Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Analisi Matematica 1 (canale A-K)

A.A. 2021-2022

Esercitazione 1 del 30 Settembre 2021

1. Provare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

2. Trovare una dimostrazione diretta dell'identitá (1).
[Sugg.: usare $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$].

3. Provare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

4. Provare direttamente e per induzione che $n^2 + n$ è un numero pari per ogni $n \in \mathbb{N}$.

5. Provare per induzione che

$$3^{2n+1} + 2^{n-1}$$

è un numero divisibile per 7 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

6. Provare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{7}{4} - \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \geq 2.$$

7. [Per casa] Provare per induzione che

$$4^n (n!)^2 \leq (2n+1)! \qquad \forall\, n \ \in \mathbb{N},$$

ove $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ indica il prodotto dei primi k numeri.

8. [Per casa] Provare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} k k! = (n+1)! - 1 \qquad \forall\, n \geq 2.$$