Analisi Matematica 1 - III parte del I Esonero - Soluzioni

Esercizio 1) [10 punti] Mostrare per induzione che $n^3 + 5n$ è divisibile per 3 per ogni $n \in \mathbb{N}$, descrivendo accuratamente i passaggi dell'argomentazione.

Sia $\mathcal{P}_n$ la proposizione "$n^3 + 5n$ è divisibile per 3". La proposizione $\mathcal{P}_1$ è vera poiché 6 è divisibile per 3. Supponendo vera la proposizione $\mathcal{P}_n$, abbiamo che

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = (n^3 + 5n) + 3(n^2 + n + 2)$$

è divisibile per 3 come somma di due numeri divisibili per 3, e quindi la proposizione $\mathcal{P}_{n+1}$ è vera. Dal principio di induzione la famiglia di proposizioni $\mathcal{P}_n$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2) [20 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x \log x}{2 - \log x}$.
Dominio: $(0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$ poiché la funzione $\log x$ è definita per $x > 0$ e il denominatore non si annulla per $x \neq e^2$

Intersezione assi e segno di f: $(1, 0)$, $\{f > 0\} = (1, e^2)$

Asintoti:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = - \lim_{x \to 0^+} x = 0, \qquad \lim_{x \to (e^2)^\pm} f(x) = \mp\infty$$

implica che $f(x)$ ha un unico asintoto verticale $x = e^2$;

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{2 - \log x} = -1, \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2 - \log x} = -\infty$$

implica che $f(x)$ non ha un asintoto orizzontale o obliquo a $+\infty$

Monotonia di f: Abbiamo che $f'(x) = \frac{-\log^2 x + 2\log x + 2}{(2 - \log x)^2}$. Siccome $-t^2 + 2t + 2 > 0$ per $1 - \sqrt{3} < t = \log x < 1 + \sqrt{3}$, otteniamo che $\{f' > 0\} = (e^{1-\sqrt{3}}, e^{1+\sqrt{3}})$. In particolare la funzione $f(x)$ ha un minimo relativo in $e^{1-\sqrt{3}}$ e un massimo relativo in $e^{1+\sqrt{3}}$.

Convessitá di f: Abbiamo che $f''(x) = \frac{2}{x} \frac{4 - \log x}{(2 - \log x)^3}$ e quindi $\{f'' > 0\} = (0, e^2) \cup (e^4, +\infty)$. In particolare la funzione $f(x)$ è convessa per $0 < x < e^2$ e per $x > e^4$.

Esercizio 3) [10 punti] Determinare punti e valori di massimo/minimo relativo per la funzione $f(x) = x - \frac{2}{3}\log(1 + x^3)$ in $(-1, +\infty)$. Tenendo anche presente che $\sqrt{5} \sim 2,2$, discutere se si tratta o meno di massimi/minimi assoluti.

Abbiamo che

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\frac{3x^2}{1 + x^3} = \frac{1 + x^3 - 2x^2}{1 + x^3} = \frac{(x-1)(x^2 - x - 1)}{1 + x^3}$$

e quindi $\{f' > 0\} = (\frac{1-\sqrt{5}}{2}), 1) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$. In particolare $f(x)$ ha un minimo relativo in $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ e un massimo relativo in 1. Poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, abbiamo che $f(1) = 1 - \frac{2}{3}\log 2$ non è un valore di massimo assoluto ma solo relativo. Poiché $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$, abbiamo che il piú piccolo tra i valori $f(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}) = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{3}\log(3\pm\sqrt{5})$. Usando che $\sqrt{5} \sim 2,2$ possiamo verificare che $\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{3}\log(3-\sqrt{5}) < \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{3}\log(3+\sqrt{5})$ e quindi $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{3}\log(3-\sqrt{5})$ è il valore di minimo assoluto per $f(x)$.