Analisi Matematica 1 - I Appello - Soluzioni

Esercizio 1) [8 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^{n-2}+(n-2)^n}{4n^n-3n!}$.
Mettendo in evidenza n^n e semplificando, dal confronto tra ordini di infinito e dal limite notevole di Nepero abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n-2}+(n-2)^n}{4n^n-3n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-2}+(1-\frac{2}{n})^n}{4-3\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{4e^2}.$$

Esercizio 2) [8 punti] Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2+\sin(e^n))}{3^n}$.
Poiché $n^2+\sin(e^n) \geq n^2-1 \geq 0$ per $n \geq 1$, abbiamo che la serie è a termini positivi. Possiamo applicare il criterio della radice $n-$esima e dai limiti notevoli della radici $n-$esime ottenere

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n(n^2+\sin(e^n))}{3^n}} = \frac{2}{3} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}\sqrt[n]{1+\frac{\sin(e^n)}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1,$$

che implica la convergenza della serie data. Osserviamo che $\sqrt[n]{\frac{3}{4}} \leq \sqrt[n]{1+\frac{\sin(e^n)}{n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{5}{4}}$ per $n \geq 2$ e dal criterio del confronto segue che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+\frac{\sin(e^n)}{n^2}} = 1$.

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \log(1+\frac{x^2}{2})}{1-\cos(2x^2)}$.
Dagli sviluppi di Taylor di coseno e logaritmo abbiamo che

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6), \quad \log(1+\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^6), \quad \cos(2x^2) = 1 - 2x^4 + O(x^8)$$

per $x \to 0$, che inseriti nel limite dato forniscono

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \log(1+\frac{x^2}{2})}{1-\cos(2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+O(x^6)}{1-[1-2x^4+O(x^8)]} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{12}+O(x^6)}{2x^4+O(x^8)} = -\frac{1}{24}.$$

Esercizio 4) [12 punti] Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x^2-x)^{\frac{3}{2}}}$.
Scrivendo $2-x^2-x = \frac{9}{4}-(x+\frac{1}{2})^2$ tramite completamento di quadrato, abbiamo che il cambio di variabile appropriato è $x+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sin t$, ossia $t = \arcsin\frac{2x+1}{3}$. L'integrale dato diventa nella nuova variabile

$$\frac{4}{9}\int \frac{\cos t}{\sqrt{\cos^6 t}}dt = \frac{4}{9}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{4}{9}\tan t + c$$

poiché $t = \arcsin \frac{2x+1}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ per definizione di arcsin e quindi $\cos t \geq 0$. Tornando nella variabile di partenza, dal Teorema di cambio di variabile abbiamo che

$$\int \frac{dx}{(2-x^2-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{9}\tan t\Big|_{t=\arcsin\frac{2x+1}{3}} + c = \frac{4}{9}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\Big|_{t=\arcsin\frac{2x+1}{3}} + c = \frac{2}{9}\frac{2x+1}{\sqrt{2-x^2-x}} + c.$$

Esercizio 5) [12 punti] Determinare la soluzione dell'equazione $x' = (1+x^2)\log t$ con $x(1) = 0$.

L'equazione puó essere risolta tramite il metodo di separazione delle variabile. Poiché $1+x^2 \geq 1 > 0$, posso dividere l'equazione per $1+x^2$ ed integrare tra 1 e t per ottenere

$$\arctan x(t) = \arctan x(s)\Big|_1^t = \int_1^t \frac{x'(s)}{1+x^2(s)}ds = \int_1^t \log s ds = t\log t - t + 1,$$

ove abbiamo usato la condizione iniziale $x(1) = 0$ e la primitiva di $\log s$ ottenuta integrando per parti:

$$\int \log s ds = s\log s - \int \frac{1}{s} s ds = s\log s - s + c.$$

La soluzione cercata è $x(t) = \tan(t\log t - t + 1)$.

Esercizio 6) [16 punti] Al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^1 \frac{\log^\alpha(1+x)\cos^2 x}{(\sin x + x^\beta \cos x)^2}dx$. Inoltre calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}dx$.

La funzione integranda è continua in $(0,1]$ poiché $\sin x + x^\beta \cos x > 0$ in $(0,1]$. Distinguendo il caso $\beta \geq 1$ dal caso $\beta < 1$, dai limiti notevoli noti abbiamo che l'integranda si comporta in zero come

$$\frac{\log^\alpha(1+x)\cos^2 x}{(\sin x + x^\beta \cos x)^2} \sim \frac{x^\alpha}{(x+x^\beta)^2} \sim \begin{cases} \frac{1}{x^{2-\alpha}} & \text{se } \beta \geq 1 \\ \frac{1}{x^{2\beta-\alpha}} & \text{se } \beta < 1 \end{cases}$$

e dal confronto asintotico l'integranda risulta quindi integrabile in senso improprio se $\alpha > 1$, $\beta \geq 1$ oppure $\alpha > 2\beta - 1$, $\beta < 1$. Per calcolare l'integrale indefinito operiamo il cambio di variabile $t = \tan x$ ottenendo

$$\int \frac{\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}dx = \int \frac{dt}{(t+1)^2(t^2+1)}\Big|_{t=\tan x}.$$

Decomponendo in fratti semplici abbiamo che

$$\int \frac{dt}{(t+1)^2(t^2+1)} = \frac{1}{2}\int [\frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{(t+1)^2}]dt = \frac{1}{2}\log\frac{|t+1|}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} + c$$

e quindi

$$\int \frac{\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}dx = \frac{1}{2}\log\frac{|\tan x + 1|}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\tan x + 1} + c = \frac{1}{2}\log|\sin x + \cos x| - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} + c.$$

Esercizio 7) [16 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = \log^3 x$.

Dominio: $\{x > 0\}$
Intersezione assi e segno di f: $(1, 0)$, $\{f > 0\} = (1, +\infty)$
Asintoti: verticale $x = 0$, no orizzontale o obliquo a $+\infty$ poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Monotonia di f: $f'(x) = \frac{3\log^2 x}{x}$, $\{f' > 0\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
Convessitá di f: $f''(x) = \frac{3\log x(2-\log x)}{x^2}$, $\{f'' > 0\} = (1, e^2)$.