Soluzioni IV Appello - 16/9/2019
Analisi Matematica 1 (canale Fi-K)

$$\boxed{\textbf{1)}\ \text{Studiare il grafico della funzione } f(x) = \log \frac{x^2}{x+2}.}$$

Dominio$=(-2,0) \cup (0,+\infty)$ $\{f > 0\} = (-2,-1) \cup (2,+\infty)$ Intersezione assi: $(-1,0)$, $(2,0)$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

Asintoti orizz./obliqui: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$f'(x) = \frac{x+4}{x(x+2)}$ Segno di $f'(x)$: $\{f' > 0\} = (0,+\infty)$

$$\boxed{\textbf{2)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{x\to 0^+} \left[e - (1+\frac{1}{\log x})^{\log x}\right] \log \frac{1-\cos x}{\sin x}.}$$

Dagli sviluppi di Taylor del logaritmo e dell'esponenziale abbiamo che

$$(1+\frac{1}{\log x})^{\log x} = e^{\log x \log(1+\frac{1}{\log x})} = e^{1-\frac{1}{2\log x}+O(\frac{1}{\log^2 x})} = e[1 - \frac{1}{2\log x} + O(\frac{1}{\log^2 x})]$$

mentre vale

$$\log \frac{1-\cos x}{\sin x} = \log x + \log \frac{1-\cos x}{x \sin x} = \log x + O(1)$$

da $\frac{1-\cos x}{x\sin x} \to \frac{1}{2}$ per $x \to 0$. Abbiamo allora che

$$\lim_{x\to 0^+} \left[e - (1+\frac{1}{\log x})^{\log x}\right] \log \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} [\frac{e}{2} + O(\frac{1}{\log x})][1+O(\frac{1}{\log x})] = \frac{e}{2}.$$

$$\boxed{\textbf{3)}\ \text{Calcolare il limite } \lim_{n\to+\infty} [\cos \frac{1}{n!}]^{\frac{\sqrt{(n!)^4+3^n}-\sqrt{(n!)^4+2^n}}{\sqrt{9^n+n^2}-\sqrt{4^n+n}}}.}$$

Dai confronti di infinito e tramite una razionalizzazione abbiamo che

$$\frac{\sqrt{(n!)^4+3^n}-\sqrt{(n!)^4+2^n}}{(\sqrt{9^n+n^2}-\sqrt{4^n+n})} = -\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{\sqrt{1+\frac{n^2}{9^n}} - \sqrt{\frac{4^n}{9^n}+\frac{n}{9^n}}} \frac{1}{\sqrt{(n!)^4+3^n}+\sqrt{(n!)^4+2^n}} \to 0$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} [\cos \frac{1}{n!}]^{\frac{\sqrt{(n!)^4+3^n}-\sqrt{(n!)^4+2^n}}{\sqrt{9^n+n^2}-\sqrt{4^n+n}}} = 1.$$

$\boxed{\textbf{4)}\ \text{Calcolare} \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}.}$

Ponendo $t = \tan\frac{x}{2}$ abbiamo che

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)} = \int \frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}dt = \int [\frac{1}{3t} + \frac{5}{3(t-3)} - \frac{1}{t-1}]dt$$
$$= \frac{1}{3}\log|\tan\frac{x}{2}| + \frac{5}{3}\log|\tan\frac{x}{2}-3| - \log|\tan\frac{x}{2}-1| + c.$$

$\boxed{\textbf{5)}\ \text{Calcolare} \displaystyle\int \sqrt{x^2+2x}\ dx.}$

Ponendo $x^2+2x = (x+t)^2$, ossia $x = -\frac{t^2}{2(t-1)}$ e $dx = -\frac{t^2-2t}{2(t-1)^2}dt$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2x}\ dx &= -\frac{1}{4}\int \frac{(t^2-2t)^2}{(t-1)^3}dt = -\frac{1}{4}\int [t-1-\frac{2}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^3}]dt \\ &= -\frac{1}{4}(x^2+x-x\sqrt{x^2+2x}) + \frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{4} + \frac{1}{2}\log|\sqrt{x^2+2x}-x-1| \\ &\quad +\frac{1}{8}[2x^2+4x+1-2(x+1)\sqrt{x^2+2x}]^{-1} + c.\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{6)}\ \text{Discutere la convergenza di} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log n}\right]^{n\sin\frac{1}{n}}.}$

Abbiamo che

$$[\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log n}]^{n\sin\frac{1}{n}}[n\log n] = [\frac{\log(1+3^n)}{n}]^{n\sin\frac{1}{n}}(n\log n)^{1-n\sin\frac{1}{n}} \to \log 3$$

per $n\to+\infty$ poiché $n\sin\frac{1}{n} = 1+O(\frac{1}{n^2})$ e

$$\frac{\log(1+3^n)}{n} \to \log 3 \qquad (n\log n)^{1-n\sin\frac{1}{n}} = (n\log n)^{O(\frac{1}{n^2})} \to 1$$

per $n\to+\infty$. Dal criterio del confronto asintotico la serie si comporta come la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n} = +\infty$ e quindi diverge.