Soluzioni Prova Autovalutativa - 21/1/2021
Analisi Matematica 1 (Ingegneria Meccanica)

1) La risposta corretta è (c) poiché le uniche informazioni vere sono: $f(x)$ ammette un asintoto verticale $x = 3$ ed uno orizzontale $y = -1$; la tangente al grafico di $f(x)$ è orizzontale in $x = 5$, ossia $f'(5) = 0$; la funzione rivolge la concavitá verso il basso vicino a $x = 5$, ossia $f''(5) \leq 0$.

2) La risposta corretta è (b) poiché dal limite notevole del numero di Nepero otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^2+2n}{n^2+2}\Big)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{2n-2}{n^2+2}\Big)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\Big[(1+\frac{2n-2}{n^2+2})^{\frac{n^2+2}{2n-2}}\Big]^{\frac{2(n^2-1)}{n^2+2}} = e^2.$$

3) La risposta corretta è (c). Dal limite notevole del seno e dal criterio del confronto asintotico la convergenza della prima serie equivale a quella della serie armonica generalizzata convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Poiché $\log(n^2+n) \geq \log 2$ abbiamo che la seconda serie diverge dal criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n^2+n)}{n} \geq \log 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

4) La risposta corretta è (a). Abbiamo i seguenti sviluppi di Taylor: per $x \to 0$ vale che $\cos(\pi+x^2) = -\cos(x^2) = -1+\frac{x^4}{2}+O(x^8)$, $\sqrt{1+x^5} = 1+\frac{x^5}{2}+O(x^{10})$ e $\log\sqrt{1-x^4} = \frac{1}{2}\log(1-x^4) = -\frac{x^4}{2}+O(x^8)$ da cui otteniamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\pi+x^2)+\sqrt{1+x^5}+\log\sqrt{1-x^4}}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{-1+\frac{x^4}{2}+1+\frac{x^5}{2}-\frac{x^4}{2}+O(x^8)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{2}+O(x^8)}{x^5} = \frac{1}{2}.$$

5) Posto $t = \tan\frac{x}{2}$ abbiamo che

$$\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)} = \int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2})}\frac{2dt}{1+t^2} = \int\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}dt.$$

Decomponiamo l'integranda in fratti semplici

$$\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)} = \frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{C}{t-1}$$

ottenendo $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{5}{3}$ e $C = -1$. Quindi

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)} &= \frac{1}{3}\int[\frac{1}{t}+\frac{5}{t-3}-\frac{3}{t-1}]dt = [\frac{1}{3}\log|t|+\frac{5}{3}\log|t-3|-\log|t-1|]\Big|_{t=\tan\frac{x}{2}}+c\\ &= \frac{1}{3}\log|\tan\frac{x}{2}|+\frac{5}{3}\log|\tan\frac{x}{2}-3|-\log|\tan\frac{x}{2}-1|+c.\end{aligned}$$

6) Dominio=$\{x \neq 1\}$; $\{f > 0\} = (0, +\infty)$; intersezione assi: $(0, 0)$.

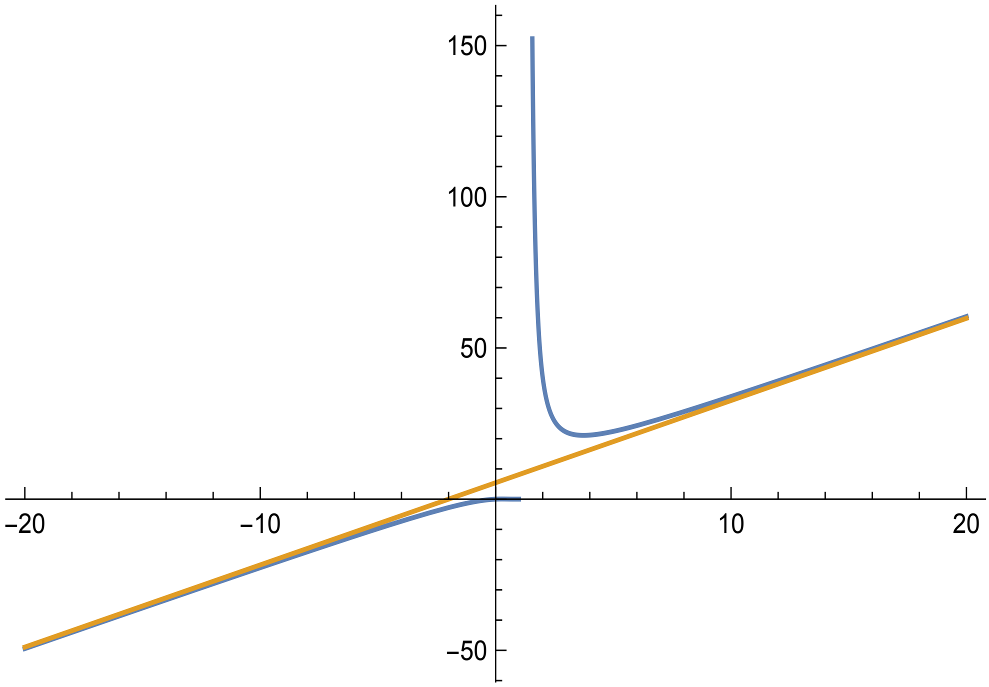
Asintoti verticali: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$; asintoti orizz.i/obl.: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = e$ e

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ex] = \lim_{x \to \pm\infty} ex[e^{\frac{2}{x-1}} - 1] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2ex}{x-1} = 2e.$$

Derivata prima: $f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $\{f' > 0\} = (-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$; $2 - \sqrt{3}$ massimo locale e $2 + \sqrt{3}$ minimo locale per $f(x)$.

Derivata seconda: $f''(x) = \frac{4(2x-1)}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $\{f'' > 0\} = (\frac{1}{2}, +\infty)$.

Il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ ha il seguente aspetto generale:



Il comportamento su $[0, 1]$ è meglio evidenziato nel seguente disegno: