Tutorato 2
Am110 - Analisi Matematica 1 (CdL in Matematica)
Analisi Matematica 1 - I modulo (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Pierpaolo Esposito
Tutori (matematica): Matteo Pandolfi, Michela Policella
Tutore (fisica): Daniele Tagliacozzo

18/10/2022

I parte
Principio di induzione

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti uguaglianze usando il principio di induzione:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$;
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{4k^2+2k-1}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{(2n+1)!}$;
5. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$.

Suggerimento: Per l'uguaglianza 5 potrebbe essere utile scomporre il denominatore e studiare due serie separate.

Esercizio 2. Dimostrare le seguenti disuguaglianze usando il principio di induzione:

1. $(1+a)^n \geq 1 + na$, $a \geq -1$, $\forall n \geq 0$;
2. $3^n \geq 2^n n$, $\forall n \geq 1$;
3. $n^2 > 2n + 1$, $\forall n \geq 3$;
4. $2^n > n^2$, $\forall n \geq 5$.

Suggerimento: Per la disuguaglianza 4 può essere utile applicare la disuguaglianza 3.

Esercizio 3. Dimostrare che $\forall n \geq 0$ il numero $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11.

II parte
Successioni

Esercizio 4. Risolvere i seguenti limiti di successioni:

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^5+5n^{1/2}-6n^{7/3}}{4n^{3/4}+2\sqrt{n}+\sqrt{n^9}}$;

2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}^n\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n}$;

3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n^5}\right)+\log\left(\sqrt{n}\right)}{2\log(n^6+n^2)}$;

4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3-n^2-1}-\sqrt{n^3-n^2+n}}{n-\sqrt{n^2-n}}$;

5. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)-\frac{1}{n}+n^{-6/5}}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)-\sinh\left(\frac{3}{n}\right)}$;

6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^2}+n^5}{n^n}$;

7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4n^2-2}-\sqrt{n^2+1}}{1-n}$;

8. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{n} - \log\left(\frac{n^2+2}{n+1}\right)$

   Suggerimento: Può essere utile, per n che tende ad infinito, usare la formula di Stirling
   $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

9. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^4+1}$;

10. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}{\log\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}$;

11. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n^4+1}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}$;

12. $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$;

13. $\lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right)$;

14. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-4}{n-1}\right)^n$;

15. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+n+1}\right)^{2n}$;

16. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^2}\right)^{n^2\log n}$;

17. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$;

18. $\lim_{n\to+\infty} n \left[\frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)-\log\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right]$.

Soluzioni

Esercizio 1. 1. Per $n=1$ si ha $2-1=1$.
Supponiamo che l'uguaglianza valga per n e verifichiamola per $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2\,(n+1)-1=n^2+2n+2-1=n^2+2n+1=(n+1)^2\,.$$

2. Per $n=1$ si ha $\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=\frac{2\cdot 3}{6}=1$.
Supponiamo che l'uguaglianza valga per n e verifichiamola per $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2&=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\\&=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}=\frac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6}=\\&=\frac{(n+1)\,((n+1)+1)\,(2(n+1)+1)}{6}.\end{aligned}$$

3. Per $n=1$ si ha $2-\frac{3}{2}=2-\frac{1+2}{2^1}$.
Supponiamo che l'uguaglianza valga per n e verifichiamola per $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2\cdot 2^n}=2-\frac{n+3}{2\cdot 2^n}=2-\frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}.$$

4. Per $n=1$ si ha $\frac{4+2-1}{(2+1)!}=\frac{6-1}{(2+1)!}=1-\frac{1}{(2+1)!}$. Supponiamo che l'uguaglianza valga per n e verifichiamola per $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{4k^2+2k-1}{(2k+1)!}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2+2k-1}{(2k+1)!}+\frac{4(n+1)^2+2(n+1)-1}{(2(n+1)+1)!}=\\&=1-\frac{1}{(2n+1)!}+\frac{4n^2+10n+5}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}=\\&=1-\frac{1}{(2(n+1)+1)!}\end{aligned}$$

5. Per $n=1$ si ha $\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}=\frac{1}{2+1}$.
Supponiamo che l'uguaglianza valga per n e verifichiamola per $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{4k^2-1}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\\&=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2(n+1)-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2(n+1)+1}=\\&=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+3}=\\&=\frac{2n+1}{2(2n+1)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+3}=\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+3-1}{2n+3}=\\&=\frac{n+1}{2(n+1)+1}.\end{aligned}$$

Esercizio 2.

1. Per $n = 0$ si ha $1 \geq 1$ (in realtà la disuguaglianza è un'uguaglianza).
   Supponiamo che la disuguaglianza valga per n e verifichiamola per $n+1$:

   $$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 \geq 1+a+na = 1+(n+1)a$$

   dove la prima disuguaglianza vale poiché $1 + a \geq 0$ e l'ultima poiché $na^2 \geq 0$.

2. Per $n = 1$ si ha $3 \geq 2$.
   Supponiamo che la disuguaglianza valga per n e verifichiamola per $n+1$:

   $$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq 3 \cdot 2^n \cdot n = (2+1) \cdot 2^n \cdot n = 2 \cdot 2^n \cdot n + 2^n \cdot n \geq 2 \cdot 2^n \cdot n + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}(n+1)$$

   dove l'ultima disuguaglianza vale poiché $n \geq 2$.

3. Per $n = 3$ si ha $3^2 = 9 > 2 \cdot 3 + 1$.
   Supponiamo che la disuguaglianza valga per n e verifichiamola per $n+1$:

   $$(n+1)^2 = n^2+2n+1 > 2n+1+2n+1 \geq 6+1+2n+1 = 2n+8 > 2n+3 = 2(n+1)+1$$

   dove la seconda disuguaglianza vale poiché $n \geq 3$ e l'ultima poiché $8 > 3$.

4. Per $n = 5$ si ha $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.
   Supponiamo che la disuguaglianza valga per n e verifichiamola per $n+1$:

   $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

   dove l'ultima disuguaglianza segue applicando il risultato ottenuto al punto 3.

Esercizio 3. La dimostrazione segue applicando il principio di induzione.
Per $n = 0$ si ha $9 + 2 = 11$ che è ovviamente divisibile per 11.
Supponiamo che la tesi valga per n e verifichiamola per $n+1$:

$$\begin{aligned} 9^{(n+1)+1} + 2^{6(n+1)+1} &= 9 \cdot 9^{n+1} + 2^6 \cdot 2^{6n+1} = 9 \cdot 9^{n+1} + 2^6 \cdot 2^{6n+1} + 9 \cdot 2^{6n+1} - 9 \cdot 2^{6n+1} = \\ &= 9(9^{n+1} + 2^{6n+1}) + 2^{6n+1}(2^6 - 9) \end{aligned}$$

che è divisibile per 11 in quanto somma di termini divisibili per 11.

Esercizio 4.

1. Poiché il limite si presenta come rapporto di somme algebriche di potenze di n, raccogliamo (sia al numeratore che al denominatore) l'infinito di ordine superiore (cioè la potenza di grado più alto):

   $$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^5 + 5n^{1/2} - 6n^{7/3}}{4n^{3/4} + 2\sqrt{n} + \sqrt{n^9}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^5\left(1 + \frac{5}{3n^{9/2}} - \frac{2}{n^{8/3}}\right)}{\sqrt{n^9}\left(\frac{4}{n^{15/4}} + \frac{2}{n^4} + 1\right)} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} 3\sqrt{n} \frac{\left(1 + \frac{5}{3n^{9/2}} - \frac{2}{n^{8/3}}\right)}{\left(\frac{4}{n^{15/4}} + \frac{2}{n^4} + 1\right)} = \lim_{n\to+\infty} 3\sqrt{n} = +\infty \end{aligned}$$

   dove, nel penultimo passaggio, abbiamo mandato a zero tutti i termini fra parentesi che presentano una potenza di grado negativo.

   Notiamo come in questo tipo di esercizi si può arrivare allo stesso risultato osservando che numeratore e denominatore sono asintotici agli infiniti di ordine superiore. Infatti:

$$\frac{3n^5+5n^{1/2}-6n^{7/3}}{4n^{3/4}+2\sqrt{n}+\sqrt{n^9}} \sim \frac{3n^5}{\sqrt{n^9}} = 3\sqrt{n}$$

da cui il risultato.

2. Utilizzando le proprietà delle potenze ed osservando come il limite è dato dal rapporto di somme algebriche di esponenziali di n di base minore di 1, raccogliamo (al numeratore e al denominatore) l'esponenziale di base maggiore (l'infinitesimo di ordine inferiore). Quindi:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{-n}-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n-\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right]}{\left(\frac{3}{4}\right)^n\left[1-\left(\frac{8}{15}\right)^n\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{10}{9}\right)^n = +\infty
\end{aligned}$$

dove, nel terzo passaggio, abbiamo tenuto conto del fatto che i termini fra parentesi quadre sono tutti infinitesimi.

3. Utilizzando le proprietà dei logaritmi possiamo riscrivere il limite nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\frac{1}{n^5}+\log\sqrt{n}}{2\log(n^6+n^2)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{-5\log n+\frac{1}{2}\log n}{2\log\left[n^6\left(1+\frac{1}{n^4}\right)\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-5\log n+\frac{1}{2}\log n}{2\log n^6+2\log\left(1+\frac{1}{n^4}\right)} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{-5\log n+\frac{1}{2}\log n}{12\log n+2\log\left(1+\frac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{9}{2}\log n}{12\log n\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}{6\log n}\right]} = -\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto del fatto che $\log\left(1+\frac{1}{n^4}\right)$ tende a $\log 1 = 0$ e che $0/\infty = 0$.

4. Sia numeratore che denominatore danno luogo a forme indeterminate, che si risolvono tramite i prodotti notevoli moltiplicando e dividendo per la somma delle radici:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3-n^2-1}-\sqrt{n^3-n^2+n}}{n-\sqrt{n^2-n}} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^3-n^2-1}-\sqrt{n^3-n^2+n}\right)\left(\sqrt{n^3-n^2-1}+\sqrt{n^3-n^2+n}\right)(n+\sqrt{n^2-n})}{\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^3-n^2-1}+\sqrt{n^3-n^2+n}\right)} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2-1-(n^3-n^2+n)}{n^2-(n^2-n)} \cdot \frac{\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)}{\left(\sqrt{n^3-n^2-1}+\sqrt{n^3-n^2+n}\right)} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{n+1}{n}\right)\left[\frac{n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{n^{3/2}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}\right]
\end{aligned}$$

considerando poi che

$$-\frac{n+1}{n}\left[\frac{n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{n^{3/2}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}\right]\sim-\frac{2(n+1)}{2n^{3/2}}$$

otteniamo il risultato, che è 0.

5. Ricordiamo che per x che tende a 0: $\log(1+x)\sim x$; $\sin x\sim x$; $\sinh x\sim x$.

   Ponendo qui $x=2/n^2; 2/n; 3/n$ rispettivamente, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)-\frac{1}{n}+n^{-6/5}}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)-\sinh\left(\frac{3}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n}+n^{-6/5}}{\frac{2}{n}-\frac{3}{n}}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{-1}{n}\left(-\frac{2}{n}+1-\frac{1}{n^{1/5}}\right)}{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1.$$

6. Utilizzando le proprietà delle potenze possiamo scrivere:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n^2}+n^5}{n^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n^2}+\left(n^2\right)^{\frac{5}{2}}}{n^n}.$$

   A questo punto raccogliamo il termine con l'ordine di infinito più alto al numeratore:

$$[...]=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n^2}\left(1+\frac{\left(n^2\right)^{\frac{5}{2}}}{e^{n^2}}\right)}{n^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^n}{n}\right)^n\frac{\left(1+\frac{\left(n^2\right)^{\frac{5}{2}}}{e^{n^2}}\right)}{n^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^n}{n}\right)^n=+\infty.$$

7. Procediamo subito con la razionalizzazione:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4n^2-2}-\sqrt{n^2+1}}{1-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4n^2-2}-\sqrt{n^2+1}}{1-n}\cdot\frac{\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-2-n^2-1}{(1-n)\left(\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-3}{(1-n)\left(\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}\right)}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{-3(n+1)(1-n)}{(1-n)\left(\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-3(n+1)}{\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}}.$$

   Trascurando le costanti sotto radice al denominatore (che diventano piccole rispetto ad n che tende ad infinito) e considerando che $\sqrt{n^2}=|n|=n$, possiamo riscrivere il limite come segue:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-3n}{3n}=-1.$$

8. Sostituendo otteniamo la forma indeterminata $[\infty-\infty]$.

   Per sostituire il fattoriale usiamo la formula di Stirling:

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

per n che tende ad infinito.
Si ottiene allora:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\log(n!)}{n}-\log\left(\frac{n^2+2}{n+1}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\log\left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]}{n}-\log\left(\frac{n^2+2}{n+1}\right)\right)=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\log\sqrt{2\pi n}+\log\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]}{n}-\log\left(\frac{n^2+2}{n+1}\right)\right)=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\log\sqrt{2\pi n}+n\log\left(\frac{n}{e}\right)}{n}-\log\left(\frac{n^2}{n}\right)\right)=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\log\sqrt{2\pi n}+n\log\left(\frac{n}{e}\right)}{n}-\log n\right)=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\log\left(\frac{n}{e}\right)-\log n\right)=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\log\left(\frac{n}{ne}\right)=$$
$$=\log\left(e^{-1}\right)=-1$$

dove nel quinto passaggio si è tenuto conto del fatto che n è un ordine di infinito più grande di $\log\sqrt{n}$ e quindi si è mandato il termine a zero.

9. Raccogliamo il termine di grado massimo sotto radice:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^4+1}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^4}\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{n}}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{4}{n}}\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{n^4\cdot\frac{1}{n^5}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{4\log n}{n}}\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{n^4\frac{1}{n^5}}=1$$

applicando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x_n}\right)^{x_n}=e^a$$

per ogni $a\in\mathbb{R}$ se $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

Si noti che lo stesso risultato può essere ottenuto applicando il teorema dei carabinieri, osservando che:

$$\sqrt[n]{n^4}\le\sqrt[n]{n^4+1}\le\sqrt[n]{2n^4}.$$

10. Procediamo moltiplicando e dividendo per $\frac{1}{e^n}\cdot\frac{3}{n^2}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}{\log\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{e^n}}\cdot\frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{3}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}{\frac{1}{e^n}}\cdot\frac{\frac{3}{n^2}}{\log\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{3}{n^2}}=0$$

applicando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+x_n\right)}{x_n}=1$$

se $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

11. Procediamo moltiplicando e dividendo per $\frac{1}{n^4} \cdot \frac{2}{n^4+1}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n^4+1}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} \cdot \frac{\frac{2}{n^4+1}}{\frac{2}{n^4+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n^4+1}\right)}{\frac{2}{n^4+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n^4}}{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)} \cdot \frac{\frac{2}{n^4+1}}{\frac{1}{n^4}} = 1\cdot 2\cdot 2 = 4$$

applicando i limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$$

se $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

12. Possiamo procedere in due diversi modi.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{n}\right)^n = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

applicando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$.

In alternativa, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{(-1)}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}} = \left(e^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

applicando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

13. Sostituendo otteniamo la forma indeterminata $[\infty - \infty]$.
Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+1}} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2-n^2-1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+1}} = 0.$$

Il limite può quindi essere risolto come segue:

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}} \cdot \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right) = 1$$

applicando il calcolo fatto all'inizio e il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1$$

se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

14. Osserviamo che $\frac{n-4}{n-1} \to 1$ come $1 + \frac{1}{x_n}$ con $x_n \to +\infty$.
Vogliamo raggiungere una forma del tipo $1 + \frac{1}{x_n}$ così da applicare il limite notevole.
Cerchiamo quindi x_n tale che $1 + \frac{1}{x_n} = \frac{n-4}{n-1}$.
Risolviamo l'equazione

$$1 + \frac{1}{x_n} = \frac{n-4}{n-1} \iff \frac{1}{x_n} = \frac{n-4}{n-1} - 1 \iff \frac{1}{x_n} = \frac{n-4-n+1}{n-1} \iff \frac{1}{x_n} = -\frac{3}{n-1}.$$

In questo modo abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-4}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{(-3)}{n-1}\right)^{n-1+1} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{(-3)}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{(-3)}{n-1}\right) = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

applicando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$ se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

15. Come per il punto precedente, risolviamo l'equazione

$$\frac{n^2+2}{n^2+n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \iff \frac{1}{x_n} = \frac{n^2+2}{n^2+n+1} - 1 \iff \frac{1}{x_n} = \frac{n^2+2-n^2-n-1}{n^2+n+1} \iff \frac{1}{x_n} = \frac{1-n}{n^2+n+1}.$$

Otteniamo quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+2n}{n^2+n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1-n}{n^2+n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+n+1}{1-n}}\right)^{2n} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+n+1}{1-n}}\right)^{\frac{n^2+n+1}{1-n} \cdot 2n \frac{1-n}{n^2+n+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

applicando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$ se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

16. Come per il punto precedente, risolviamo l'equazione

$$\frac{1}{x_n} = \frac{\sqrt{n^4+n}}{n^2} \iff \frac{1}{x_n} = \frac{\sqrt{n^4+n}-n^2}{n^2}.$$

Osserviamo inoltre che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}-n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}-n^2} \cdot \frac{\sqrt{n^4+n}+n^2}{\sqrt{n^4+n}+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(\sqrt{n^4+n}+n^2\right)}{n^4+n-n^2} = +\infty.$$

Otteniamo quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\sqrt{n^4+n}-n^2}{n^2}\right)^{n^2\log n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}-n^2}}\right)^{n^2\log n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}-n^2}}\right)^{n^2\log n \frac{\sqrt{n^4+n}+n^2}{\sqrt{n^4+n}+n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}-n^2}}\right)^{\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}+n^2}\left(\sqrt{n^4+n}+n^2\right)\log n} = e^0 = 1$$

osservando che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^4+n}+n^2\right)\log n = 0$$

e applicando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Si noti che lo stesso risultato può essere ottenuto procedendo come segue:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^2}\right)^{n^2\log n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}}{n^2}\right)^{n^2\log n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)^{n^2\log n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{n^2\log n}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3\frac{\log n}{2n}} = 1$$

applicando la stessa osservazione e lo stesso limite notevole della dimostrazione precedente.

17. Raccogliendo la n si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^{n\cdot n} = 0$$

applicando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n} = e^a$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$.

18. Studiamo numeratore e denominatore separatamente:

- $n\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)-\log\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + \frac{\log\left(1+\sin\left(-\frac{1}{n}\right)\right)}{\left(-\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow 1+1 = 2$ per $n \to +\infty$;
- $1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \left[1+\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right] \longrightarrow 1+1=2$ per $n \to +\infty$.

Ma allora il limite vale

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)-\log\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right] = \frac{2}{2} = 1$$

applicando i limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+x_n\right)}{x_n} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.