Prova di autovalutazione - 21/12/2020

Esercizi

1) [4 punti] La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{2x+1}{x^2+1}} - e}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ \alpha & \text{per } x = 0 \end{cases}$ risulta continua in 0 se

(a) $\alpha = 1$

(b) le altre risposte sono false

(c) $\alpha = e$

(d) $\alpha = 2e$

(e) $\alpha = 2$

2) [4 punti] Il limite $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{n}+1}{n+2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$ vale

(a) $\sqrt{e}$

(b) e^2

(c) le altre risposte sono false

(d) e

(e) $2e$

3) [6 punti] Le radici complesse dell'equazione $(z+1)^3 = \frac{16}{1-\sqrt{3}i}$ sono date da

(a) $-1 + 2e^{\frac{\pi}{18}i + \frac{2k\pi}{3}i}$ con $k = 0, 1, 2$

(b) $-1 + 2e^{\frac{\pi}{9}i + \frac{2k\pi}{3}i}$ **con** $k = 0, 1, 2$

(c) $-1 + e^{\frac{\pi}{9}i + \frac{2k\pi}{3}i}$ con $k = 0, 1, 2$

(b) $-1 + e^{\frac{\pi}{18}i + \frac{2k\pi}{3}i}$ con $k = 0, 1, 2$

(e) le altre risposte sono false

4) [6 punti] Determinare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}-\sin x-e^{x^2}}{\sqrt{1+x^3}-1}$$

Abbiamo che mediante razionalizzazione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}-\sin x-e^{x^2}}{\sqrt{1+x^3}-1}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}-\sin x-e^{x^2}}{x^3}.$$

Dagli sviluppi di Taylor

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+O(x^4),\quad \sin x=x-\frac{x^3}{6}+O(x^6),\quad e^{x^2}=1+x^2+O(x^4)$$

per $x\to 0$ otteniamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}-\sin x-e^{x^2}}{\sqrt{1+x^3}-1}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{6}x^3+O(x^4)}{x^3}=\frac{7}{3}.$$

5) [10 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x-1}$.

Dominio=$\{x\neq 0\}$ $\{f>0\}=(0,+\infty)$ Intersezione assi: no

Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to 0^{\pm}}f(x)=\pm\infty$$

Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

$f'(x)=\frac{e^x(e^{2x}-2e^x-1)}{(e^x-1)^2}$

Studio del segno di $f'(x)$

Poiché $t^2-2t-1>0$ per $t<1-\sqrt{2}$ oppure $t>1+\sqrt{2}$, per $t=e^x$ otteniamo che $e^{2x}-2e^x-1>0$ per $x>\log(1+\sqrt{2})$ e quindi

$$\{f'>0\}=(\log(1+\sqrt{2}),+\infty)$$

$f''(x)=\frac{e^x(e^{3x}-3e^{2x}+5e^x+1)}{(e^x-1)^3}$

Studio del segno di $f''(x)$

Poiché $g(t)=t^3-3t^2+5t+1$ soddisfa $g'(t)=3t^2-6t+5>0$ poiché $\frac{\Delta}{4}=-6<0$, abbiamo che $e^{3x}-3e^{2x}+5e^x+1=g(e^x)>g(0)=1$ e quindi

$$\{f''>0\}=(0,+\infty)$$

Disegno qualitativo del grafico di $f(x)$
Si ricava dalle informazioni sopra ottenute.