Tutorato 4
Am110 - Analisi Matematica 1 (CdL in Matematica)
Analisi Matematica 1 - I modulo (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Pierpaolo Esposito
Tutori (matematica): Matteo Pandolfi, Michela Policella
Turore (fisica): Daniele Tagliacozzo

03/11/2022

I parte
Matematica di base

Esercizio 1. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

a) $\dfrac{x^2-5x+8}{9-x^2}<0$;

b) $\dfrac{2x-1}{x-3}<\dfrac{x+1}{x-1}$;

c) $\dfrac{3}{x-2}<\dfrac{2x}{3+x}$;

d) $\dfrac{7x-4}{x^2-4}-\dfrac{2}{x-2}<\dfrac{7}{x+2}$;

e) $|x-1|=1-|x|$;

f) $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{4}{|x|-1}$;

g) $1-|1-x^2|>0$;

h) $1-||x|-1|>0$.

Esercizio 2. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni con esponenziali e logaritmi:

a) $\dfrac{3}{4}\cdot 5^x+7\cdot 3^x=\dfrac{2}{3}\cdot 5^x+10\cdot 3^x$;

b) $3^{2x-1}+3^{2x-1}=2\cdot 5^{2x-1}$;

c) $3 \cdot 7^x + 4 \cdot 3^x = 7^x + 10 \cdot 3^x$;

d) $4^{\frac{x}{2}} + 4^{2x} = 9^{x+1} + 2^x$;

e) $\left(\dfrac{3^x+3}{3^x-4}\right)^2 - 5\left(\dfrac{3^x+3}{3^x-4}\right) = 0$;

f) $\dfrac{4^{x+2} - 2 \cdot 4^{x+1}}{2} = 16^{x+1}$;

g) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{x}{x+1}} - 16^{\frac{x}{x-1}} < 0$;

h) $\begin{cases} (\log^2 x - 4)(2^{\sqrt{x}} - 2^x) \leq 0 \\ \log^4 x - 5\log^2 x \geq -4 \end{cases}$;

i) $\dfrac{\log x - \frac{1}{2}}{\log^2 x - \log x - 2} < 0$.

Esercizio 3. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni trigonometriche:

a) $3\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x < 3\sin x - \sqrt{3}\cos x$;

b) $\dfrac{2\tan x + 2}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2}} \leq 0$;

c) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \geq 0$;

d) $\dfrac{2\tan x + 2}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2}} \leq 0$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.

II parte
Derivate e studi di funzione

Esercizio 4. Date le seguenti funzioni, studiarne dominio, simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti, punti critici ed intervalli di monotonia, e disegnarne un grafico qualitativo:

1. $f(x) = (x^2 - 1)e^x$;
2. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x}$;
3. $f(x) = |x|^{|x|}$ in $x \neq 0$;
4. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{3x}{1 + x^2}\right)$;
5. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\sqrt{x}}}$;
6. $f(x) = \cos(x) \cdot 3^{-\frac{1}{\cos(x)}}$;
7. $f(x) = |1 - x| \log(x)$;
8. $f(x) = \arccos\left|x^2 - 3x + 2\right|$.

Soluzioni

Esercizio 1. a) Studiamo numeratore e denominatore separatamente:

- $x^2 - 5x + 8 > 0$ per ogni x;
- $9 - x^2 > 0 \iff -3 < x < 3$.

Pertanto, facendo lo studio del segno si ha che la soluzione è

$$x < -3 \ \wedge \ x > 3.$$

b)

$$\frac{2x-1}{x-3} < \frac{x+1}{x-1} \iff \frac{(2x-1)(x-1) - (x+1)(x-3)}{(x-3)(x-1)} < 0 \iff \frac{x^2 - x + 4}{(x-3)(x-1)} < 0.$$

Studiamo numeratore e denominatore separatamente:

- $x^2 - x + 4 > 0$ per ogni x;
- $x - 3 > 0 \iff x > 3$;
- $x - 1 > 0 \iff x > 1$.

Pertanto, facendo lo studio del segno si ha che la soluzione è

$$1 < x < 3.$$

c)

$$\frac{3}{x-2} < \frac{2x}{3+x} \iff \frac{3(3+x) - 2x(x-2)}{(x-2)(3+x)} < 0 \iff \frac{-2x^2 + 7x + 9}{(x-2)(3+x)} < 0.$$

Studiamo numeratore e denominatore separatamente:

- $-2x^2 + 7x + 9 > 0 \iff -1 < x < \frac{9}{2}$;
- $x - 2 > 0 \iff x > 2$;
- $3 + x > 0 \iff x > -3$.

Pertanto, facendo lo studio del segno si ha che la soluzione è

$$x < -3 \ \wedge \ -1 < x < 2 \ \wedge \ x > \frac{9}{2}.$$

d)

$$\frac{7x-4}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} < \frac{7}{x+2} \iff \frac{(7x-4)}{x^2-4} - \frac{2(x+2) + 7(x-2)}{x^2-4} < 0 \iff \frac{x-3}{x^2-4} > 0.$$

Studiamo numeratore e denominatore separatamente:

- $x - 3 > 0 \iff x > 3$;
- $x^2 - 4 > 0 \iff x < -2 \ \wedge \ x > 2$.

Pertanto, facendo lo studio del segno si ha che la soluzione è

$$-2 < x < 2 \ \wedge \ x > 3.$$

e) $|x-1| = 1 - |x|$. Osserviamo innanzitutto che

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ 1-x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

e

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Bisogna, pertanto, studiare l'equazione in tre casi diversi:

- $x \geq 1$;
- $0 \leq x < 1$;
- $x < 0$.

Se $x \geq 1$, l'equazione diventa

$$x - 1 = 1 - x \Longleftrightarrow x = 1.$$

Se $0 \leq x < 1$, l'equazione diventa

$$1 - x = 1 - x,$$

la quale è verificata per ogni x.

Se $x < 0$, l'equazione diventa

$$1 - x = 1 + x \Longleftrightarrow x = 0.$$

La soluzione finale dell'equazione è, pertanto, $0 \leq x \leq 1$.

f) Per definizione di valore assoluto bisogna studiare i casi $x \geq 0$ e $x < 0$.

Nel caso $x \geq 0$ l'equazione diventa

$$\frac{1}{x+1} = \frac{4}{x-1} \Longleftrightarrow \frac{x-1-4(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 0 \Longleftrightarrow -3x-5 = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

che non è accettabile nel caso $x \geq 0$.

Nel caso $x < 0$, l'equazione diventa

$$\frac{1}{x+1} = \frac{4}{-x-1} \Longleftrightarrow \frac{-x-1-4(x+1)}{(x+1)(-x-1)} = 0 \Longleftrightarrow x = -5.$$

La soluzione finale dell'equazione è, pertanto, $x = -5$.

g) La disequazione è equivalente a $|1 - x^2| < 1$, ossia al sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 < 1 \\ 1 - x^2 > -1 \end{cases},$$

il quale a sua volta equivale a

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}. \end{cases}$$

La soluzione della disequazione è, pertanto, $-\sqrt{2} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{2}$.

h) La disequazione è equivalente a $||x| - 1| < 1$, ossia al sistema

$$\begin{cases} |x| - 1 < 1 \\ |x| - 1 > -1 \end{cases},$$

il quale equivale a

$$\begin{cases} |x| < 2 \\ |x| > 0 \end{cases},$$

ossia

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

La soluzione della disequazione è, pertanto, $-2 < x < 0$, $0 < x < 2$.

Esercizio 2. Si ricordi la formula del cambiamento di base per i logaritmi:

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}.$$

a) Svolgendo i conti si ottiene:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4} \cdot 5^x + 7 \cdot 3^x = \frac{2}{3} \cdot 5^x + 10 \cdot 3^x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{12} \cdot 5^x = 3 \cdot 3^x \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{36} \cdot 5^x = 3^x \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{5}{3}\right)^x = 36 \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad x = \log_{\frac{5}{3}}(36) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\log(36)}{\log\left(\frac{5}{3}\right)} \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad x = \frac{2\log(6)}{\log 5 - \log 3}. \end{aligned}$$

b) Svolgendo i conti si ottiene:

$$\begin{aligned} &3^{2x-1} + 3^{2x-1} = 2 \cdot 5^{2x-1} \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot 3^{2x-1} = 2 \cdot 5^{2x-1} \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

c) Svolgendo i conti si ottiene:

$$3 \cdot 7^x + 4 \cdot 3^x = 7^x + 10 \cdot 3^x \implies 2 \cdot 7^x = 6 \cdot 3^x \implies$$
$$\implies \left(\frac{7}{3}\right)^x = 3 \implies x = \log_{\frac{7}{3}}(3) \implies$$
$$\implies x = \frac{\log(3)}{\log(7) - \log(3)}.$$

d) Svolgendo i conti si ottiene:

$$4^{\frac{x}{2}} + 4^{2x} = 9^{x+1} + 2^x \implies 2^2 + 16^x = 9 \cdot 9^x + 2^x \implies$$
$$\implies 16^x = 9 \cdot 9^x \implies x = \log_{16}(9 \cdot 9^x) \implies$$
$$\implies x = \log_{16}(9) + \log_{16}(9^x) \implies x = \log_{16}(9) + \frac{x}{\log_9(16)} \implies$$
$$\implies x\left(1 - \frac{1}{\log_9(16)}\right) = \log_{16}(9) \implies x = \log_{16}(9)\left(\frac{\log_9(16)}{\log_9(16) - 1}\right) \implies$$
$$\implies x = \frac{1}{\cancel{\log_9(16)}}\left(\frac{\cancel{\log_9(16)}}{\log_9(16) - 1}\right) \implies x = \frac{\log(9)}{\log(16) - \log(9)} \implies$$
$$\implies x = \frac{\log(3)}{2\log(2) - \log(3)};$$

e) Svolgendo i conti si ottiene:

$$\left(\frac{3^x + 3}{3^x - 4}\right)^2 - 5\left(\frac{3^x + 3}{3^x - 4}\right) = 0 \implies \left(\frac{3^x + 3}{3^x - 4}\right)\left(\frac{3^x + 3}{3^x - 4} - 5\right) = 0.$$

Separando i due casi otteniamo:

$$\frac{3^x + 3}{3^x - 4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_3(-3),$$

il che è assurdo perché il logaritmo è ben definito solo se l'argomento è positivo. Nell'altro caso otteniamo:

$$\frac{3^x + 3}{3^x - 4} - 5 = 0 \implies \frac{3^x + 3 - 5(3^x - 4)}{3^x - 4} = 0 \implies$$
$$\overset{(*)}{\implies} -4 \cdot 3^x + 23 = 0 \implies 3^x = \frac{23}{4} \implies$$
$$\implies x = \log_3\left(\frac{23}{4}\right) \implies x = \log_3(23) - \log_3(4) \implies$$
$$\implies x = \frac{\log(23) - \log(4)}{\log(3)}.$$

Si osservi che nell'implicazione (*) abbiamo cancellato il denominatore, tuttavia ciò può essere fatto solo tenendo conto delle condizioni di esistenza, le quali imponevano $x \neq \log_3(4)$;

f) Svolgendo i conti si ottiene:

$$\frac{4^{x+2} - 2 \cdot 4^{x+1}}{2} = 16^{x+1} \implies \frac{2^{2(x+2)}}{2} - 2^{2(x+1)} = 2^{4(x+1)} \implies$$
$$\implies 2^{2x+3} - 2^{2x+2} = 2^{4x+4} \implies 2 \cdot 2^{2x+2} - 2^{2x+2} = 2^{4x+4} \implies$$
$$\implies 2^{2x+2} = 2^{4x+4} \implies 2x + 2 = 4x + 4 \implies$$
$$\implies x = -1;$$

g) Svolgendo i conti si ottiene:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{x}{x+1}} - 4^{\frac{2x}{x-1}} < 0 \quad \Longrightarrow \quad 4^{\frac{x}{x+1}} < 4^{\frac{2x}{x-1}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{x+1} < \frac{2x}{x-1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{-x^2-3x}{(x+1)(x-1)} < 0.$$

Studiando separatamente numeratore e denominatore si ottiene che:

$$\text{N: } -3 < x < 0 \qquad \text{e} \qquad \text{D: } x < -1 \cup x > 1,$$

da cui si ottiene che il risultato della disequazione è

$$x < -3 \cup -1 < x < 0 \cup x > 1;$$

h) Risolviamo separatamente le due equazioni: nella prima separiamo il prodotto e studiamo separatamente i due fattori. Il primo ci dà il seguente risultato:

$$\log^2 -4 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \log^2 x \geq 4 \quad \Longrightarrow \quad \log x \leq -2 \cup \log x \geq 2,$$

da cui

$$x \leq e^{-2} \cup x \geq e^2.$$

Il secondo fattore, invece, ci dà il seguente risultato:

$$2^{\sqrt{x}} - 2^x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} \geq x \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x}(1-x) \geq 0,$$

da cui

$$0 < x \leq 1,$$

dove stiamo considerando il fatto che il primo fattore ci impone di considerare solo le x positive per il dominio della funzione logaritmo.
A questo punto, facendo il grafico dei segni, si ottiene che il risultato della prima disequazione è

$$e^{-2} \leq x \leq 1 \cup x \geq e^2.$$

Vediamo la seconda disequazione. Trattandola come un trinomio caratteristico otteniamo

$$\log^4 x - 5\log^2 x \geq -4 \quad \Longrightarrow \quad (\log^2 x - 4)(\log^2 x - 1) \geq 0.$$

Separando i fattori otteniamo che il primo è verificato per $x \leq e^{-2} \cup x \geq e^2$ e il secondo per $x \leq e^{-1} \cup x \geq e$. Mettendo assieme la seconda disequazione ha per risultato

$$0 \leq e^{-2} \cup e^{-1} \leq x \leq e \cup x \geq e^2.$$

Mettendo assieme le soluzioni delle due disequazioni si ottiene che la soluzione del sistema è:

$$x = e^{-2} \cup e^{-1} \leq x \leq 1 \cup x \geq e^2.$$

i) Risolviamo separatamente il numeratore e il denominatore: dal primo otteniamo

$$\log x > \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x \geq \sqrt{e}.$$

Dalla seconda, invece, passando all'equazione associata ed utilizzando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado ricavando il logaritmo, otteniamo

$$\log^2 x - \log x - 2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log x < -1 \cup \log x > 2 \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < e^{-1} \cup x > e^2,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il dominio del logaritmo è $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$0 < x < e^{-1} \cup \sqrt{e} < x < e^2.$$

Esercizio 3. a) Svolgendo i conti otteniamo:

$$3 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x < 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{3} \cos x(\sqrt{3} \sin x - \cos x) - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) <$$
$$\Longrightarrow \quad (\sqrt{3} \cos x - \sqrt{3})(\sqrt{3} \sin x - \cos x) < 0;$$

b) Analizziamo separatamente i due fattori. Dal primo otteniamo

$$\sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos x > 1,$$

il che è impossibile in quanto $\cos x \in [-1, 1]$ sempre. Dal secondo invece otteniamo, utilizzando la parametrizzazione $t = \tan \frac{x}{2}$,

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{3} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) > 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{2\sqrt{3}t - 1 + t^2}{1+t^2} > 0.$$

Il denominatore è sempre positivo, mentre dal numeratore otteniamo, passando all'equazione associata ed utilizzando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado,

$$-\sqrt{3} - 2 < t < -\sqrt{3} + 2 \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt{3} - 2 < \tan \frac{x}{2} < -\sqrt{3} + 2,$$

di conseguenza il risultato, limitandosi all'intervallo $[0, 2\pi]$, sarà

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \cup \frac{7\pi}{6} < x < 2\pi.$$

Unendo i due casi si ottiene che il risultato finale è

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi.$$

b) Verifichiamo subito le condizioni di esistenza al denominatore:

$$2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{2} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \neq \frac{pi}{2} + k\pi.$$

Risolviamo ora separatamente numeratore e denominatore. Dal primo otteniamo

$$2 \tan x + 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \tan x \geq -1,$$

da cui $k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Dal secondo otteniamo invece, ponendo $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$ e risolvendo di conseguenza $2\sin y - \sqrt{2} > 0$, che

$$-\frac{\pi}{2} + 4k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 4k\pi.$$

Mettendo tutto insieme, e dovendo considerare la parte negativa, si ottiene

$$4k\pi - 2\pi \leq x < -\frac{3}{2}\pi + 4k\pi \cup 4k\pi - \frac{5}{4}\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} + 4k\pi \cup 4k\pi - \frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4} + 4k\pi \cup$$
$$\cup\, 4k\pi + \frac{3}{4}\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi + 4k\pi \cup 4k\pi + \frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi + 4k\pi;$$

c) Risolviamo l'equazione di secondo grado associata ricavando $\sin x$:

$$\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases},$$

da cui

$$\sin x \leq \frac{1}{2} \cup \sin x \geq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi;$$

d) Imponiamo le condizioni di esistenza (ovvero imponiamo la tangente diversa da $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$) ed otteniamo:

$$x \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi.$$

Utilizzando gli angoli associati otteniamo:

$$-\cot x \geq -\tan x \qquad \Longrightarrow \qquad \cot x \leq \tan x \quad \frac{1}{\tan x} \leq \tan x,$$

da cui usando il fatto che $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$,

$$\frac{\cos x}{\sin x} \leq \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} \leq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x \cos x}.$$

A questo punto chiamiamo in causa le formule di duplicazione di seno e coseno e scriviamo

$$\frac{2\cos 2x}{\sin 2x} \leq 0 \quad \tan 2x \leq 0,$$

da cui il risultato della disequazione, ovvero

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + k\pi \leq x \leq \pi + 2\pi.$$

Esercizio 4. 1. $f(x) = (x^2 - 1)e^x$:

- *Dominio*: $\mathbb{R}$: la funzione è infatti il prodotto tra un'esponenziale ed un polinomio, i quali hanno entrambi dominio pari ad $\mathbb{R}$;
- *Simmetrie*: Iniziamo verificando la parità:

$$f(-x) = ((-x)^2 - 1)e^{-x} = (x^2 - 1)e^{-x} \neq f(x).$$

La funzione non è pari. D'altra parte, poiché

$$-f(x) = -(x^2 - 1)e^x \neq f(-x),$$

si ha che la funzione non è nemmeno dispari;

- *Intersezioni con gli assi*: Iniziamo vedendo l'intersezione con l'asse y: calcoliamo il valore dunque di $f(x)$ per $x = 0$. Si ottiene

$$f(0) = (0 - 1)e^0 = -1.$$

L'intersezione con l'asse y della funzione è nel punto $(0, -1)$. Poniamo ora $f(x) = 0$ e calcoliamo l'intersezione della funzione con l'asse x:

$$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x^2 - 1)e^x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Vi sono dunque due punti di intersezione della funzione con l'asse x, ovvero i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$;

- *Segno*: Studiamo $f(x) \geq 0$:

$$(x^2 - 1)e^x > 0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ e^x > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x < -1 \cup x > 1 \\ \forall\ x \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Da qui deduciamo che la funzione è positiva negli intervalli

$$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty);$$

- *Limiti*: Non essendoci punti di discontinuità, gli unici limiti da verificare sono quelli per x tendente a $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x^2 - 1)e^x = +\infty;$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 1)e^x = 0.$$

Da qui si deduce che la funzione ammette un asintoto orizzontale in $y = 0$. Verifichiamo anche eventuali asintoti obliqui per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{(x^2 - 1)e^x}{x} = +\infty.$$

Non ci sono asintoti obliqui.

- *Punti critici*: Per studiare tali punti dobbiamo calcolare la derivata della funzione. Qui si ricorre alla formula per la derivazione di un prodotto, la quale affermava che

$$(g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x).$$

Si ottiene dunque

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[(x^2 - 1)e^x] = 2xe^x + (x^2 - 1)e^x = e^x(x^2 + 2x - 1).$$

Poniamo la derivata della funzione uguale a zero e troviamo i punti critici:

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^x(x^2 + 2x - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} e^x = 0 \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \nexists\ x \in \mathbb{R} \\ x = -1 - \sqrt{2} \cup x = -1 + \sqrt{2} \end{cases} .$$

I punti critici sono quindi i punti corrispondenti a $x = -2$ e $x = 1$, ovvero

$$(-1 - \sqrt{2}, f(-1 - \sqrt{2})) = (-1 - \sqrt{2}, 2(1 + \sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}) \qquad \text{e}$$
$$(-1 + \sqrt{2}, f(-1 + \sqrt{2}) = (-1 + \sqrt{2}, 2(1 - \sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}});$$

- *Intervalli di monotonia*: Studiamo il segno della derivata prima: negli intervalli in cui questa è positiva la funzione è crescente, altrimenti è decrescente.

$$f'(x) > 0 \implies e^x(x^2+2x-1) > 0 \implies \begin{cases} e^x > 0 \\ x^2+2x-1 > 0 \end{cases} \implies$$

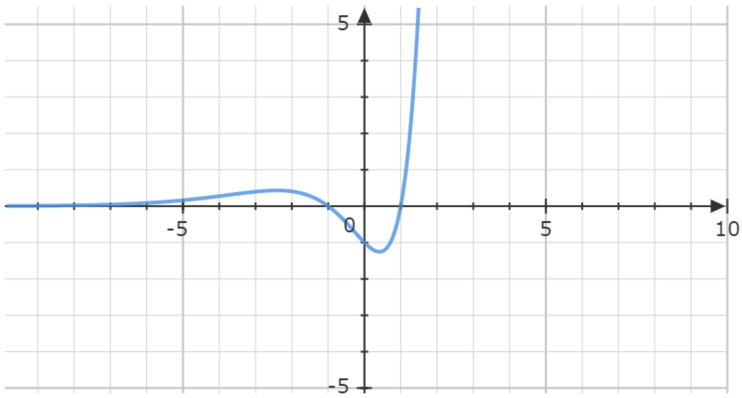
$$\implies \begin{cases} \forall\ x \in \mathbb{R} \\ x < -1-\sqrt{2} \cup x > -1+\sqrt{2} \end{cases} .$$

Da qui deduciamo che la funzione è crescente in

$$(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, \infty)$$

e decrescente altrimenti.

- *Grafico qualitativo*:



2. $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}$. Osserviamo che questa può essere scritta come $1+\sqrt{x^2-1}x$. Conviene dunque studiare la funzione $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ e successivamente traslarne il grafico di un'unità verso l'alto.

- *Dominio*: Qui dobbiamo studiare da un lato l'argomento della radice ponendolo non negativo, e dall'altro il denominatore ponendolo diverso da 0. Si ottiene dunque

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq -1 \cup x \geq 1 \end{cases} ,$$

da cui si ha che il dominio della funzione è

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

- *Simmetrie*: Verificando le identità $g(x) = g(-x)$ e $g(-x) = -g(x)$, ci accorgiamo subito che la funzione non è pari ma è dispari: infatti

$$-g(x) = -\frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{x} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{-x} = g(-x);$$

- *Intersezioni con gli assi*: Poiché il punto $x = 0$ è escluso dal dominio, la funzione non ammette intersezioni con l'asse y. Verifichiamo direttamente quella con l'asse x ponendo $g(x) = 0$:

  $$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x^2-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\sqrt{x^2-1} \quad \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \ x = \pm 1.$$

  Ne segue che le intersezioni con l'asse x sono nei punti

  $$(1, g(1)) = (1, 0) \qquad \text{e} \qquad (-1, g(-1)) = (-1, 0);$$

- *Segno*: Poniamo $g(x) > 0$:

  $$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} > 0.$$

  Studiamo separatamente numeratore e denominatore. Il primo è sempre positivo, mentre il secondo è verificato per $x > 0$. Segue che la funzione g è positiva nell'intervallo

  $$(1, \infty);$$

- *Limiti*:

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -1,$$
  $$\lim_{x\to-1^-} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 0,$$
  $$\lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 0,$$
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1.$$

  Osservando il risultato dei limiti a $\pm\infty$ si deduce che non esistono asintoti obliqui;

- *Punti critici*: Calcoliamo la derivata della funzione $g(x)$ e poniamola pari a 0. Ricorriamo alla formula della derivata del rapporto tra funzioni:

  $$\left(\frac{h(x)}{k(x)}\right)' = \frac{h'(x)k(x) - h(x)k'(x)}{k^2(x)}.$$

  Otteniamo

  $$g'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

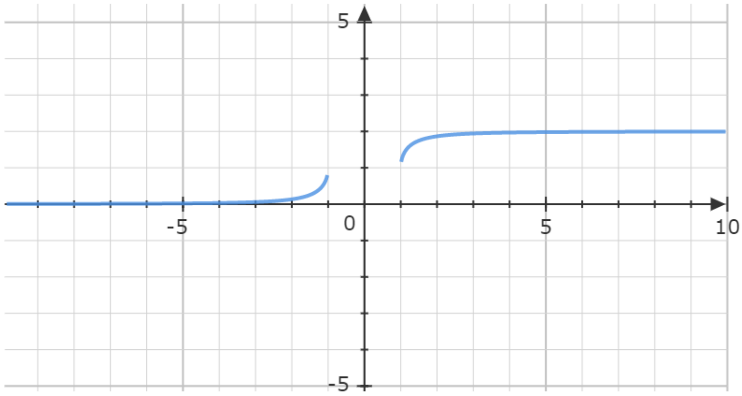
  Osserviamo che $g'(x) = 0$ non ammette soluzioni di conseguenza non esistono punti critici;

- *Intervalli di monotonia*: Non essendoci punti critici, la funzione non ammette punti di massimo o di minimo. In altre parole, la funzione è sempre crescente o sempre crescente. Ora, studiando

  $$g'(x) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} > 0,$$

  ci accorgiamo che la derivata di g è sempre positiva, di conseguenza la funzione è sempre crescente.

- *Grafico qualitativo*: Disegnando il grafico di g e traslandolo in alto di un'unità, si ottiene:



3. $f(x) = |x|^{|x|}$.

- *Dominio*: Poiché la funzione è la composizione tra esponenziale e valore assoluto, i quali hanno entrambi dominio $\mathbb{R}$, ne segue che il dominio della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dove lo 0 è stato rimosso in quanto richiesto dall'esercizio);
- *Simmetrie*: Per le proprietà del valore assoluto, vale che $f(x) = f(-x)$, cioè f è pari (e di conseguenza non dispari);
- *Intersezioni con gli assi*: È facile osservare che non ce ne sono né con l'asse x né con l'asse y: il punto $x = 0$ è infatti escluso per quanto richiesto dal testo dell'esercizio, quindi ciò esclude le intersezioni con l'asse y. D'altra parte $|x|^{|x|}$ è positivo sempre, quindi, non potendo mai essere uguale a 0, non ammette intersezioni con l'asse x;
- *Segno*: Essendo l'esponenziale di un valore assoluto, il segno è positivo in tutto il dominio, ovvero in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- *Limiti*:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} |x|^{|x|} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} |x|^{|x|} = 1.$$

  Osserviamo che grazie alla parità della funzione è sufficiente studiare solo i limiti per $x \to \infty$ e $x \to 0^+$, in quanto per simmetria saranno uguali ai limiti, rispettivamente, per $x \to -\infty$ e per $x \to 0^-$;
- *Punti critici*: Calcoliamo la derivata della funzione separando il caso $x > 0$ dal caso $x < 0$ e studiando solo il primo, in quanto l'altro sarà uguale per simmetria:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} x^x = \frac{d}{dx} e^{x \log x} = x^x(\log x + 1).$$

  Poniamo il tutto uguale a 0 ed otteniamo:

$$x^x(\log x + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^x = 0 \\ \log x + 1 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \nexists\ x \in \mathbb{R} \\ x = e^{-1} \end{cases}.$$

I punti critici sono dunque due e sono $\left(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt[e]{e}}\right)$ e (per simmetria) $\left(-e^{-1}, \frac{1}{\sqrt[e]{e}}\right)$;

- *Intervalli di monotonia*: Poniamo la derivata prima maggiore di zero e studiamone il segno:

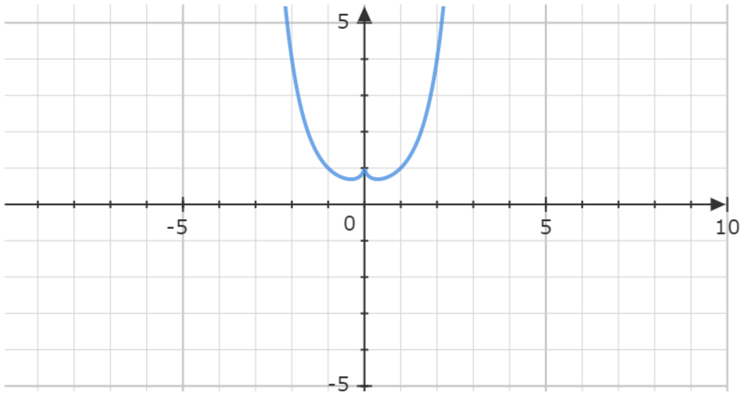
$$x^x(\log x + 1) > 0 \quad \implies \quad \begin{cases} x^x > 0 \\ \log x + 1 > 0 \end{cases} \quad \implies \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R} \\ x > e^{-1} \end{cases} .$$

Facendo il prodotto dei segni tra le due si ottiene che la funzione è crescente negli intervalli

$$(-\infty, -e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$$

e decrescente altrimenti (l'intervallo a sinistra lo si è sempre ottenuto per simmetria);

- *Grafico qualitativo*:



4. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{3x}{1+x^2}\right)$.

- *Dominio*: Dobbiamo porre l'argomento dell'arcoseno compreso tra -1 e 1:

$$-1 \le \frac{3x}{1+x^2} \le 1 \quad \implies \quad x \le \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \cup \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cup x \ge \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Segue che il dominio della funzione è

$$\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

Si osservi che non c'è stato bisogno di studiare la non nullità del denominatore in quanto è sempre positivo per definizione;

- *Simmetrie*: La funzione è, per definizione, una funzione dispari, ovvero $f(-x) = -f(x)$;

- *Intersezioni con gli assi*: Vediamo l'intersezione con l'asse y ponendo $x = 0$:
$$f(0) = \arcsin\left(\frac{3 \cdot 0}{0+1}\right) = \arcsin(0) = 0.$$
L'intersezione con l'asse y è nel punto $(0, 0)$. Poniamo invece ora $f(x) = 0$ e troviamo l'intersezione con l'asse x:
$$\arcsin\left(\frac{3x}{x^2+1}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x}{x^2+1} = \sin(0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x}{x^2+1} = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad 3x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$
L'intersezione con l'asse x è unica e sempre nel punto $(0, 0)$;
- *Segno*: Poniamo la funzione maggiore di zero:
$$\arcsin\left(\frac{3x}{x^2+1}\right) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x}{x^2+1} > \sin(0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x}{x^2+1} > 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad 3x > 0 \quad \Longrightarrow \quad x > 0.$$
La funzione è dunque positiva per $x > 0$ e, tenendo conto del dominio, di conseguenza gli intervalli di positività sono:
$$\left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right);$$
- *Limiti*:
$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{3x}{x^2+1}\right) = 0;$$
$$\lim_{x\to\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \arcsin\left(\frac{3x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2};$$
$$\lim_{x\to\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \arcsin\left(\frac{3x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$
Per simmetria si avrà:
$$\lim_{x\to-\infty} \arcsin\left(\frac{3x}{x^2+1}\right) = 0;$$
$$\lim_{x\to\frac{-3-\sqrt{5}}{2}} \arcsin\left(\frac{3x}{1+x^2}\right) = -\frac{\pi}{2};$$
$$\lim_{x\to\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \arcsin\left(\frac{3x}{1+x^2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$
- *Punti critici*: Deriviamo la funzione ricordando la regola della catena e il fatto che
$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Segue che:
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\arcsin\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)\right] = \frac{3(1-x^2)}{(x^2+1)\sqrt{x^4-7x^2+1)}} = 0,$$
da cui, svolgendo i conti, si ottiene che i punti critici sono in
$$x = \pm 1,$$
i quali sono però esclusi dal dominio. Ne segue la funzione non ammette punti critici e i punti di massimo e di minimo vengono assunti sul bordo del dominio;

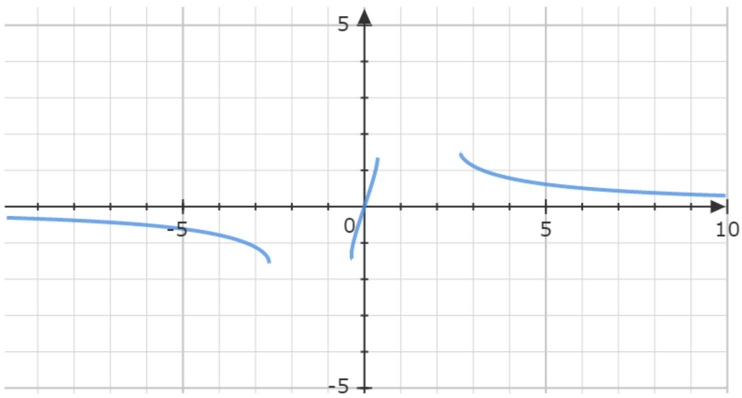
- *Intervalli di monotonia*: Ponendo la derivata maggiore di 0 si ottiene che

$$f'(x) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \leq -1 \cup x \geq 1,$$

i quali sono esclusi dal dominio, di conseguenza gli intervalli di crescenza della funzione sono:

$$\left(-\infty, -\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

- *Grafico qualitativo*:



5. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\sqrt{x}}}$.

- *Dominio*: Essendo l'esponenziale sempre positivo e con dominio $\mathbb{R}$, è sufficiente controllare che l'argomento della radice sia non negativo. In altre parole, il dominio della funzione f è

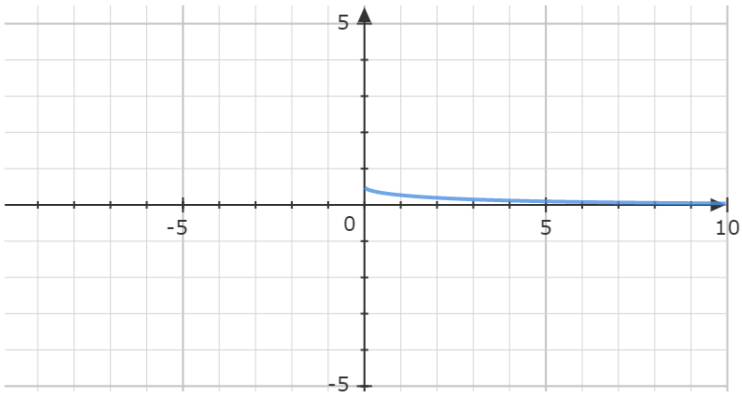
$$[0, +\infty);$$

- *Simmetrie*: Avendo la funzione dominio dato dalle sole x non negative non vi è alcuna possibilità di ottenere una simmetria rispetto all'asse x o rispetto all'origine. La funzione non è dunque pari né dispari;
- *Intersezione con gli assi*: Essendo l'esponenziale sempre positivo, la funzione f non può mai annullarsi. Ciò significa che non vi sono intersezioni con l'asse x in quanto l'equazione $f(x) = 0$ non ammette soluzioni. Vediamo le intersezioni con l'asse y ponendo $x = 0$. In tal caso si ottiene

$$f(0) = \frac{1}{1+e^0} = 1.$$

L'unico punto di intersezione con l'asse y è in $(0, 1)$;
- *Segno*: L'esponenziale è sempre positivo ed è sommato ad un numero positivo, di conseguenza il denominatore è sempre positivo. Il numeratore è positivo e il rapporto tra due numeri positivo è positivo. Ne segue che f è positiva su tutto il dominio di definizione;

- *Limiti*:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\sqrt{x}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2};$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{\sqrt{x}}} = 0;$$
- *Punti critici*: Deriviamo la funzione e poniamola uguale a 0:
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+e^{\sqrt{x}}}\right] = -\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+e^{\sqrt{x}})^2} = 0.$$
Osserviamo che non esistono soluzioni: infatti il numeratore non si annulla mai perché $e^{\sqrt{x}} > 0$ sempre. La funzione non ammette punti critici, ma ancora una volta assume massimo o minimo sul bordo;
- *Intervalli di monotonia*: Osserviamo che quanto il numeratore quanto il denominatore di $f'(x)$ sono sempre positivi, di conseguenza, con il segno meno davanti alla frazione, $f'(x)$ risulta sempre negativa e la funzione sempre decrescente;
- *Grafico qualitativo*:



6. $f(x) = \cos(x) \cdot 3^{-\frac{1}{\cos(x)}}$.

- *Dominio*: La funzione si annulla solo nei punti in cui si annulla il denominatore dell'esponente, ovvero nei punti in cui $\cos(x) = 0$. Questi corrispondono ai punti $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
Il dominio della funzione è dunque $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo inoltre che la funzione è periodica di periodo 2π in quanto la x compare solo nel coseno (che è periodico di periodo 2π). Lo studio si può ridurre, quindi, al caso $x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
- *Simmetrie*: Poiché la x la compare solo nel coseno, il quale è pari, segue che la funzione stessa è pari. Ciò consente di poter restringere ulteriormente lo studio della funzione all'intervallo $[0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$;

- *Intersezione con gli assi*: Osserviamo che non vi sono intersezioni con l'asse x in quanto $f(x) = 0$ solo se $x = \frac{\pi}{2}$, il quale è però escluso dal dominio. Per quanto riguarda l'intersezione con l'asse y, calcolando $f(0)$ si ottiene

$$f(0) = \cos(0) \cdot 3^{-\frac{1}{\cos(0)}} = \frac{1}{3}.$$

Segue che la funzione interseca l'asse y nel punto $\left(0, \frac{1}{3}\right)$;

- *Segno*: Il segno della funzione lo si può dedurre studiando la disequazione $3^{-\frac{1}{\cos(x)}} > 0$ che, in quanto esponenziale, dipende solo dal segno del coseno. Nell'intervallo considerato si ha quindi:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f(x) < 0 & \text{se } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

- *Limiti*:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} = \frac{1}{3};$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} = 0;$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} = -\infty;$$
$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} = -3.$$

- *Punti critici*:
La funzione è continua e derivabile nel dominio in quanto composizione di funzioni continue e derivabili nel proprio dominio.
Applicando la formula della derivata del prodotto, si ottiene

$$f'(x) = -3^{-\frac{1}{\cos(x)}} \tan(x) \left(\log(3) + \cos(x)\right).$$

Poniamo $f'(x) = 0$, cioè

$$f'(x) = -3^{-\frac{1}{\cos(x)}} \tan(x) \left(\log(3) + \cos(x)\right) = 0.$$

Si noti che $\log(3) > 1$ e quindi

$$\log(3) + \cos(x) > 0$$

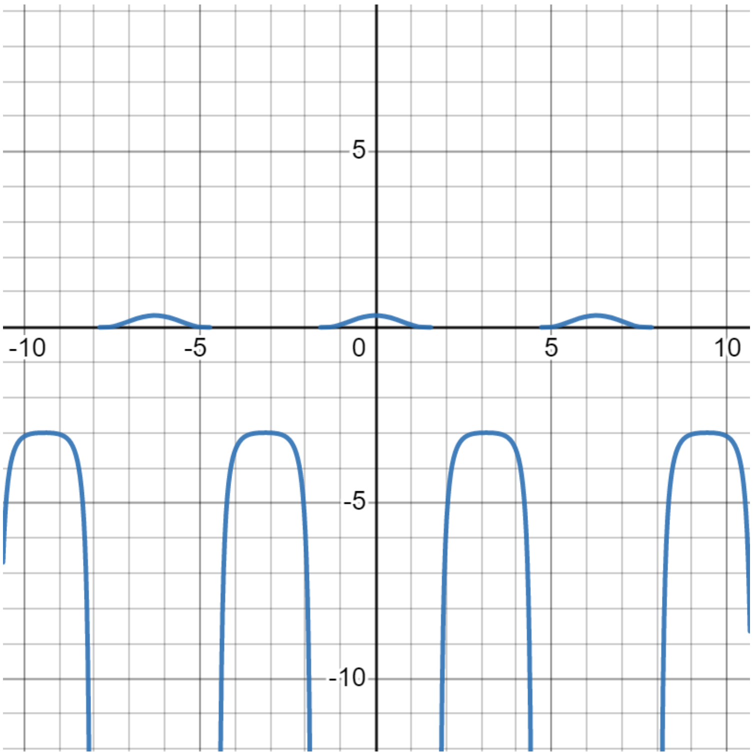
per ogni x.
Poiché, inoltre, $3^{-\frac{1}{\cos(x)}} > 0$ per ogni x, si ha che la derivata prima si annulla solo nei punti in cui si annulla $\tan(x)$. Nell'intervallo considerato, si ha

$$\tan(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0, \pi$$

per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.
I punti critici di f sono dunque in $x = 0, \pi$.

- *Intervalli di monotonia*: Per lo stesso ragionamento del punto precedente, il segno della funzione dipende solo da $\tan x > 0$.
Tale disequazione è verificata, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Segue che la funzione è crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ e decrescente altrimenti.

- *Grafico qualitativo*:



7. $f(x) = |1 - x| \log x$.

- *Dominio*: Poiché il valore assoluto è sempre ben definito e il logaritmo lo è solo se l'argomento è positivo, segue che il dominio della funzione è

$$(0, +\infty).$$

- *Simmetrie*: Poiché la funzione è definita solo per $x > 0$ non vi è alcuna possibilità di ottenere una parità o una disparità;
- *Intersezione con gli assi*: Poiché $x = 0$ è escluso dal dominio, non vi sono intersezioni con l'asse y. Poniamo invece $f(x) = 0$ e troviamo le intersezioni con l'asse x:

$$|1 - x| \log x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1.$$

Vi è dunque un'intersezione con l'asse x nel punto $(1, 0)$;
- *Segno*: Il modulo è sempre non negativo, quindi il segno della funzione dipende solo da quello del logaritmo. A tal proposito

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 1.$$

- *Limiti*:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} |1 - x| \log x = -\infty;$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} |1 - x| \log x = +\infty;$$

Vale inoltre che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{|1 - x| \log x}{x} = +\infty,$$

quindi non esistono asintoti obliqui.

- *Punti critici*: La funzione è continua e derivabile nel dominio di definizione in quanto composizione di funzioni continue e derivabili, per cui spezziamo il modulo e calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} -\log(x) + \frac{1-x}{x} & \text{se } x \leq 1 \\ \log(x) + \frac{x-1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

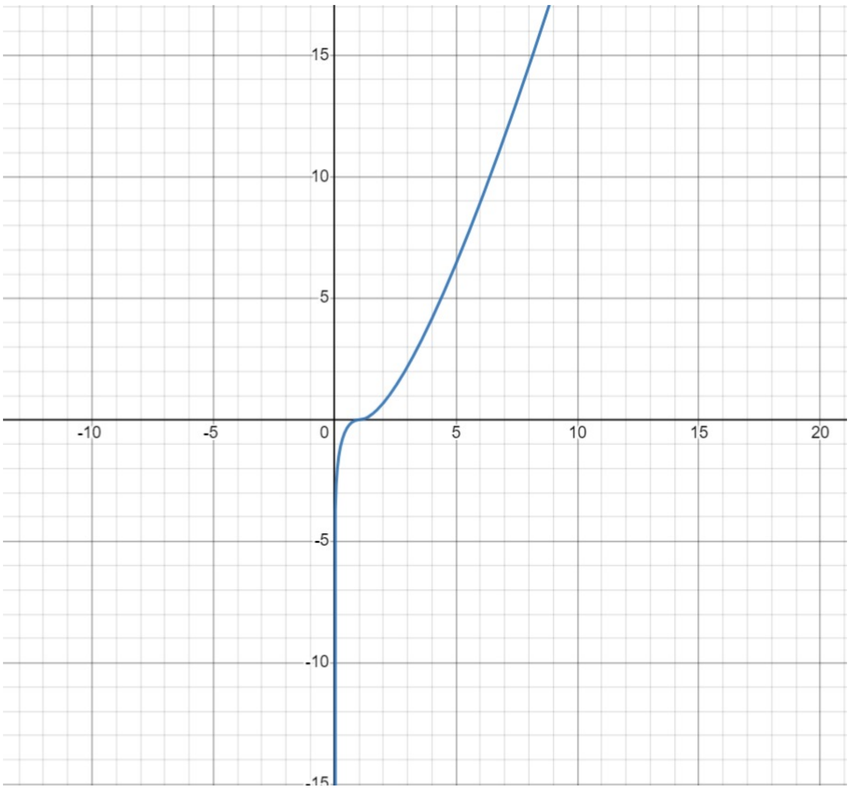
  da cui segue che $f'(x) = 0$ non ammette soluzioni nei rispettivi domini di definizione di f' (tenendo sempre a mente che possiamo considerare solo $x > 0$. Non vi sono punti critici, quindi la funzione è sempre crescente o sempre decrescente.

- *Intervalli di monotonia*: Osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} -\log x + \frac{1-x}{x} & \text{se } x \leq 1 \\ \log x + \frac{x-1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases},$$

  quindi la funzione è sempre crescente nel dominio:

- *Grafico qualitativo*:



8. $f(x) = \arccos|x^2 - 3x + 2|$.

- *Dominio*: La funzione è ben definita se l'argomento dell'arcocoseno è in modulo minore di 1, cioè se

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

  Il dominio della funzione è dunque scrivibile come

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

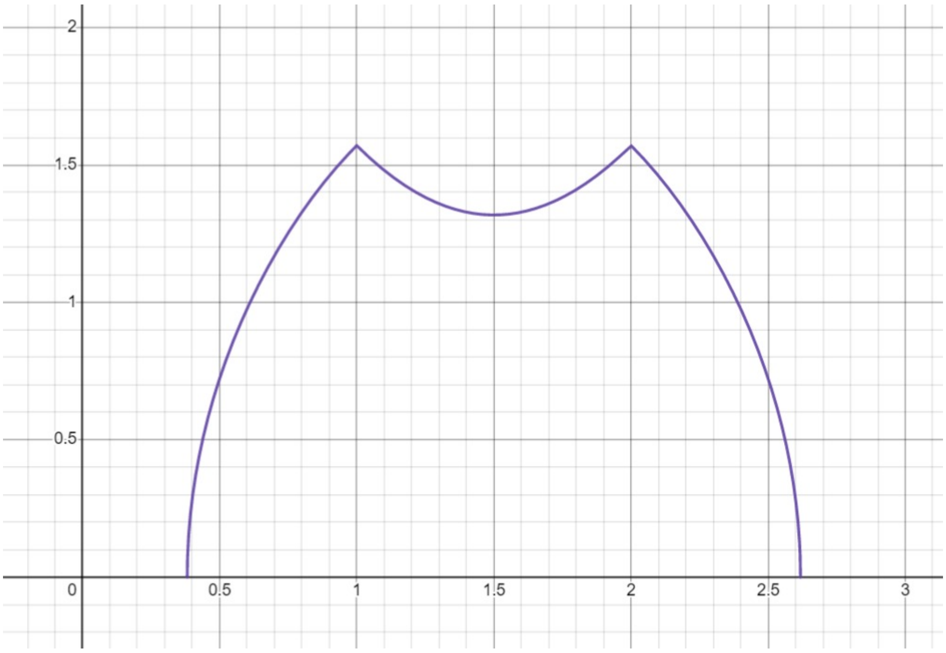
- *Simmetrie*: Essendo il dominio di definizione non simmetrico rispetto né all'origine né all'asse delle y, segue che la funzione non presenta alcuna simmetria;
- *Intersezioni con gli assi*: Essendo $x = 0$ escluso dal dominio, la funzione non ammette intersezioni con l'asse y. Poniamo ora $f(x) = 0$ e verifichiamo le intersezioni con l'asse x:

$$\arccos|x^2 - 3x + 2| = 0 \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - 3x + 2| = 1 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 1 & \text{se } x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \\ -x^2 + 3x - 2 = 1 & \text{se } x \in \left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ \nexists\ x \in \text{Dominio} \end{cases} .$$

  Poiché il risultato della prima equazione comprende x che sono eslcuse dal dominio di definizione, si ha che la funzione non ammette intersezioni nemmeno con l'asse x;
- *Segno*: L'arcocoseno è, per definizione, una funzione sempre non negativa, quindi il segno è positivo per ogni x nel dominio.
- *Limiti*:
$$\lim_{x\to \frac{3-\sqrt{5}}{2}^+} \arccos|x^2 - 3x + 2| = 0;$$
$$\lim_{x\to \frac{3+\sqrt{5}}{2}^-} \arccos|x^2 - 3x + 2| = 0;$$
- *Punti critici*: La funzione è continua nel dominio in quanto composizione di funzioni continue ed è derivabile per $x \neq \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. La derivata vale
$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x-3}{\sqrt{1-(x^2-3x+2)^2}} & \text{se } \ x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \cup \left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ -\frac{3-2x}{\sqrt{1-(x^2-3x+2)^2}} & \text{se } \ x \in (1, 2) \end{cases}$$

  e, ponendola pari a 0, si ottiene che l'unico punto critico è $x = \frac{3}{2}$.
- *Intervalli di monotonia*: Ponendo quanto ottenuto prima maggiore di 0 si ottiene che:
  - $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo assoluto;
  - $x = 1$ è un punto di massimo assoluto;
  - $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo assoluto;
  - $x = 2$ è un punto di massimo assoluto;
  - $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo assoluto.

  Ne segue che la funzione è crescente negli intervalli
$$\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right].$$
- *Grafico qualitativo*:


2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3