Analisi Matematica 1 - III Appello - Soluzioni

Esercizio 1) [8 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty}[n\log(n-1)-(n-e^{-n})\log n]$.
Dal limite notevole del logaritmo e per confronto tra ordini di infinito otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty}[n\log(n-1)-(n-e^{-n})\log n]=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1-n^{-1})}{n^{-1}}+e^{-n}\log n=-1+0=-1.$$

Esercizio 2) [12 punti] Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n+\cos n}$.
Tramite razionalizzazione abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n+\cos n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[n+\cos n][\sqrt{n^2+1}+n]}.$$

Poiché $a_n=\frac{1}{[n+\cos n][\sqrt{n^2+1}+n]}$ soddisfa

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n^{-2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{\cos n}{n}}\frac{1}{\sqrt{1+n^{-2}}+1}=\frac{1}{2},$$

dal confronto asintotico abbiamo che la serie data è convergente come la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{x}}-e^{\sin x}}{x^3}$.
Abbiamo i seguenti sviluppi di Taylor:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+O(x^5),\quad \sin^2 x=x^2-\frac{x^4}{3}+O(x^6),\quad \log(1+\sin^2 x)=x^2-\frac{5}{6}x^4+O(x^6)$$

per $x\to 0$. Mettendo in evidenza e^x ed usando il limite notevole dell'esponenziale otteniamo quindi che

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{x}}-e^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\frac{5}{6}x^3+O(x^5)}-e^{x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{5}{6}x^3+O(x^5)}-e^{-\frac{x^3}{6}+O(x^5)}}{x^3}=-\frac{2}{3}.$$

Esercizio 4) [12 punti] Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x+2}}$.
Dal cambio di variabile $x^2+3x+2=(x+t)^2$ otteniamo che

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x+2}}=\int\frac{2}{t^2-2}dt\Big|_{t=\sqrt{x^2+3x+2}-x}$$

poiché $x=\frac{t^2-2}{3-2t}$ e $dx=2\frac{3t-t^2-2}{(3-2t)^2}dt$. Siccome

$$\int\frac{2}{t^2-2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int[\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}]dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\log|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}|+c,$$

otteniamo che

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log |\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}|\Big|_{t=\sqrt{x^2+3x+2}-x} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \log |\frac{\sqrt{x^2+3x+2}-x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3x+2}-x+\sqrt{2}}| + c.$$

Esercizio 5) [12 punti] Determinare la soluzione di $x''+x=\tan t$ con $x(0)=2$ e $x'(0)=4$. Siccome $P(\lambda)=\lambda^2+1$ ha radici complesse coniugate $\pm i$, abbiamo che la soluzione generale dell'omogenea è data da $x_o(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$ per $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Dal metodo della variazione delle costanti cerchiamo una soluzione particolare della forma $x_p(t)=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t$, ove le funzioni $c_1(t)$ e $c_2(t)$ devono soddisfare il sistema:

$$c_1'\cos t+c_2'\sin t=0, \quad -c_1'\sin t+c_2'\cos t=\tan t.$$

Le soluzioni del sistema sono date da

$$c_1'=-\sin t\tan t=-\frac{\sin^2 t}{\cos t}, \quad c_2'=\cos t\tan t=\sin t$$

che tramite integrazione forniscono

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t-1}\cos t dt=\int \frac{s^2}{s^2-1}ds\Big|_{s=\sin t}=s+\frac{1}{2}\int [\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}]ds\Big|_{s=\sin t} \\ &= \sin t+\frac{1}{2}\log\frac{1-\sin t}{1+\sin t} \end{aligned}$$

mediante il cambio di variabile $s=\sin t$ e $c_2(t)=-\cos t$. Abbiamo quindi che $x_p(t)=\frac{1}{2}\cos t\log\frac{1-\sin t}{1+\sin t}$ e la soluzione generale è data da

$$x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{2}\cos t\log\frac{1-\sin t}{1+\sin t}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $x(0)=c_1=2$ e $x'(0)=c_2-1=4$ otteniamo che la soluzione cercata è data da

$$x(t)=2\cos t+5\sin t+\frac{1}{2}\cos t\log\frac{1-\sin t}{1+\sin t}.$$

Esercizio 6) [16 punti] Al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ discutere la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\log(\sin x)|^\alpha \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ e calcolarne il valore per $\alpha=0$.
Ponendo $f(x)=|\log(\sin x)|^\alpha\frac{\sin x}{1+\sin x}$ abbiamo che $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ mentre dai limiti notevoli di logaritmo e coseno otteniamo che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^{2\alpha}}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}(\frac{|\log\cos y|}{y^2})^\alpha=\frac{1}{2^{\alpha+1}}$$

mediante il cambio di variabile $y=\frac{\pi}{2}-x$. Siccome $(\frac{\pi}{2}-x)^{2\alpha}$ è integrabile in $\frac{\pi}{2}$ per $\alpha>-\frac{1}{2}$, dal criterio del confronto asintotico otteniamo che l'integrale improprio converge per $\alpha>-\frac{1}{2}$.

Mediante il cambio di variabile $t = \tan\frac{x}{2}$ e la decomposizione in fratti semplici, per $\alpha = 0$ calcoliamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int_0^1 \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2}dt = \int_0^1 [\frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{(t+1)^2}]dt = 2\arctan t + \frac{2}{t+1}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Esercizio 7) [12 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x}{\log x}$.
Dominio: $(0,1) \cup (1,+\infty)$. Intersezione assi: NO. Segno di f: $\{f > 0\} = (1,+\infty)$
Asintoti: no orizzontale o obliquo, asintoto verticale $x = 1$ poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Monotonia di f: $f'(x) = \frac{\log x - 1}{\log^2 x}$, $\{f' > 0\} = (e,+\infty)$
Convessitá di f: $f''(x) = \frac{2-\log x}{x\log^3 x}$, $\{f'' > 0\} = (1, e^2)$.