

Prova di autovalutazione - 13/12/2021

1) [4 punti] Per l'insieme $A = \{\frac{n}{n^2+n+5} : n = 1, 2, \dots\}$ si ha che

- (a) $\sup A = \frac{1}{7}$ e $\inf A$ è un minimo
- (b) le altre risposte sono false
- (c) $\sup A = \frac{1}{7}$ e $\inf A = 0$
- (d) $\sup A$ è un massimo e $\inf A$ non è un minimo**
- (e) $\sup A$ non è un massimo e $\inf A = 0$

2) [4 punti] Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n^6+n} - \sqrt{n^6+1}}}$ vale

- (a) \sqrt{e}
- (b) e^2
- (c) le altre risposte sono false
- (d) e^{-1}**
- (e) e

3) [4 punti] Le radici complesse dell'equazione $(z+i)^4 = \frac{32}{1+\sqrt{3}i}$ sono date da

- (a) $-i + 2e^{-\frac{\pi}{6}i + \frac{k\pi}{2}i}$ con $k = 0, 1, 2, 3$
- (b) $-i + 2e^{\frac{\pi}{6}i + \frac{k\pi}{4}i}$ con $k = 0, 1, 2, 3$
- (c) $-i + 2e^{-\frac{\pi}{12}i + \frac{k\pi}{2}i}$ con $k = 0, 1, 2, 3$**
- (b) $-i + 2e^{\frac{\pi}{3}i + \frac{k\pi}{4}i}$ con $k = 0, 1, 2, 3$
- (e) le altre risposte sono false

4) [4 punti] Il limite $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x) \tan(\frac{\pi x}{2})}{e^{2x-1} \log(2x)}$ vale

- (a) $-\frac{\pi}{2}$**
- (b) π
- (c) $\frac{\pi}{4}$
- (b) $-\pi$
- (e) le altre risposte sono false

1. (7 pt, a risposta aperta) Calcolare il seguente limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}(1 - \cos x) - \sin^2 x}{x^2(\sqrt{1+x^2} - 1)}$.

Abbiamo che mediante razionalizzazione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}(1 - \cos x) - \sin^2 x}{x^2(\sqrt{1+x^2} - 1)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}(1 - \cos x) - \sin^2 x}{x^4}.$$

Dagli sviluppi di Taylor

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^4), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^6)$$

per $x \rightarrow 0$ otteniamo che

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}(1 - \cos x) - \sin^2 x}{x^2(\sqrt{1+x^2} - 1)} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2[1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6)][\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^4)] - [x - \frac{x^3}{6} + O(x^6)]^2}{x^4} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4 - \frac{x^4}{12} + O(x^6) - [x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6)]}{x^4} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

2. (10 pt, a risposta aperta) Studiare la funzione $f(x) = \frac{4e^x}{1 - e^x}$ rispettando il seguente schema.

Determinare: a) il dominio di esistenza; b) eventuali simmetrie e periodicit ; c) il segno di f ed eventuali punti in cui $f = 0$

a) Dominio= $\{x \neq 0\}$ b) no simmetrie e periodicit  c) $\{f > 0\} = (-\infty, 0)$

Calcolare i limiti rilevanti per determinare asintoti verticali e obliqui.

Asintoti verticali: $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \mp \infty$

Asintoti orizzontali: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4.$

Calcolare f' , determinando punti di minimo/massimo locale/assoluto e gli intervalli di monotonia di f .

$$f'(x) = \frac{4e^x}{(1-e^x)^2}, \{f' > 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Calcolare f'' , determinando le regioni di convessit  e concavit  per f .

$$f''(x) = \frac{4e^x(1+e^x)}{(1-e^x)^3}, \{f'' > 0\} = (-\infty, 0)$$

Tracciare il grafico qualitativo di f .
Si ricava dalle informazioni sopra ottenute.