Simulazione II esonero di Analisi Matematica
canale L-Z
E. Scoppola

Domanda 1 (4pt):

Per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$ si ha che:

A: converge per ogni $x < 1$

B: converge per $x \in (-\infty, 0)$

C: converge per $x \in (-\infty, 0]$

D: converge per $x \in (0, +\infty)$

E: nessuna delle altre

La risposta corretta è B.

Infatti la convergenza è determinata dalla disequazione

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1.$$

Abbiamo divergenza per $x > 1$ infatti:

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \frac{x+1}{x-1} > 1.$$

Abbiamo assoluta convergenza per $x < -1$, dove sia $x+1$ che $x-1$ sono negative, infatti:

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \frac{x+1}{x-1} < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x+1 > x-1.$$

Per $x \in [-1, 1)$ la condizione di convergenza è verificata solo per $x < 0$ infatti

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \frac{x+1}{-(x-1)} < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x+1 < -x+1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < 0.$$

Domanda 2 (4pt):

Dati

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n + 1}, \qquad I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^{1/3}}, \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

vale:

A: S_1 converge e I_2 diverge

B: I_1 diverge e I_2 converge

C: S_1 diverge e I_2 diverge

D: S_1 converge e I_1 converge

E: nessuna delle altre

La risposta corretta è A.

Infatti S_1 è limitata da una geometrica di ragione $2/3$ e dunque convergente. L'integrale I_1 diverge infatti é stimato dal basso, a meno di costanti, da

$$\int_0^\infty x^{-\frac{2}{3}} dx = +\infty.$$

$$I_2 = \lim_{h \to 0} \int_h^1 \frac{1}{x^2} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{x}\Big|_h^1 = +\infty$$

Domanda 3 (5pt):

L'integrale $\int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$ vale:

A: $\log(e^2-1) - \log(e^2+1)$

B: $\log(e^2+1) - \log(e^2-1)$

C: $\log\left(\frac{(e+1)^2}{e^2+1}\right)$

D: $\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2e}{e^2+1}\right)$

E: nessuna delle altre

La risposta corretta è D.

Infatti col cambiamento di variabile $t = e^x$ abbiamo

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2}\big(\log(t-1) - \log(t+1)\big)\Big|_e^{e^2} = \frac{1}{2}\Big(\log\big(\frac{e^2-1}{e-1}\big) - \log\big(\frac{e^2+1}{e+1}\big)\Big) = \frac{1}{2}\log\frac{(e+1)^2}{e^2+1}$$

Domanda 4 (4pt):

L'integrale $\int_0^{\pi/2}(x+2)\sin x dx$ vale:

A: 3

B: $\pi/2$

C: -1

D: 0

E: nessuna delle altre

La risposta corretta è A.

Infatti il risultato si ottiene immediatamente integrando per parti.

Domanda a risposta aperta (8pt):

Dato l'integrale
$$\int_1^\infty \frac{x^2-1}{(x-1)^\alpha x^2 (x+1)^\beta}$$

i) determinare i valori di α e β per cui l'integrale è finito

ii) nel caso $\alpha = 1, \beta = 1/2$ calcolare l'integrale.

$$\int_1^\infty \frac{x^2-1}{(x-1)^\alpha x^2 (x+1)^\beta} dx = \int_1^\infty \frac{(x+1)^{1-\beta}}{(x-1)^{\alpha-1}x^2} dx$$
$$\int_1^2 \frac{(x+1)^{1-\beta}}{(x-1)^{\alpha-1}x^2} dx + \int_2^\infty \frac{(x+1)^{1-\beta}}{(x-1)^{\alpha-1}x^2} dx \qquad (1)$$
entrambi integrali impropri.

Per integrali della forma
$$\int x^b dx = \frac{1}{b+1} x^{b+1}, \qquad b \neq 1$$
ricordiamo che per avere convergenza a 0 abbiamo la condizione $b+1>0$ e per la convergenza a infinito la condizione $b+1<0$.

Il primo integrale in (1) converge se $\alpha < 2$ infatti può essere stimato dall'alto e dal basso, a meno di costanti, con
$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx.$$
Il secondo converge se $\alpha + \beta > 1$ infatti può essere stimato dall'alto e dal basso, a meno di costanti, con
$$\int_2^\infty x^{-\alpha-\beta} dx.$$

Nel caso $\alpha = 1, \beta = 1/2$ l'integrale converge e vale
$$\int_1^\infty \frac{x^2-1}{(x-1)x^2(x+1)^{1/2}} dx = \int_1^\infty \frac{(x+1)^{1/2}}{x^2} dx.$$

Col cambiamento di variabile $t = \sqrt{x+1}$, cioè $x = t^2 - 1$, otteniamo
$$\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{2t^2}{(t^2-1)^2} dt = \frac{1}{2}\Big[-\frac{2t}{t_2 - 1} + \log(\frac{1-t)}{1+t}) \Big]\Big|_{\sqrt{2}}^\infty$$

infatti

$$\frac{2t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}$$

con $A = B = D = 1/2$ e $C = -1/2$, corrispondenti alla soluzione del sistema di equazioni:

$$A+C = 0, \qquad A+B-C+D = 2, \qquad -A+2B-C-2D = 0, \qquad -A+B+C+D = 0.$$

In conclusione otteniamo

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{2t^2}{(t^2-1)^2} dt = \frac{1}{2}\Big[2\sqrt{2} - \log(\frac{1-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}})\Big]$$

Domanda a risposta aperta (8pt):

Data la serie $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{x}{x+2}\right)^n$ con $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$

- determinare i valori di x per cui la serie converge assolutamente,
- determinare i valori di x per cui la serie converge,
- determinare i valori di x per cui la serie diverge,
- determinare i valori di x per cui la serie è indeterminata,
- per $x = -1$ determinare l'ordine della somma parziale S_n che stima S con un errore minore o uguale a 0.1.

Ricordiamo che per una serie geometrica di ragione a, $S_g = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$, abbiamo:

cov) se $|a| < 1$ la serie converge assolutamente

div) se $a \geq 1$ la serie diverge

ind) se $a \leq -1$ la serie è indeterminata

La serie S ha un termine di tipo geometrica di ragione $a = \frac{x}{x+2}$ moltiplicato $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Nel caso $a = -1$ avremo quindi convergenza non assoluta, per il criterio di Leibniz, ma per gli altri valori della ragione a la serie S ha lo stesso carattere della geometrica S_g con la stessa ragione.

Studiamo dunque i valori assunti dalla ragione $a = \frac{x}{x+2}$, al variare del parametro x.

Per $x \geq 0$ abbiamo

$$0 \leq \frac{x}{x+2} < 1$$

da cui convergenza assoluta in questa regione del parametro x.

Per $x \in (-2, 0)$ abbiamo

$$0 > \frac{x}{x+2} > -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > -(x+2) \qquad \Leftrightarrow \qquad x > -1$$

e dunque convergenza assoluta in tutto l'intervallo $(-1, +\infty)$.

Per $x = -1$ abbiamo
$$\frac{x}{x+2} = -1$$
e dunque convergenza non assoluta, dal criterio di Leibniz per serie alternate.

Per $x \in (-2, -1)$ abbiamo
$$\frac{x}{x+2} < -1$$
e dunque la serie é indeterminata, poiché la serie risulta alternata con termini divergenti in valore assoluto.

Per $x < -2$ abbiamo
$$\frac{x}{x+2} > 1$$
e dunque la serie diverge.

Nel caso $x = -1$ la serie a segni alterni può essere stimata da S_{99} con
$$|S - S_{99}| \leq a_{100} = \frac{1}{10}$$