Analisi Matematica 1 - Esercitazione 4

Esercizio 1. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Dimostrare le seguenti affermazioni:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \implies \lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^a$.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0 \implies \lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$.

Esercizio 2. Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni con $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dimostrare le seguenti affermazioni:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R} \implies \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.
2. $\lim_{n\to\infty} b_n \ln a_n = L \implies \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^L$.

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{\sqrt{n^2+3n+2}-n}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{4}{3}} - \sqrt{n}\ln(1+2^n)}{n^{-\frac{1}{3}} + \sqrt{1+n^3} + \ln^2 n}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin n - n^3 + \ln^4 n}{\sqrt{n^4+1} - \sqrt[n]{n^5+n+1}}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+\ln^3 n)\left(\ln\left(\frac{n+2}{n^3+n+1}\right)+1\right)}{n\ln n\sqrt{n^2+\ln^4 n}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\log^{\frac{2}{3}} n + \log(1+n^4)} - 2\sqrt{\log n}}{\sqrt{\log(n^2+1)+\sqrt[4]{n}} - \sqrt{1+2\log n}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n!}{n\log n}$.

h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left((n-1)^{\sqrt{n}} + n^4\right)^{\frac{\sqrt{4n+3}}{\log n!}}$

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n2^n}{n^{\sqrt{n}}+3^n}\right)^{\frac{\sqrt{\log(2n+3)-16}}{\sqrt{n^2+2\log n!-n+\log n}}}$