^2+3})}} = \frac{1}{e}.$$

4) Calcolare $\displaystyle\int \frac{4\sin x - 3\cos x + 3}{\sin x(7\sin x + \cos x + 5)} dx$.

Ponendo $t = \tan \frac{x}{2}$ abbiamo che

$$\int \frac{4\sin x - 3\cos x + 3}{\sin x(7\sin x + \cos x + 5)} dx = \int \frac{3t+4}{2t^2+7t+3} dt = \int [\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{t+3}] dt$$
$$= \frac{1}{2} \log|2\tan \frac{x}{2} + 1| + \log|\tan \frac{x}{2} + 3| + c.$$

$\boxed{\textbf{5)}\ \text{Calcolare} \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}-2}.}$

Ponendo $9x^2+4 = 9(x+t)^2$, ossia $x = \frac{4-9t^2}{18t}$ e $dx = -\frac{9t^2+4}{18t^2}dt$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}-2} &= \frac{1}{3}\int \frac{9t^2+4}{3t^2-4}dt = \frac{1}{3}\int [3 - \frac{4}{\sqrt{3}t+2} + \frac{4}{\sqrt{3}t-2}]dt \\ &= \sqrt{x^2+\frac{4}{9}} - x - \frac{4}{3}\log\left|\frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{4}{9}}-\sqrt{3}x+2}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{4}{9}}-\sqrt{3}x-2}\right|.\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{6)}\ \text{Discutere la convergenza di} \sum_{n=1}^{\infty}(2^n+n^2)\log[1+\frac{1}{3^n+n^4}].}$

Dai confronti tra ordini di infinito abbiamo che $2^n, 3^n >> n^4$. Dal limite notevole del logaritmo e dal criterio del confronto asintotico la serie si comporta quindi come la serie geometrica di ragione $\frac{2}{3}$ e risulta essere pertanto convergente.