Analisi Matematica 1 - Esercitazione 1

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

b) $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ è divisibile per 7, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le \frac{7}{4} - \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \ge 2.$

d) $n^n \le e^n n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

e) Dati $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ si ha che

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\ .$$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, k! = (n+1)! - 1\,, \quad \forall\, n \ge 2.$

g) $4^n (n!)^2 \le (2n+1)!\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Esercizio 2. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi, specificando se si tratta di massimo/minimo.

- $A = \left\{ \dfrac{1-2n}{n+1} \ :\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$
- $B = \left\{ \dfrac{5}{m} - \dfrac{1}{3\log^2 n + 1} \ :\ n, m \in \mathbb{N} \right\}.$
- $C = \left\{ \dfrac{m^2 - 4}{n^3 + 3n + 5} \ :\ n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \right\}.$