Analisi Matematica 1 - IV Appello - Soluzioni

Esercizio 1) [8 punti] Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\Big(\sqrt[n]{3^n+2^n}-3\Big)$.
Scrivendo l'espressione come

$$n^2\Big(\sqrt[n]{3^n+2^n}-3\Big) = 3n^2\Big(\sqrt[n]{1+\frac{2^n}{3^n}}-1\Big) = 3n^2\Big(e^{\frac{1}{n}\log(1+\frac{2^n}{3^n})}-1\Big),$$

dal limite notevole dell'esponenziale e del logaritmo abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\Big(\sqrt[n]{3^n+2^n}-3\Big) = \lim_{n\to+\infty} 3n\log(1+\frac{2^n}{3^n}) = 3\lim_{n\to+\infty} n\frac{2^n}{3^n} = 0$$

per confronto tra ordini di infinito.

Esercizio 2) [8 punti] Discutere la convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n+1}{n+2}\Big)^{n^3}$.
Poiché dal limite notevole del logaritmo abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\log(1-\frac{1}{n+2}) = -\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n+2} = -\infty,$$

otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{n+1}{n+2})^{n^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{n^2\log(1-\frac{1}{n+2})} = 0$$

e quindi la serie converge per il criterio della radice.

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log(1+x\sin x)+1-e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1}$.
Abbiamo i seguenti sviluppi di Taylor:

$$x\sin x = x^2-\frac{x^4}{6}+O(x^6),\quad e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+O(x^6),\quad \log(1+x\sin x) = x^2-\frac{2}{3}x^4+O(x^6)$$

per $x\to0$. Tramite razionalizzazione e dagli sviluppi sopra otteniamo quindi

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x\sin x)+1-e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1} = \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x\sin x)+1-e^{x^2}}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{7}{6}x^4+O(x^6)}{x^4} = -\frac{7}{6}.$$

Esercizio 4) [12 punti] Calcolare l'integrale indefinito $\int(2-x^2-x)^{-\frac{3}{2}}dx$.
Siccome $2-x^2-x = \frac{9}{4}-(x+\frac{1}{2})^2$, dal cambio di variabile $x+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sin t$ otteniamo che

$$\int(2-x^2-x)^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{9}\int\frac{dt}{\cos^2 t}\Big|_{t=\arcsin\frac{2x+1}{3}} = \frac{4}{9}\tan t+c\Big|_{t=\arcsin\frac{2x+1}{3}} = \frac{2}{9}\frac{2x+1}{\sqrt{2-x^2-x}}+c$$

dall'identitá $\tan t = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}$.

Esercizio 5) [12 punti] Determinare la soluzione di $x' = \sqrt{\frac{x}{t}}\sin(\sqrt{t})$ con $x(\frac{\pi^2}{4}) = 1$.
Poiché $x(\frac{\pi^2}{4}) \neq 0$, per continuitá possiamo supporre $x(t) \neq 0$ per tempi vicini a $\frac{\pi^2}{4}$ e quindi l'equazione puó essere scritta come

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}.$$

Integrando abbiamo che

$$2\sqrt{x(t)} - 2 = \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{t} \frac{x'(s)}{\sqrt{x(s)}}ds = \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{t} \frac{\sin(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}ds = -2\cos(\sqrt{s})\Big|_{\frac{\pi^2}{4}}^{t} = -2\cos(\sqrt{t})$$

e quindi $x(t) = (1 - \cos(\sqrt{t}))^2$.

Esercizio 6) [16 punti] Al variare di $\alpha > 0$ discutere la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\cos x}{\sin^\alpha x(3 - \cos x)}dx$ e determinarne l'integrale indefinito per $\alpha = 1$.
Ponendo $f(x) = \frac{1+2\cos x}{\sin^\alpha(x)(3-\cos x)}$ dal limite notevole del seno abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^{-\alpha}} = \frac{3}{2}$$

e quindi dal confronto asintotico l'integrale improprio converge esattamente per $0 < \alpha < 1$.
Per $\alpha = 1$ dobbiamo calcolare

$$\int \frac{1 + 2\cos x}{\sin x(3 - \cos x)}dx.$$

Mediante il cambio di variabile $t = \tan\frac{x}{2}$ e la decomposizione in fratti semplici, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + 2\cos x}{\sin x(3 - \cos x)}dx &= \int \frac{3 - t^2}{2t(2t^2 + 1)}dt\Big|_{t=\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int [-\frac{7t}{2t^2 + 1} + \frac{3}{t}]dt\Big|_{t=\tan\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{7}{8}\log\left(2\tan^2(\frac{x}{2}) + 1\right) + \frac{3}{2}\log|\tan\frac{x}{2}| + c.\end{aligned}$$

Esercizio 7) [16 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{xe^x}{x - 2}$.
Dominio: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Intersezione assi: $(0, 0)$. Segno di f: $\{f > 0\} = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
Asintoti: orizzontale $y = 0$ a $-\infty$, no orizzontale o obliquo a $+\infty$, verticale $x = 2$ poiché

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \pm\infty$$

Monotonia di f: $f'(x) = e^x\frac{x^2-2x-2}{(x-2)^2}$, $\{f' > 0\} = (-\infty, -\sqrt{3} + 1) \cup (\sqrt{3} + 1, +\infty)$
Convessitá di f: $f''(x) = e^x\frac{x^3-4x^2+12}{(x-2)^3}$. Ponendo $g(x) = x^3 - 4x^2 + 12$, abbiamo che $g'(x) = x(3x - 8)$ e quindi la funzione $g(x)$ parte da $-\infty$ per $x = -\infty$, cresce fino al valore $g(0) > 0$, decresce fino al valore $g(\frac{8}{3}) > 0$ per poi crescere a $+\infty$ per $x = +\infty$. Quindi $g(x)$ ha un unico zero $\alpha < 0$ ed inoltre $\alpha \in (-2, -1)$ poiché $g(-2) < 0 < g(-1)$. Quindi $\{f'' > 0\} = (-\infty, \alpha) \cup (2, +\infty)$.