Analisi Matematica 1 - Esercitazione 7

Esercizio 1. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{e^{\sqrt{x}} - e}$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

1. $\lim_{n\to+\infty} n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n^2+1}\right) - 1\right)$

2. $\lim_{n\to+\infty} \ln n \sin\left(\frac{n+\pi}{\sqrt{1+2\ln^2 n!}}\right)$.

Esercizio 3. Dimostrare che

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $x^3 e^x$
2. $\tan x$
3. $x^4 \sin x \cos x$
4. $\frac{2x+3}{x^2-5x+5}$
5. $\cos(x^4)$
6. $e^{3\sin^2 x}$
7. $(2x-5)^{20}$
8. $e^{\frac{x^3-x}{1+x^2}}$

Teorema (Derivata dell'inversa di una funzione). Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile in (a,b). Se f è derivabile in $x \in (a,b)$ e $f'(x) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(x)$ e si ha $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Esercizio 5. Utilizzando il teorema precedente, dimostrare le seguenti identità:

1. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$.
2. $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.