Soluzioni III Appello - 1/7/2019
Analisi Matematica 1 (canale Fi-K)

1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = xe^{\frac{x+1}{x-1}}$.

Dominio=$\{x \neq 1\}$ $\qquad$ $\{f > 0\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$ $\qquad$ Intersezione assi: $(0,0)$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = +\infty/0$

Asintoti orizz./obliqui: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = e$, $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ex] = e \lim_{x\to\pm\infty} x[e^{\frac{2}{x-1}} - 1] = 2e$

$f'(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \frac{x^2-4x+1}{(x-1)^2}$ $\qquad$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = (-\infty, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$

2) Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \frac{(e^{-x} + \sin x + \frac{x^3}{3})^2 + \cos^2 x - 2}{\cos^2 x - \cos(x^2) + x^2}$.

Dagli sviluppi di Taylor noti abbiamo che

$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + O(x^6)$, $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)$, $e^{-x} + \sin x + \frac{x^3}{3} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$

per $x \to 0$, e quindi otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{-x} + \sin x + \frac{x^3}{3})^2 + \cos^2 x - 2}{\cos^2 x - \cos(x^2) + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^4}{3} + O(x^5)}{\frac{5x^4}{6} + O(x^6)} = \frac{4}{5}.$$

3) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} [1 + \log \frac{n!+1}{n!}]^{\frac{\sqrt{n!+1}}{\sqrt{(n!)^3+3n!+4} - \sqrt{(n!)^3+2n!+2}}}$.

Dai limiti notevoli di logaritmo/esponenziale e tramite una razionalizzazione abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n!})\sqrt{n!+1}}{\sqrt{(n!)^3+3n!+4} - \sqrt{(n!)^3+2n!+2}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n!})\sqrt{n!+1}(\sqrt{(n!)^3+3n!+4} + \sqrt{(n!)^3+2n!+2})}{n!+2} = 2$$

e quindi otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} [1 + \log \frac{n!+1}{n!}]^{\frac{\sqrt{n!+1}}{\sqrt{(n!)^3+3n!+4} - \sqrt{(n!)^3+2n!+2}}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left\{ [1 + \log(1+\frac{1}{n!})]^{\frac{1}{\log(1+\frac{1}{n!})}} \right\}^{\frac{\log(1+\frac{1}{n!})\sqrt{n!+1}}{\sqrt{(n!)^3+3n!+4} - \sqrt{(n!)^3+2n!+2}}} = e^2.$$

$\boxed{\textbf{4)}\text{ Calcolare } \displaystyle\int \frac{\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 2\cos^2 x}{\sin x\cos x(\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x)}dx.}$

Ponendo $t = \tan x$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 2\cos^2 x}{\sin x\cos x(\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x)}dx = \int \frac{t^2+5t-2}{t(t^2+2t+2)}dt \\
&= \int [-\frac{1}{t} + \frac{2t+2}{t^2+2t+2} + \frac{5}{t^2+2t+2}]dt \\
&= \log\left|\frac{\tan^2 x + 2\tan x + 2}{\tan x}\right| + 5\arctan(\tan x + 1) + c.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5)}\text{ Calcolare } \displaystyle\int \frac{dx}{3x+\sqrt{x^2+5}}.}$

Ponendo $x^2 + 5 = (x+t)^2$, ossia $x = \frac{5-t^2}{2t}$ e $dx = -\frac{t^2+5}{2t^2}dt$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3x+\sqrt{x^2+5}} &= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+5}{t(t^2-10)}dt = \frac{1}{2}\int [-\frac{1}{2t} + \frac{3}{4(t-\sqrt{10})} + \frac{3}{4(t+\sqrt{10})}]dt \\
&= -\frac{1}{4}\log|\sqrt{x^2+5} - x| + \frac{3}{8}\log|2x^2 - 5 - 2x\sqrt{x^2+5}| + c.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{6)}\text{ Discutere la convergenza di } \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n}.}$

Dal criterio di condensazione di Cauchy la serie data si comporta come la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$ e quindi converge.