Analisi Matematica 1 - II Appello - Soluzioni

Esercizio 1) [8 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \sin[2\pi n^2 \cos(\frac{1}{\sqrt{2}n})]$.
Dallo sviluppo di Taylor del coseno abbiamo

$$2\pi n^2 \cos(\frac{1}{\sqrt{2}n}) = 2\pi n^2 - \frac{\pi}{2} + O(\frac{1}{n^2})$$

per $n \to +\infty$. Siccome $2\pi n^2$ è un multiplo intero di 2π, dalla periodicitá della funzione seno otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \sin[2\pi n^2 \cos(\frac{1}{\sqrt{2}n})] = \lim_{n\to+\infty} \sin[-\frac{\pi}{2} + O(\frac{1}{n^2})] = -1.$$

Esercizio 2) [12 punti] Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{n+2}{n}} - e^{\frac{n+1}{n}}) \cos(\pi n)$.
Dallo sviluppo di Taylor dell'esponenziale abbiamo che

$$e^{\frac{n+2}{n}} - e^{\frac{n+1}{n}} - \frac{e}{n} = e(e^{\frac{2}{n}} - e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n^2})$$

e quindi la serie data puó essere decomposta come

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{n+2}{n}} - e^{\frac{n+1}{n}}) \cos(\pi n) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{n+2}{n}} - e^{\frac{n+1}{n}}) = e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{n+2}{n}} - e^{\frac{n+1}{n}} - \frac{e}{n}).$$

La serie data è quindi convergente perché la prima serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz mentre la seconda converge assolutamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n(e^{\frac{n+2}{n}} - e^{\frac{n+1}{n}} - \frac{e}{n})| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2} < +\infty.$$

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to+\infty} \log(1+e^{-x}) \left[e^x - (1+\frac{1}{x})^{x^2}\right]$.
Dal limite notevole del logaritmo abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \log(1+e^{-x}) \left[e^x - (1+\frac{1}{x})^{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^{-x})}{e^{-x}} \left[1 - e^{-x}(1+\frac{1}{x})^{x^2}\right] = 1 - \lim_{x\to+\infty} e^{-x+x^2\log(1+\frac{1}{x})}.$$

Dallo sviluppo di Taylor del logartimo abbiamo che $-x + x^2\log(1+\frac{1}{x}) = -\frac{1}{2} + O(\frac{1}{x})$ per $x \to +\infty$ e quindi vale che

$$\lim_{x\to+\infty} \log(1+e^{-x}) \left[e^x - (1+\frac{1}{x})^{x^2}\right] = 1 - e^{-\frac{1}{2}}.$$

Esercizio 4) [12 punti] Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}dx$.
Dal cambio di variabile $x^2+x=(x+t)^2$ otteniamo che

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}dx = 2\int \frac{t^2}{(2t-1)^2}dt\Big|_{t=\sqrt{x^2+x}-x}$$

poiché $x=\frac{t^2}{1-2t}$ e $dx=2\frac{t-t^2}{(2t-1)^2}dt$. Siccome

$$\int \frac{t^2}{(2t-1)^2}dt = \frac{1}{4}\int [1+\frac{4t-1}{(2t-1)^2}]dt = \frac{t}{4}+\frac{1}{4}\int [\frac{2}{2t-1}+\frac{1}{(2t-1)^2}]dt = \frac{t}{4}+\frac{1}{4}\log|2t-1|-\frac{1}{8}\frac{1}{2t-1},$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}dx &= \frac{t}{2}+\frac{1}{2}\log|2t-1|-\frac{1}{4}\frac{1}{2t-1}\Big|_{t=\sqrt{x^2+x}-x}\\ &= \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{2}+\frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2+x}-2x-1|-\frac{1}{4(2\sqrt{x^2+x}-2x-1)}.\end{aligned}$$

Esercizio 5) [12 punti] Determinare la soluzione di $x'=(\cos t)x+\cos^3 t$ con $x(0)=0$.
Siccome $A(t)=\int_0^t \cos s ds=\sin t$, abbiamo che

$$x(t)=e^{\sin t}\int_0^t e^{-\sin s}\cos^3 s ds = e^{\sin t}\int_0^{\sin t} e^{-r}(1-r^2)dr$$

mediante il cambio di variabile $r=\sin s$. Integrando per parti otteniamo che

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{\sin t}[-e^{-r}(1-r^2)\Big|_0^{\sin t}-2\int_0^{\sin t} re^{-r}dr] = -\cos^2 t+e^{\sin t}+2e^{\sin t}[e^{-r}r\Big|_0^{\sin t}-\int_0^{\sin t} e^{-r}dr]\\ &= -\cos^2 t-e^{\sin t}+2\sin t+2.\end{aligned}$$

Esercizio 6) [16 punti] Al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ discutere la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)dx$ e, grazie alla scomposizione $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$, calcolarne il valore per $\alpha=\frac{1}{2}$.
Poniamo $f(x)=x^{-\alpha}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)$. Dalla formula di de l'Hôpital osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^{-\alpha}}=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{-\alpha-1}}=1.$$

Dal criterio del confronto asintotico abbiamo che f è integrabile in $(0, +\infty)$ per $0 < \alpha < 1$ poiché l'integrabilitá in 0 vale per $\alpha < 1$ mentre a $+\infty$ per $\alpha > 0$.
Se $\alpha = \frac{1}{2}$ integriamo per parti ottenendo

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{\pi}{2} - \arctan x)dx = 2\sqrt{x}(\frac{\pi}{2} - \arctan x)\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx = 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx.$$

Poniamo $x = t^2$ e, tramite decomposizione in fratti semplici, otteniamo

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{\pi}{2} - \arctan x)dx = \int_0^\infty \frac{4t^2}{t^4+1}dt = \int_0^\infty [\frac{\sqrt{2}t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{\sqrt{2}t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}]dt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\log|\frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}|\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty [\frac{1}{(\sqrt{2}t - 1)^2 + 1} + \frac{1}{(\sqrt{2}t + 1)^2 + 1}]dt$$
$$= \sqrt{2}[\arctan(\sqrt{2}t - 1) + \arctan(\sqrt{2}t + 1)]\Big|_0^\infty = \sqrt{2}\pi.$$

Esercizio 7) [12 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = x(2-x)e^{-x}$.
Dominio: $\mathbb{R}$. Intersezione assi e segno di f: $(0,0)$, $(2,0)$ e $\{f > 0\} = (0,2)$
Asintoti: no orizzontale o obliquo a $-\infty$ e asintoto orizzontale $y = 0$ a $+\infty$ poiché

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Monotonia di f: $f'(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, $\{f' > 0\} = (-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, +\infty)$
Convessitá di f: $f''(x) = -e^{-x}(x^2 - 6x + 6)$, $\{f'' > 0\} = (3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$.