Analisi Matematica 1 - Esercitazione 5

Esercizio 1. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (o $-\infty$). Provare che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Esercizio 2. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, con $a_n \neq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Provare che

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{2-n^2}{3n+\ln^4 n}}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n^3+(n+1)^2\ln n!}}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(2\sqrt{n}+(n!)^2)-\ln(2(n!)+1)}{\ln(n!+3)}\right)^{\ln n!}$

Esercizio 4. Calcolare i seguenti limiti di successioni al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x^{2n}+3^{-n}}.$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n^4+2n\sin(\ln n!))+nx}{n^x+1}.$

Esercizio 5. Determinare il massimo e il minimo limite della successione

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1}.$$