Soluzioni II Esonero-I Appello - 28/1/2019
Analisi Matematica 1 (canale Fi-K)

$\boxed{\textbf{1)}\text{ Studiare il grafico della funzione } f(x) = \log x - \arctan(x-1).}$

Dominio$=(0,+\infty)$ Asintoti verticali: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

Asintoti orizzontali/obliqui: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x^2-2x+2)^2}$ Segno di $f'(x)$: $\{f'>0\} = (0,1)\cup(2,+\infty)$

Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$? Dal grafico ha una radice doppia in $x = 1$ e una radice semplice in $x_0 > 2$.

$\boxed{\textbf{1)}\text{ Studiare il grafico della funzione } f(x) = \dfrac{x^2}{\log|x|-1}.}$

Dominio$=\{x \neq 0, \pm e\}$ $\{f>0\} = \{|x|>e\}$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to e^\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to(-e)^\pm} f(x) = \mp\infty$

Asintoti orizzontali/obliqui: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

$f'(x) = \frac{x(2\log|x|-3)}{(\log|x|-1)^2}$ Segno di $f'(x)$: $\{f'>0\} = (-e^{\frac{3}{2}}, -e)\cup(-e,0)\cup(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$

$\boxed{\textbf{2)}\text{ Calcolare il limite } \lim_{x\to 1^-} \dfrac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}}.}$

Dalla formula di de L'Hopital abbiamo che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = -\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{\sqrt{1+x}} = -\sqrt{2}.$$

$\boxed{\textbf{2)}\text{ Calcolare il limite } \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\log(1+3x))}{e^x - 3^x}.}$

Dalla formula di de L'Hopital abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+3x))}{e^x - 3^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\log(1+3x))\frac{3}{1+3x}}{e^x - 3^x \log 3} = \frac{3}{1-\log 3}.$$

3) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n^{2n}\sin^2(n^{-n})-1}{\sqrt{n^{4n}+n^n}-n^{2n}}\right)^{n^n}$.

Dagli sviluppi di Taylor abbiamo che $\sin^2(n^{-n})=n^{-2n}-\frac{n^{-4n}}{3}+O(n^{-6n})$ e per razionalizzazione che $\sqrt{n^{4n}+n^n}-n^{2n}=\frac{n^n}{\sqrt{n^{4n}+n^n}+n^{2n}}=\frac{n^{-n}}{2}+O(n^{-4n})$. Otteniamo quindi dal limite notevole di e che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n^{2n}\sin^2(n^{-n})-1}{\sqrt{n^{4n}+n^n}-n^{2n}}\right)^{n^n} &= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3}\frac{n^{-2n}+O(n^{-4n})}{n^{-n}+O(n^{-4n})}\right)^{n^n}\\ =\lim_{n\to+\infty}\left[(1-\frac{2}{3}\frac{1}{n^n+O(n^{-n})})^{-\frac{3}{2}(n^n+O(n^{-n}))}\right]^{-\frac{2}{3}\frac{n^n}{n^n+O(n^{-n})}} &= e^{-\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

3) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\log^2(\frac{\log n+1}{\log n})\log^2 n-1}{\sqrt{\log^4 n+\log^2 n}-\log^2 n}\right)^{\log n}$.

Dagli sviluppi di Taylor abbiamo che $\log^2(\frac{\log n+1}{\log n})=\log^2(1+\frac{1}{\log n})=\frac{1}{\log^2 n}-\frac{1}{\log^3 n}+O(\frac{1}{\log^4 n})$ e per razionalizzazione che $\sqrt{\log^4 n+\log^2 n}-\log^2 n=\frac{\log^2 n}{\sqrt{\log^4 n+\log^2 n}+\log^2 n}=\frac{1}{2}+O(\frac{1}{\log^2 n})$. Otteniamo quindi dal limite notevole di e che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\log^2(\frac{\log n+1}{\log n})\log^2 n-1}{\sqrt{\log^4 n+\log^2 n}-\log^2 n}\right)^{\log n} &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-\frac{1}{\log n}+O(\frac{1}{\log^2 n})}{\frac{1}{2}+O(\frac{1}{\log^2 n})}\right)^{\log n}\\ =\lim_{n\to+\infty}\left[(1-\frac{2}{\log n+O(1)})^{-\frac{\log n+O(1)}{2}}\right]^{-2\frac{\log n}{\log n+O(1)}} &= e^{-2}.\end{aligned}$$

4) Calcolare $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x}$.

Ponendo $t=\tan\frac{x}{2}$ abbiamo che

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x}=-2\int\frac{dt}{3t^2-8t-3}dt=\frac{1}{5}\int[\frac{3}{3t+1}-\frac{1}{t-3}]dt=\frac{1}{5}\log\frac{|3\tan\frac{x}{2}+1|}{|\tan\frac{x}{2}-3|}+c.$$

4) Calcolare $\int\frac{dx}{4\cos x+5\sin x}$.

Ponendo $t=\tan\frac{x}{2}$ abbiamo che

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{4\cos x+5\sin x} &= -\int\frac{dt}{2t^2-5t-2}dt=\frac{1}{\sqrt{41}}\int[\frac{1}{t-\frac{5-\sqrt{41}}{4}}-\frac{1}{t-\frac{5+\sqrt{41}}{4}}]dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{41}}\log\frac{|\tan\frac{x}{2}-\frac{5-\sqrt{41}}{4}|}{|\tan\frac{x}{2}-\frac{5+\sqrt{41}}{4}|}+c.\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5)}\text{ Calcolare } \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\log^2 x - 1}}.}$

Ponendo $x = e^t$ otteniamo che $dx = e^t dt$ e

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\log^2 x - 1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Ponendo poi $t^2 - 1 = (t+s)^2$, ossia $t = -\frac{1+s^2}{2s}$ e $dt = \frac{1-s^2}{2s^2} ds$, abbiamo che

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\log^2 x - 1}} = -\int \frac{ds}{s} = -\log|\sqrt{\log^2 x - 1} - \log x| + c$$

poiché $s = \sqrt{t^2 - 1} - t = \sqrt{\log^2 x - 1} - \log x$.

$\boxed{\textbf{5)}\text{ Calcolare } \displaystyle\int \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 1}} dx.}$

Ponendo $x = \arctan t$ otteniamo che $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ e

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 1}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Ponendo poi $t^2 - 1 = (t+s)^2$, ossia $t = -\frac{1+s^2}{2s}$ e $dt = \frac{1-s^2}{2s^2} ds$, abbiamo che

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 1}} dx = -\int \frac{ds}{s} = -\log|\sqrt{\tan^2 x - 1} - \tan x| + c$$

poiché $s = \sqrt{t^2 - 1} - t = \sqrt{\tan^2 x - 1} - \tan x$.

$\boxed{\textbf{6)}\text{ Discutere la convergenza di } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + e^n} - \sqrt{n}}{1 + 2^n}.}$

Tramite razionalizzazione riscriviamo la serie data come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + e^n} - \sqrt{n}}{1 + 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(1 + 2^n)(\sqrt{n + e^n} + \sqrt{n})}.$$

Siccome

$$\sqrt[n]{\frac{e^n}{(1 + 2^n)(\sqrt{n + e^n} + \sqrt{n})}} = \frac{\sqrt{e}}{2} \frac{1}{\sqrt[n]{(2^{-n} + 1)(\sqrt{ne^{-n} + 1} + \sqrt{ne^{-n}})}} \to \frac{\sqrt{e}}{2} < 1$$

dal criterio della radice otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + e^n} - \sqrt{n}}{1 + 2^n} < +\infty.$$

6) Discutere la convergenza di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+e^{2n}}-n}{1+3^n}$.

Tramite razionalizzazione riscriviamo la serie data come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+e^{2n}}-n}{1+3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{(1+3^n)(\sqrt{n^2+e^{2n}}+n)}.$$

Siccome

$$\sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{(1+3^n)(\sqrt{n^2+e^{2n}}+n)}} = \frac{e}{3}\frac{1}{\sqrt[n]{(3^{-n}+1)(\sqrt{n^2e^{-2n}+1}+ne^{-n})}} \to \frac{e}{3} < 1$$

dal criterio della radice otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+e^{2n}}-n}{1+3^n} < +\infty.$$

7) Calcolare $\displaystyle\int x\log^2(5x)dx$.

Integrando per parti abbiamo che

$$\begin{aligned}\int x\log^2(5x)dx &= \frac{x^2}{2}\log^2(5x) - \int x\log(5x)dx = \frac{x^2}{2}[\log^2(5x)-\log(5x)] + \int \frac{x}{2}dx \\ &= \frac{x^2}{2}[\log^2(5x)-\log(5x)+\frac{1}{2}] + c.\end{aligned}$$

7) Calcolare $\displaystyle\int x\arctan x dx$.

Integrando per parti abbiamo che

$$\begin{aligned}\int x\arctan x dx &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int [1-\frac{1}{x^2+1}]dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + c.\end{aligned}$$