Tutorato 3
Am110 - Analisi Matematica 1 (CdL in Matematica)
Analisi Matematica 1 - I modulo (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica

Docente: Pierpaolo Esposito

Tutori (matematica): Matteo Pandolfi, Michela Policella

Tutore (fisica): Daniele Tagliacozzo

25/10/2022

Esercizio 1
Limiti di successioni

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6\cos(n)-n}{2\tan\left(\frac{1}{n}\right)+2n}$;

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2n^2-\pi\right)\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

   Suggerimento: Può essere utile ricordare la definizione di coefficiente binomiale
   $$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!};$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{\pi}\right)^n$;

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$;

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{7}{n^2+2n+3}\right)^{en^2}$;

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log\left(n^3+1\right)}{\log(2n^5-8)}$;

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^4-n\arctan(n)}{2\pi n^4-n^3+n^2+2}$;

8. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2-n\sin(n)\right)$;

9. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n-\sqrt{n^2-1}\right)$;

10. $\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\pi+\frac{1}{n}\right)$

    Suggerimento: Può essere utile ricordare la formula per il seno della somma di due angoli
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta);$$

11. $\lim_{n\to+\infty} (n-n\arctan(n));$

12. $\lim_{n\to+\infty} n^2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right);$

13. $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right);$

14. $\lim_{n\to+\infty} \sinh\left(\log(n^2)\right)\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

    Suggerimento: Può essere utile ricordare la definizione di seno iperbolico
$$\sinh(x):=\frac{e^x-e^{-x}}{2};$$

15. $\lim_{n\to+\infty} n^2 2^{-\sqrt{n}};$

16. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log(n!)}$

    Suggerimento: Può essere utile, per n che tende ad infinito, usare la formula di Stirling
$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n;$$

17. $\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\sqrt{n}}-2^n\right);$

18. $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}-e^{\frac{1}{n}}\right);$

19. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2-1}-\sqrt{n}};$

20. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right);$

21. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}+\sin\left(n^4\right)}{n^4}.$

Esercizio 2
Limiti

1. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+6x+9}$;
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \log(1+e^{-7x})$;
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin(x)+3}{x-\log(x)}$;
4. $\lim\limits_{x\to +3} \dfrac{x^2 \log(x)\sin(x-3)}{(e^{(x-3)}-1)(5x+1)}$;
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\dfrac{x+2}{x})^{\frac{x^4+1}{x^3+5}}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0^+} [\dfrac{x}{x^2+1}]^{\tan(x)}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;
9. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;
10. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x}}$;
12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$;
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{x}$;
15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos^2 x}{1-\cos x}$;
16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos x)}{x^2}$;
17. $\lim\limits_{x\to \infty} x \log\left(\dfrac{x+3}{x}\right)$;
18. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin\sqrt{x^2-1}}{\log(x+3\sqrt{x^2-1})}$;
19. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x \sin(e^{-x}\sin x)}{x}$;

20. $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{9+\sin(2^{\frac{1}{x}}-1)}-3)$;

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^2 \log(1+x)}$.

Esercizio 3
Continuità

1. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = \begin{cases} -(x+\alpha)^2 & x \geq 0 \\ \frac{1-e^{x^3}}{\sin^3 x} & -\pi < x < 0 \end{cases}$$
è continua nel punto $x_0 = 0$;

2. Studiare la continuità in $\mathbb{R}$ della funzione
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(x+1)}{x^2+x} & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ \frac{x^2+1}{(x-3)^2} & x < 0 \end{cases}$$

3. Stabilire se le funzioni sono continue nel punto indicato:

   (a) $\begin{cases} \frac{x-1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ in $x = 0$;

   (b) $\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ in $x = 2$.

4. Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione
$$\begin{cases} 2x^2 + 4x & \text{se } x \geq 1 \\ -x + k & \text{se } x < 1 \end{cases}$$
sia continua su $\mathbb{R}$;

5. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione
$$\begin{cases} \log(1+x) & \text{se } -1 < x \geq 0 \\ a \sin x + b \cos x & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
sia continua sul suo dominio;

6. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione
$$\begin{cases} \log(x + \beta^2) & \text{se } x > 0 \\ \frac{1-\cos(\alpha x)}{\arctan(x^2)} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
sia continua su $\mathbb{R}$;

Soluzioni

Esercizio 1

1. Si osservi che per $n \to +\infty$ si ha che
$$\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$
Ma allora
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6\cos(n) - n}{2\tan\left(\frac{1}{n}\right) + 2n} \sim \lim_{n\to+\infty} \frac{6\cos(n) - n}{\frac{2}{n} + 2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{6\cos(n)}{n} - 1\right)}{2n\left(\frac{1}{2n^2} + 1\right)} = -\frac{1}{2}$$
in quanto
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0.$$

2. Applicando la definizione di coefficiente binomiale si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \left(2n^2 - \pi\right) \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}} = \lim_{n\to+\infty} \left(2n^2 - \pi\right) \cdot \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \cdot \frac{4!\,(n-4)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{12\left(2n^2 - \pi\right)}{(n-2)\,(n-3)} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{12\left(2n^2 - \pi\right)}{n^2 - 5n + 6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{24n^2\left(1 - \frac{\pi}{2n^2}\right)}{n^2\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}\right)} = 24.$$

3. Poiché $\frac{3}{\pi} < 1$, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{\pi}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\pi^n} = 0.$$

4. Poiché $\frac{\pi}{3} > 1$ e $(-1)^n = \pm 1$, il limite
$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$$
non esiste.

5. Il risultato si ottiene applicando il limite notevole
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a$$
per ogni $a \in \mathbb{R}$ se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$:
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{7}{n^2 + 2n + 3}\right)^{en^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+2n+3}{7}}\right)^{\frac{n^2+2n+3}{7} \cdot \frac{7}{n^2+2n+3} \cdot en^2} = e^{7e}$$
in quanto
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7en^2}{n^2 + 2n + 3} = 7e.$$

6. Raccogliendo il termine di grado massimo e applicando le proprietà dei logaritmi si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(n^3+1\right)}{\log\left(2n^5-8\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\log\left(2n^5\left(1-\frac{4}{n^5}\right)\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\log(n)+\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\log(2)+5\log(n)+\log\left(1-\frac{4}{n^5}\right)} = \frac{3}{5}.$$

7. Raccogliendo il termine di grado massimo si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^4 - n\arctan(n)}{2\pi n^4 - n^3 + n^2 + 2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^4\left(1-\frac{\arctan(n)}{3n^3}\right)}{2\pi n^4\left(1-\frac{1}{2\pi n}+\frac{1}{2\pi n^2}+\frac{1}{\pi n^4}\right)} = \frac{3}{2\pi}$$

in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}.$$

8. Raccogliendo il termine di grado massimo si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 - n\sin(n)\right) = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\frac{\sin(n)}{n}\right) = +\infty$$

in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

9. Razionalizzando si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n-\sqrt{n^2-1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(n-\sqrt{n^2-1}\right)\cdot\frac{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)}{n+\sqrt{n^2-1}} = 0.$$

10. Applicando la formula di seno della somma si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\pi+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\sin(\pi)\cos\left(\frac{1}{n}\right)+\cos(\pi)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(-\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)\frac{1}{n} = -1$$

applicando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$$

se $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

11. Raccgliendo il termine di grado massimo si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n - n\arctan(n)\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\arctan(n)\right) = -\infty$$

in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\arctan(n)\right) = 1-\frac{\pi}{2} < 0.$$

12. Poiché
$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
per ogni n, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = +\infty.$$

13. Moltiplicando e dividendo per
$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$
si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n - (n+1))}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

14. Applicando la definizione di seno iperbolico si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \sinh\left(\log(n^2)\right)\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\log(n^2)} - e^{-\log(n^2)}}{2}\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - \frac{1}{n^2}}{2}\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 - 1}{2n^2} \cdot \frac{\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}$$
applicando il limite notevole
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a$$
per ogni $a \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

15. Applicando il limite notevole
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$$
per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $b > 1$, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 2^{-\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^4}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

16. Usando la formula di Stirling si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log(n!)} \sim \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}}{\log\left(\sqrt{2\pi}\right) + \frac{1}{2}\log(n) + n\log(n) - n} = 0$$
applicando il limite notevole
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$$
se $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

17. Applicando il limite notevole
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$$
per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $b > 1$, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\sqrt{n}} - 2^n\right) = \lim_{n\to+\infty} 2^n \left(\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} - 1\right) = -\infty.$$

18. Osservando che per $n \to +\infty$ si ha
$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1$$
si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty} n \left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{\frac{1}{n}}\right) \sim \lim_{n\to+\infty} n \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{1 - e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = -1$$
applicando il limite notevole
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1$$
se $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

19. Razionalizzando due volte si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2-1} - \sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt[4]{n^2-1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n^2-1} - n} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt[4]{n^2-1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^2-1} + n\right)}{n^2 - 1 - n^2} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} (-1)\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt[4]{n^2-1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^2-1} + n\right) = -\infty.$$

20. Utilizzando le proprietà dei logaritmi si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \log\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\log\left(1+\frac{2}{n}\right) - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\frac{\log\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} \cdot \frac{2}{n} - \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$
applicando il limite notevole
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1$$
se $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

21. Raccogliendo il termine $2^{\sqrt{n}}$ si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\sqrt{n}} + \sin\left(n^4\right)}{n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{\sin\left(n^4\right)}{2^{\sqrt{n}}}\right)}{n^4} = +\infty$$
poiché
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(n^4\right)}{2^{\sqrt{n}}} = 0.$$

Esercizio 2

1. Sostituendo direttamente nel limite $x = -3$ otteniamo la forma indeterminata [0/0]. Notiamo però come sia possibile riscrivere numeratore e denominatore nel seguente modo:
   $\lim_{x \to -3} \frac{(x+3)^3}{(x+3)^2}$
   Semplificando e sostituendo otteniamo il risultato, cioè 0;

2. Ricordando il limite notevole
   $\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$
   e notando come e^{-7x} tenda a 0 per x che tende a $+\infty$, possiamo riscrivere il limite nel seguente modo:
   $$\lim_{x \to +\infty} x^2 \log(1+e^{-7x}) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \log(1+e^{-7x}) \frac{e^{-7x}}{e^{-7x}}$$
   da cui, applicando il limite notevole visto prima:
   $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-7x} = 0$
   Dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la gerarchia degli infiniti;

3. Osserviamo che $x - \log(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

   Inoltre che
   $\frac{2}{x-\log(x)} < \frac{\sin(x)+3}{x-\log(x)} < \frac{4}{x-\log(x)}$
   Quindi, visto che $\lim_{x \to +\infty} (x - \log(x)) = +\infty$
   applicando il teorema dei carabinieri il limite proposto sarà pari a 0;

4. Possiamo scomporre il limite nel seguente modo:
   $$\lim_{x \to +3} \frac{x^2 \log(x) \sin(x-3)}{(e^{(x-3)}-1)(5x+1)} = \lim_{x \to +3} \frac{x^2 \log(x)}{(5x+1)} \lim_{x \to +3} \frac{\sin(x-3)}{(e^{(x-3)}-1)} =$$
   $$= \frac{9\log 3}{16} \lim_{x \to +3} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)} \frac{(x-3)}{(e^{(x-3)}-1)} = \frac{9\log 3}{16}$$
   Dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato i noti prodotti notevoli di funzioni seno ed esponenziale;

5. Il limite proposto porta alla forma indeterminata $[\infty(\infty - \infty)]$.

   Risolviamo moltiplicando e dividendo per la somma delle radici (razionalizzazione):
   $$\lim_{x \to +\infty} (x\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = \lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \frac{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} =$$
   $$\lim_{x \to +\infty} x \frac{[(x^2+1)-(x^2-1)]}{x[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}]} = 1$$
   Dove nel penultimo passaggio sono stati utilizzati il prodotto notevole somma e differenza al numeratore e il raccoglimento di una x al denominatore;

6. Il limite proposto può essere riscritto nella forma seguente:
   $$\lim_{x \to +\infty} (\frac{x+2}{x})^{\frac{x^4+1}{x^3+5}} = \lim_{x \to +\infty} exp[\frac{x^4+1}{x^3+5} \log(\frac{x+2}{x})]$$

A questo punto, considerando l'argomento dell'esponenziale, moltiplicando e dividendo per $\frac{2}{x}$ possiamo sfruttare il limite notevole del logaritmo e ottenere:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^3}\frac{2}{x}=2$

Dove nel penultimo passaggio abbiamo trascurato, mandando x a infinito, i termini costanti nella prima frazione.

Il risultato finale sarà quindi e^2;

7. Cominciamo con l'applicazione di esponenziale e logaritmo:

   $\lim_{x\to0^+}[\frac{x}{x^2+1}]^{\tan(x)}=\lim_{x\to0^+}e^{\tan(x)[\log(\frac{x}{x^2+1})]}$

   Concentriamoci sull'argomento dell'esponenziale, tralasciando la base. Essa si presenta nella forma intederminata $[0(-\infty)]$. Moltiplicando e dividendo per x possiamo applicare il limite notevole della tangente ed ottenere:

   $\lim_{x\to0^+}x\log(\frac{x}{x^2+1})=\lim_{x\to0^+}x[\log(x)-log(x^2+1)]=\lim_{x\to0^+}x\log(x)-\lim_{x\to0^+}x\log(x^2+1)$

   Il primo è un limite notevole e vale 0. Il secondo si risolve per sostituzione diretta e vale anch'esso 0.

   Quindi, in definitiva, il limite vale $e^0=1$;

8. Procediamo con il cambio di variabile $y^6=1+x$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{y\to1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to1}\frac{\cancel{(y-1)}(y^2+y+1)}{\cancel{(y-1)}(y+1)}=\frac{3}{2};$$

9. Procediamo con il cambio di variabile $y^2=x-3$:

$$\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{(x-7)(x+7)}=\lim_{y\to0}\frac{2-y}{(y^2-4)(y^2+10)}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{(2-y)}{(y-2)(y+2)(y^2+10)}=\lim_{y\to0}-\frac{1}{(y+2)(y^2+10)}=-\frac{1}{20};$$

10. Procediamo con il cambio di variabile $y^2=5-x$:

$$\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\lim_{y\to1}\frac{3-\sqrt{10-y^2}}{1-y^2}=$$

$$=\lim_{y\to1}\frac{3-\sqrt{10-y^2}}{1-y^2}\cdot\frac{3+\sqrt{10-y^2}}{3+\sqrt{10-y^2}}=\lim_{y\to1}\frac{9-10+y^2}{(1-y^2)(3+\sqrt{10-y^2})}=$$

$$=\lim_{y\to1}\frac{(y^2-1)}{(1-y^2)(3+\sqrt{10-y^2})}=\lim_{y\to1}-\frac{1}{3+\sqrt{10-y^2}}=-\frac{1}{6};$$

11. Utilizziamo il limite notevole $\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1$ per ogni $a\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{3}{3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot3\sqrt{x}=0;$$

12. Utilizziamo il fatto che $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x-\sin x}\cdot\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

13. Utilizziamo il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{\cos x})} = \frac{1}{2};$$

14. Utilizziamo il limite notevole $\frac{\sin(f(x))}{f(x)} \xrightarrow{f(x)\to 0} 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1;$$

15. Utilizziamo la formula di duplicazione del coseno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x}{1-\cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{1-\cos x} + \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x\cancel{(1-\cos x)}}{\cancel{(1-\cos x)}} + \frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{(1-\cos x)}} = 1;\end{aligned}$$

16. Qui utilizziamo due limiti notevoli:

$$\frac{\log(1+f(x))}{f(x)} \xrightarrow{f(x)\to 0} 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Procediamo dunque come segue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\cos x - 1)}{x^2} \cdot \frac{(\cos x - 1)}{(\cos x - 1)} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\cos x - 1)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2};\end{aligned}$$

17. Qui utilizziamo il limite notevole $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty} x \log\left(\frac{x+3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \log\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\right] = \log(e^3) = 3.$$

18. Vi sono due possibili strategie: la prima è effettuare il cambio di variabile $y^2 = x^2 - 1$ ed utilizzare i limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+ax)}{ax} = 1 \text{ per ogni } a \in \mathbb{R},$$

oppure agire direttamente utilizzando gli stessi limiti notevoli ma senza effettuare il cambio di variabile, osservando che nonostante il limite sia per x tendente ad 1^+ gli argomenti di seno e logaritmo tendono entrambi a 0: mostriamo questa seconda strategia risolutiva:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(\sqrt{x^2-1})}{\log(x+3\sqrt{x^2-1})} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(\sqrt{x^2-1})}{\log(x+3\sqrt{x^2-1})} \cdot \frac{3\sqrt{x^2-1}}{3\sqrt{x^2-1}} = \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(\sqrt{x^2-1})}{3\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{3\sqrt{x^2-1}}{\log(x+3\sqrt{x^2-1})} = \frac{1}{3};\end{aligned}$$

19. Qui osserviamo che $e^{-x}\sin x \xrightarrow{x\to\infty} 0$, quindi possiamo applicare il limite notevole $\dfrac{\sin f(x)}{f(x)} \xrightarrow{f(x)\to 0} 1$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x \sin(e^{-x}\sin x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x \sin(e^{-x}\sin x)}{x} \cdot \frac{e^{-x}\sin x}{e^{-x}\sin x} = 0.$$

20. Qui utilizziamo i due seguenti limiti notevoli:

$$\frac{\sin f(x)}{f(x)} \xrightarrow{f(x)\to 0} 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{a^{f(x)}-1}{f(x)} \xrightarrow{f(x)\to 0} \log a.$$

Procediamo dunque come segue:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{9+\sin(2^{\frac{1}{x}}-1)}-3\right)\cdot\frac{(9+\sin(2^{\frac{1}{x}}-1)+3)}{(9+\sin(2^{\frac{1}{x}}-1)+3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\sin(2^{\frac{1}{x}}-1)}{\sqrt{9+\sin(2^{\frac{1}{x}})}+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\sin(2^{\frac{1}{x}}-1)}+3}\cdot\frac{\sin(2^{\frac{1}{x}}-1)}{2^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \frac{\log 2}{6}.$$

21. Utilizziamo l'identità $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e i tre limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Procediamo come segue:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^2\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x\cos x}{\cos x\cdot x^2\cdot\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^2\cdot\log(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\log(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3

1. Notiamo facilmente come

   $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\alpha^2$

   e che (moltiplicando e dividendo per x^3 e utilizzando i limiti notevoli di esponenziale e seno)

   $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$

   Ciò significa che la funzione risulta continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha = \pm 1$. In tutti gli altri casi la funzione presenta una discontinuità in 0;

2. In quanto composizione di funzioni continue nel loro intervallo di definizione, f(x) risulta continua in tutto l'asse reale, salvo il punto x=0, che risulta essere un punto di salto. Infatti:

   $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

   $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1/9.$

3. (a) Poiché

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

   la funzione è discontinua in $x = 0$.

   (b) Poiché

   $$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^{pm}} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^\pm} (x+2) = 4$$

   la funzione è continua in $x = 2$.

4. Dobbiamo chiedere che

   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x),$$

   cioè che

   $$\lim_{x\to 1^-} (-x+k) = -1+k = 6 = \lim_{x\to 1^+} (2x^2+4x).$$

   Questo equivale alla condizione

   $$-1+k = 6 \Longleftrightarrow k = 7.$$

   La funzione è quindi continua su $\mathbb{R}$ soltanto per $k = 7$, mentre per tutti gli altri valori di k è discontinua.

5. Il dominio di definizione della funzione è dato da

   $$(-1,0] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right),$$

   quindi la continuità deve essere verificata nei punti 0 e $\frac{\pi}{2}$.
   Si ha:

   - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \log(1+x) = 0;$

- $\lim_{x \to 0^+} f(X) = \lim_{x \to 0^+} (a \sin x + b \cos x) = b$;
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (a \sin x + b \cos x) = a$;
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} x = \frac{\pi}{2}$

Per cui, la funzione $f(x)$ è continua sul suo dominio di definizione per $a = \frac{\pi}{2}$ e $b = 0$.