# Analisi Matematica 1 - II Esonero - Soluzioni

**Esercizio 1)** [8 punti] Determinare lo sviluppo di Taylor al quart'ordine in $x_0 = 0$ di

$$f(x) = \log^2(1+x) - \log(1+x^2).$$

Dallo sviluppo $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$ per $x \to 0$, ricaviamo che

$$\log^2(1+x) = [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)]^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{4}x^4 + O(x^5), \quad \log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)$$

e quindi

$$f(x) = -x^3 + \frac{17}{12}x^4 + O(x^5)$$

per $x \to 0$.

**Esercizio 2)** [8 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0} \frac{3^{\cos x} - 3}{1 - \cos x}$.
Dalla formula di de l'Hopital abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{\cos x} - 3}{1 - \cos x} = -\log 3 \lim_{x\to 0} 3^{\cos x} = -3\log 3.$$

**Esercizio 3)** [8 punti] Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log(\frac{n+1}{n})$.
Dal limite notevole del logaritmo abbiamo che $\log(\frac{n+1}{n}) = \log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$ e quindi dal confronto asintotico la serie data ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, che è convergente. Pertanto la serie data converge.

**Esercizio 4)** [8 punti] Discutere la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1 - \cos(\sqrt[3]{x})}{x} dx$.
La funzione integranda è continua in $(0, 1]$ e quindi l'unico problema è in zero. Dal limite notevole del coseno abbiamo che $1 - \cos(\sqrt[3]{x}) \sim \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}$ per $x \to 0$ e quindi per la funzione integranda vale che

$$\frac{1 - \cos(\sqrt[3]{x})}{x} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \qquad \text{per } x \to 0.$$

Siccome la funzione $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ è integrabile in zero poiché $\frac{1}{3} < 1$, dal confronto asintotico otteniamo la convergenza dell'integrale improprio dato.

**Esercizio 5)** [12 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 2\cos x - 2}{\sqrt{1+x^4} - 1}$. Razionalizzando il denominatore abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 2\cos x - 2}{\sqrt{1+x^4} - 1} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 2\cos x - 2}{x^4}.$$

Dagli sviluppi di Taylor del seno e coseno otteniamo che

$$\sin^2 x = [x - x^3 + O(x^5)]^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^5), \quad \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

per $x \to 0$ e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 2\cos x - 2}{\sqrt{1+x^4} - 1} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{4} + O(x^5)}{x^4} = -\frac{1}{2}.$$

**Esercizio 6)** [12 punti] Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 e^n}{n^{2n}}$.

Abbiamo che il rapporto vale:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2 e^{n+1} n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}(n!)^2 e^n} = e(\frac{n}{n+1})^{2n} = e(1 + \frac{1}{n})^{-2n}$$

e quindi dal limite notevole del numero di Nepero otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}.$$

Siccome $\frac{1}{e} < 1$, dal criterio della radice $n-$esima deduciamo la convergenza della serie data.

**Esercizio 7)** [12 punti] Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{dx}{3 + \cos x - 4\sin x}$.

Poniamo $t = \tan\frac{x}{2}$. Dalle formule $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$ e $dx = \frac{2dt}{t^2+1}$ e dal teorema di cambio di variabile otteniamo che

$$\int \frac{dx}{3 + \cos x - 4\sin x} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 2}\Big|_{t=\tan\frac{x}{2}}.$$

La parabola $t^2 - 4t + 2$ si annulla in $2 \pm \sqrt{2}$ e quindi il denominatore si fattorizza come $(t - 2 - \sqrt{2})(t - 2 + \sqrt{2})$. Dal metodo dei fratti semplici abbiamo che

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t^2 - 4t + 2} &= \int \frac{dt}{(t-2-\sqrt{2})(t-2+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int [\frac{1}{t-2-\sqrt{2}} - \frac{1}{t-2+\sqrt{2}}]dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log|\frac{t-2-\sqrt{2}}{t-2+\sqrt{2}}| + c\end{aligned}$$

e quindi otteniamo che

$$\int \frac{dx}{3 + \cos x - 4\sin x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log|\frac{\tan\frac{x}{2} - 2 - \sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2} - 2 + \sqrt{2}}| + c.$$

**Esercizio 8)** [16 punti] Al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log^{\alpha}(1+x^2)}{x(x^2+x+1)^{\beta}}dx$. Inoltre calcolare, se esiste, il valore di $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

Dal limite notevole del logaritmo abbiamo che

$$\frac{\log^{\alpha}(1+x^2)}{x(x^2+x+1)^{\beta}} \sim \frac{1}{x^{1-2\alpha}}$$

per $x \to 0$ e quindi dal confronto asintotico la funzione integranda è integrabile in zero per $\alpha > 0$. Dai confronti tra ordini di infinito abbiamo invece che per ogni $\delta > 0$ fissato

$$\frac{\log^\alpha(1+x^2)}{x(x^2+x+1)^\beta} \sim 2^\alpha \frac{(\log x)^\alpha}{x^{2\beta+1}} << \frac{1}{x^{2\beta+1-\delta}}$$

per $x \to +\infty$ e quindi dal confronto asintotico la funzione integranda è integrabile all'infinito per $\beta > 0$: basta infatti scegliere $\delta > 0$ piccolo tale che $2\beta + 1 - \delta > 0$. Nel caso $\beta = 1$ l'integranda si riduce a

$$\frac{\log^\alpha(1+x^2)}{x} \sim 2^\alpha \frac{(\log x)^\alpha}{x}$$

e quindi dal confronto asintotico la funzione integranda non è integrabile all'infinito poiché $\alpha$ deve essere strettamente positivo per avere integrabilitá anche in zero. In conclusione, l'integrale improprio converge per $\alpha, \beta > 0$.

Per il secondo punto dell'esercizio poniamo $x^2 + x + 1 = (x+t)^2$, ossia scegliamo $t = \sqrt{x^2+x+1} - x$ o $x = \frac{t^2-1}{1-2t}$. Siccome $dx = -2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt$ dal cambio di variabile otteniamo che

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int \frac{dt}{t^2-1}\Big|_{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$

e dal metodo dei fratti semplici ricaviamo che

$$2\int \frac{dt}{t^2-1} = \int [\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}]dt = \log|\frac{t-1}{t+1}| + c.$$

Nella variabile di partenza e tramite razionalizzazione abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} &= \log|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1}|\Big|_1^\infty = \log|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x-1}{3[\sqrt{x^2+x+1}+x+1]}|\Big|_1^\infty \\ &= -\log 3 - \log(\frac{\sqrt{3}}{3(\sqrt{3}+2)}).\end{aligned}$$

**Esercizio 9)** [16 punti] Data l'equazione $x'' - x' - 2x = t - 1 + e^t$ determinare le soluzioni dell'equazione omogenea associata ed una soluzione particolare. Calcolare inoltre l'unica soluzione $x$ con dati iniziali $x(0) = \frac{9}{4}$, $x'(0) = 0$.
Risolvendo il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, otteniamo $\lambda = -1, 2$ e quindi le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono della forma $c_1e^{-t} + c_2e^{2t}$. Per similaritá cerchiamo la soluzione particolare della forma $at+b+ce^t$ (poiché $P(1), P(0) \neq 0$) che inserita nell'equazione produce $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$ e $c = -\frac{1}{2}$, ossia $\bar{x}(t) = -\frac{t}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^t$ è la soluzione particolare cercata. La soluzione generale dell'equazione data ha la forma $c_1e^{-t}+c_2e^{2t}+\bar{x}(t)$; imponendo le condizioni iniziali $x(0) = \frac{9}{4}$, $x'(0) = 0$ otteniamo $c_1 = c_2 = 1$ e quindi la soluzione richiesta è

$$x(t) = e^{-t} + e^{2t} - \frac{t}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^t.$$