Tutorato 5

Am110 - Analisi Matematica 1 (CdL in Matematica)

Analisi Matematica 1 - I modulo (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Pierpaolo Esposito
Tutori (matematica): Matteo Pandolfi, Michela Policella
Turore (fisica): Daniele Tagliacozzo

22/11/2022

Esercizio 1. Calcolare gli sviluppi di MacLaurin (ovvero gli sviluppi di Taylor attorno al punto $x_0 = 0$) con resto in forma di Peano delle seguenti funzioni fino all'ordine n indicato:

1) $f(x) = \log(1 + 3x) \qquad (n = 3)$
2) $f(x) = \cos(x^2) \qquad (n = 10)$
3) $f(x) = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x} \qquad (n = 3)$
4) $f(x) = \sin(x^2) - \sinh(x^2) \qquad (n = 6)$
5) $f(x) = (e^{3x} - 1)\sin(2x) \qquad (n = 4)$

Esercizio 2. Calcolare, utilizzando gli sviluppi di Taylor, i seguenti limiti:

1. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1 + \log(1 - x)}{\tan x - x}$;
2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$;
3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{-x} + \log\left(\frac{1+x}{e}\right)}{2(\cosh x - 1)\sinh x}$;
4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{4\left(\cos(2x) + \sin^2\left(\sqrt{2}x\right) - 1\right)}{x\left(e^{2x} - \cosh(2x) - 2x\right)}$;
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x - \cos x + 1}{2x + x^2 + 1 - \frac{e^x - 1}{x}}$;

6. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x - x^2 \log^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}}$;

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(\cosh(x\cos 2x) - \cosh x)}{x^4}$;

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh^2 x - \sin^2 x}{e^{x^4} - 1}$;

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+2x)) - e^{2x} + 1}{\tan(x^2)}$.

Esercizio 3. Utilizzando il teorema di De l'Hôpital, calcolare i seguenti limiti:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\log(1+x) - x}$;

2. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{16\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + (4x-\pi)^2 - 32}{(4x-\pi)^4}$;

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 e^{-x^2-1} + e^{-x}\log(1+x^2)}{e^{-1-x+\log(\log x)}}$;

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \log x}{2x+1}$;

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(3x+1)}{x}$;

6. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2}$;

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x}{x + x^2}$;

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x}$;

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(3x)}{5e^{\frac{1}{x}}}$;

10. $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{\log(x-3)}{\log(x^2-9)}$;

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos x}$;

12. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{2x}$;

13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^x - 2 + e^{-x}}$;

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{e - x + x|x| + e^x - 1}$;

15. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} + 3x}{3e^{2x} + 2\sin x} + \frac{x - \log(5x)}{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$;

16. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^3+\sqrt{x}-2x}-1}{3x^3-\sqrt{x}}$;

17. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x+x^2)-\cos x - x + 1}{\log(1+x)-\sin x}$.

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

e, utilizzando gli sviluppi di Taylor, stabilire se $x_0 = 0$ e $x_0 = 2$ sono punti di massimo o di minimo.

Esercizio 5. Calcolare, al variare del parametro reale α, il seguente limite utilizzando gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan(\sin x) - x \cos x}{x^{6-|\alpha|} \arctan(\cos x)}$$

Soluzioni

Esercizio 1. Riportiamo qui, per comodità, gli sviluppi fondamentali delle funzioni più utilizzate:

Funzione	**Sviluppo di Taylor**
e^z	$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + o(z^n)$
$\log(1+z)$	$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + o(z^n)$
$\cos z$	$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + o(z^{2n})$
$\sin z$	$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + o(z^{2n+1})$
$\sinh z$	$z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(z^{2n+1})$
$\cosh z$	$z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + o(z^{2n})$
$\arcsin z$	$z + \frac{z^3}{6} + \frac{3}{40}z^5 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} z^{2n+1} + o(z^{2n+1})$
$\arccos z$	$\frac{\pi}{2} - z - \frac{z^3}{6} - \frac{3}{40}z^5 - \cdots - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} z^{2n+1} + o(z^{2n+1})$
$\arctan z$	$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{2n+1} + o(z^{2n+1})$
$\operatorname{arctanh} z$	$z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots + \frac{z^{(2n+1)}}{2n+1} + o(z^{2n+1})$
$\sqrt{1+z}$	$1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} z^n + o(z^n)$
$\frac{1}{\sqrt{1+z}}$	$-\frac{z}{2} + \frac{3}{8}z^2 - \frac{15}{48}z^3 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^n + o(z^n)$

dove il **doppio fattoriale** (o **semifattoriale**) è così definito

$$n!! = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ n \cdot (n-2)!! & n \geq 2 \end{cases}.$$

Ad esempio: $8!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$ o $9!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 945$. Risolviamo ora gli sviluppi dell'esercizio:

1) Utilizziamo lo sviluppo fondamentale di $\log(1+z)$ ed operiamo la sostituzione $z = 3x$. Ciò è legittimo in quanto sia z che $3x$ tendono a 0 quando, rispettivamente, $z \to 0$ e $x \to 0$. A questo punto scriviamo tale sviluppo ed arrestiamolo, come richiesto dall'esercizio, all'ordine $n = 3$:

$$\log(1 + 3x) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3).$$

Possiamo scrivere $o(x^3)$ anziché $o((3x)^3) = o(27x^3)$ in quanto i due coincidono.

2) Utilizziamo lo sviluppo fondamentale del coseno e sostituiamo $z = x^2$:

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^{10}),$$

fermandoci, come richiesto dall'esercizio, al decimo ordine.

3) Utilizziamo da un lato lo sviluppo della funzione $\sqrt{1+z}$ così come è e dall'altro operiamo, nel medesimo sviluppo, lasostituzione $z=-x$. Otteniamo, fermandoci al terzo ordine, quanto segue:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} &= \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right)-\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right)= \\ &= x+\frac{x^3}{8}+o(x^3).\end{aligned}$$

4) Utilizziamo gli sviluppi fondamentali di seno e seno iperbolico operando la sostituzione $z=x^2$. Fermandoci al sesto ordine otteniamo che

$$\begin{aligned}\sin x^2-\sinh x^2 &= \left(x^2-\frac{x^6}{3!}+o(x^6)\right)-\left(x^2+\frac{x^6}{3!}+o(x^6)\right)= \\ &= -\frac{x^6}{3}+o(x^6).\end{aligned}$$

5) Utilizziamo gli sviluppi fondamentali di e^z e $\sin z$ sostituendo nel primo caso $z=3x$ e nel secondo $z=2x$. Ciò che otteniamo, fermandoci al quarto ordine, è:

$$\begin{aligned}(e^{3x}-1)\sin 2x &= \left(1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^4}{4!}+o(x^4)-1\right)\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^4)\right)= \\ &= 6x^2+9x^3+5x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

Qui, svolgendo il prodotto, tutti i termini di ordine superiore al quarto sono stati trascurati in quanto inglobati da $o(x^4)$.

Esercizio 2. 1. Calcolando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\tan x$ intorno al punto $x_0=0$ ed arrestandoci al terzo ordine otteniamo

$$\tan z = z+\frac{z^3}{3}+o(z^3).$$

Utilizzando poi gli sviluppi delle funzioni esponenziale e logaritmo naturale, arrestandoci al terzo ordine, otteniamo che il limite può essere riscritto ocme segue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{\tan x-x} &= \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-1\right)\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}= \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Utilizziamo gli sviluppi fondamentali delle funzioni esponenziale e coseno. Ci arrestiamo al quarto ordine in quanto al denominatore abbiamo x^4:

$$\begin{aligned}\frac{e^{x^2}-\cos x-\frac{3}{2}x^2}{x^4} &= \frac{\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)}{x^4}= \\ &= \frac{\frac{11}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{11}{24}.\end{aligned}$$

3. Sostituendo la x si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

   Per prima cosa, per le proprietà dei logaritmi si può riscrivere il numeratore come

$$e^{-x} + \log(1+x) - \log e = e^{-x} + \log(1+x) - 1.$$

   Sviluppiamo quindi la funzione esponenziale e^{-x} a partire dallo sviluppo di Taylor di e^x:

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{6} + \frac{(-x)^4}{24} + o((-x)^4) = \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

   Lo sviluppo del logaritmo è dato invece da

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

   Al denominatore si ha invece

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3), \qquad \sinh x = x + o(x^2).$$

   Sostituendo gli sviluppi nel limite iniziale si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \log\left(\frac{1+x}{e}\right)}{2(\cosh x - 1)\sinh x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) - 1}{2\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - 1\right)(x + o(x^2))} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^5)}{x^3 + o(x^5)} \sim \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4. Sostituendo la x si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

   A partire dagli sviluppi di Taylor delle funzioni, calcoliamo quelli delle funzioni composte che compaiono nel limite:

$$\begin{aligned} &\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o((2x)^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4); \\ &\sin^2(\sqrt{2}x) = \left(\sqrt{2}x - \frac{(\sqrt{2}x)^3}{6} + o((\sqrt{2}x)^3)\right)^2 = \left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 = \\ &\qquad = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^6 + o(x^6); \\ &e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^4}{24} + o((2x)^4) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4); \\ &\cosh(2x) = 1 + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o((2x)^4) = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

   Sostituendo gli sviluppi nel limite iniziale si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\left(\cos(2x)+\sin^2\left(\sqrt{2}x\right)-1\right)}{x\left(e^{2x}-\cosh(2x)-2x\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)+2x^2-\frac{4}{3}x^4+\frac{2}{9}x^6+o(x^6)-1\right)}{x\left(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)-\left(1+2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)-2x\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\left(-\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)}{x\left(\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)}\sim\lim_{x\to 0}-\frac{\frac{8}{3}x^4}{\frac{4}{3}x^4}=-2.$$

5. Raccogliamo la x al denominatore ed otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x+1}{2x+x^2+1-\frac{e^x-1}{x}}=\frac{x(\sin x-\cos x+1}{2x^2+x^3+x-e^x+1}.$$

Sviluppiamo il denominatore fino al primo ordine di cui i termini non si semplificano:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4).$$

Osserviamo che il denominatore è, sostituendo lo sviluppo, pari a

$$2x^2+x^3+x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}+1+o(x^4)=-\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{6}+\frac{3}{2}x^2+o(x^4).$$

Il primo termine non nullo è quello quadratico. Se va bene anche per il numeratore allora possiamo arrestare gli sviluppi di numeratore e denominatore al secondo ordine.
Osserviamo che per il numeratore basta fermarsi al primo ordine, in quanto la x che moltiplica fuori dalla parentesi renderà tutto un ordine più grande.

$$\sin x=x+o(x)$$
$$\cos x=1+o(x)$$

Otteniamo che il numeratore è pari a

$$x(\sin x-\cos x-1)=x(x-1+1+o(x))=x^2+o(x^2).$$

Osserviamo che il termine del secondo ordine è presente, quindi non ci sono problemi e possiamo arrestare gli sviluppi di numeratore e denominatore al secondo ordine (se invece il numeratore si fosse annullato avremmo dovuto proseguire con lo sviluppo ed aumentare l'ordine). Mettendo tutto insieme si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\sin x-\cos x+1)}{2x^2+x^3+x-e^x+1}=\frac{x^2+o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}=\frac{2}{3}.$$

6. Poniamo $x=\frac{1}{y}$. Il limite, dopo questo cambio di variabili, sarà:

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\log(1+y)-\frac{1}{2}}$$

Per risolvere il numeratore ricorriamo alla seguente identità:

$$\arctan y + \arctan \frac{1}{y} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \end{cases}.$$

Otteniamo dunque che il numeratore è pari a

$$\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{y} = \arctan y.$$

Otteniamo quanto segue:

$$\lim_{y \to 0} \frac{\arctan y}{\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \log(1+y) - \frac{1}{2}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{2y^2 \arctan y}{2y - 2\log(1+y) - y^2}.$$

A questo punto sviluppiamo in serie di Taylor arcotangente e logaritmo.

$$\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + o(y^5);$$
$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + o(y^5).$$

Osserviamo che al numeratore, se ci arrestiamo al primo ordine, moltiplicando poi per y^2 otteniamo comunque un polinomio di terzo grado. Dobbiamo dunque arrestare anche lo sviluppo del denominatore al terzo grado.
Otteniamo

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{2y^2(y + o(y))}{2y - 2\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)\right) - y^2} = \lim_{y \to 0^+} \frac{2y^3 + o(y^3)}{-\frac{2}{3}y^3 + o(y^3)} = -3.$$

7. Cominciamo sviluppando in serie di Taylor $\cos 2x$:

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Da qui otteniamo che possiamo scrivere

$$x \cos 2x = x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 + o(x^5).$$

Poniamo $t := x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)$. Dobbiamo ora sviluppare il coseno iperbolico di t, il quale equivale a

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4).$$

Svolgendo i calcoli, e sottraendo ad esso

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

ricordando che ogni termine che esce dagli sviluppi di ordine maggiore di 5 viene inglobato nell'o-piccolo di x^5, otteniamo che il numeratore è pari a

$$2(-2x^4 + o(x^4)).$$

L'intero limite, a questo punto, è pari a

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(-2x^4 + o(x^4))}{x^4} = -4;$$

8. Sviluppiamo singolarmente e^{x^4}, $\sinh x$ e $\sin x$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} e^{x^4} &= 1 + x^4 + o(x^4); \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5); \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5). \end{aligned}$$

Elevando al quadrato gli sviluppi di seno iperbolico e seno, e sottraendoli tra di loro, si ottiene che il numeratore è pari a

$$\sinh^2 x - \sin^2 x = \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Il denominatore, d'altra parte, è

$$e^{x^4} - 1 = x^4 + o(x^4).$$

Segue che il limite è pari a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{2}{3};$$

9. Scriviamo dapprima lo sviluppo del logaritmo, ovvero

$$\log(1 + 2x) = 2x - 2x^4 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3),$$

e poniamo $t = \log(1 + 2x) = 2x - 2x^4 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$. Sviluppiamo ora

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3).$$

Sviluppiamo poi

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \qquad \text{e} \\ \tan x^2 &= x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Svolgendo i conti per il numeratore, ed arrestandosi al secondo ordine così da essere coerenti con il denominatore, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{-4x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -4.$$

Esercizio 3. 1. Utilizziamo il teorema di De l'Hôpital ed otteniamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\log(1 + x) - x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{\frac{1}{1+x} - 1} = -\lim_{x\to 0} \frac{(2xe^{x^2} + \sin x)(1 + x)}{x} = \\ &= -\lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{x} + (2xe^{x^2} + \sin x). \end{aligned}$$

Ora, il secondo limite tende a zero, quindi non crea alcun problema. Il primo invece risulta ancora una volta in una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$, quindi applichiamo un'altra volta il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2xe^{x^2} + \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} -2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2} - \cos x = -3.$$

Mettendo tutto assieme, il risultato del limite è -3;

2. Operiamo il cambio di variabile $y = x - \frac{\pi}{4}$. In questo modo otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to 0} \frac{16\sqrt{2}\left(\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\right)+\left(4\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-\pi\right)^2-32}{\left(4\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-\pi\right)^4} = \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y\right)+16y^2-32}{256y^4} = \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{32\cos y+16y^2-32}{256y^4} = \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{2\cos y+y^2+1}{16y^4}
\end{aligned}$$

Applicando a questo punto il teorema di De l'Hôpital 4 volte otteniamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{2\cos y+y^2+1}{16y^4} &= \lim_{y\to 0} \frac{-2\sin y+2y}{64y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{-2\cos y+2}{192y^2} = \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{2\sin y}{384y} = \lim_{y\to 0} \frac{2\cos y}{384} = \\
&= \frac{1}{192}.
\end{aligned}$$

3. Moltiplichiamo e dividiamo il limite per e^{x+1} e, successivamente, dopo aver osservato che $e^{\log(\log x)} = \log x$, applichiamo il teorema di De l'Hôpital, ottenendo così:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^3e^{-x^2-1}+e^{-x}\log(1+x^2)}{e^{-1-x+\log(\log x)}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3e^{-x^2+x}+e\log(1+x^2)}{e^{\log(\log x)}} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x^3e^x}{e^{x^2}\log x}}_{\to 0} + \frac{e\log(1+x^2)}{\log x} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{e\log(1+x^2)}{\log x} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2ex}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \\
&= 2e.
\end{aligned}$$

4. Sostituendo la x si ottiene una forma indeterminata.

   Applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\log x}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2} = \frac{3}{2}.$$

5. Sostituendo la x si trova una forma indeterminata.

   Applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(3x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{3x+1}}{1} = 3.$$

6. Sostituendo la x si trova una forma indeterminata.

   Applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x-e^2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{e^x}{1} = e^2.$$

7. Sostituendo la x si trova una forma indeterminata.

   Applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1+2x}=2.$$

8. Sostituendo la x si ottiene una forma indeterminata.

   Applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)\frac{1}{\cos x}}{1}=0.$$

9. Sostituendo la x si ottiene una forma indeterminata.

   Applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(3x)}{5e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{3x}}{5\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x}{5e^{\frac{1}{x}}}=0.$$

10. Sostituendo la x si ottiene una forma indeterminata.

    Applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\log(x-3)}{\log(x^2-9)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{2x}{x^2-9}}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x+3}{2x}=1.$$

11. Sostituendo la x si ottiene una forma indeterminata.

    Applicando il teorema di De l'Hopital e il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

    si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2e^{x^3}}{\sin x}\sim\lim_{x\to 0}3xe^{x^3}=0.$$

12. Sostituendo la x si ottiene una forma indeterminata.

    Applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log^2 x}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2\log x}{x}}{2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0.$$

13. Sostituendo la x si ottiene una forma indeterminata.

    Applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{e^x-2+e^{-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{2}.$$

14. Sostituendo la x si ottiene una forma indeterminata.

    Applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{e-x+x|x|+e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{-1+2|x|+e^x}=0.$$

15. Sostituendo la x si ottiene una forma indeterminata.

    Applicando varie volte il teorema di De l'Hopital si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+3x}{3e^{2x}+2\sin x}+\frac{x-\log(5x)}{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)} &= \frac{2}{3}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x}}{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \\ &= \frac{2}{3}+\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{2x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \\ &= -\infty\end{aligned}$$

    dove l'ultimo passaggio segue applicando il teorema del confronto: per $x\to 0$ si ha

$$0\leftarrow -2x^2-x\le 2x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 2x^2+x\to 0.$$

16. Sostituendo la x si ottiene una forma indeterminata.

    Applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3+\sqrt{x}-2x}-1}{3x^3-\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}-2\right)e^{x^3+\sqrt{x}-2x}}{9x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(6x^2\sqrt{x}+1-4\sqrt{x})\,e^{x^3+\sqrt{x}-2x}}{18x^2\sqrt{x}-1} = -1.\end{aligned}$$

17. Sostituendo la x si ottiene una forma indeterminata.

    Applicando due volte il teorema di De l'Hopital si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+x^2)-\cos x-x+1}{\log(1+x)-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)\cos(x+x^2)+\sin x-1}{\frac{1}{1+x}-\cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x+x^2)-(2x+1)^2\sin(x+x^2)+\cos x}{-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x} = -3.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcoliamo derivata prima e seconda della funzione:

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}\qquad \text{e}\qquad f''(x)=2e^{-x}-4xe^{-x}+x^2e^{-x}$$

Consideriamo dapprima lo sviluppo di Taylor attorno al punto $x_0=0$, ossia

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2}+o(x^2).$$

Osserviamo che $f'(0)=0$ e $f''(0)=2>0$. Da ciò deduciamo che $x_0=0$ è un punto di minimo per la funzione.
Operiamo gli stessi passaggi per $x_0=2$:

$$f(x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)(x-2)^2}{2}+o((x-2)^2).$$

Osserviamo che $f'(2)=0$ e $f''(2)=-2e^{-2}<0$. Da ciò deduciamo che $x_0=2$ è un punto di massimo per la funzione.

Esercizio 5. Poiché $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ e $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\sin x) - x\cos x}{x^{6-|\alpha|}\arctan(\cos x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\sin x) - x\cos x}{\frac{\pi}{4}x^{6-|\alpha|}}.$$

Applicando gli sviluppi di Taylor, i termini al numeratore diventano

$$\arctan(\sin x) = \arctan\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)$$

con $t = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ e

$$x\cos x = \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5).$$

Il limite da studiare è quindi

$$l = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^5}{3} + o(x^5)}{\frac{\pi}{4}x^{6-|\alpha|}}.$$

I casi che si ottengono sono i seguenti:

- $|\alpha| = 1$: $6 - |\alpha| = 5 \Rightarrow l = \frac{4}{3\pi}$;
- $|\alpha| > 1$: $6 - |\alpha| < 5 \Rightarrow l = 0$;
- $|\alpha| < 1$: $6 - |\alpha| > 5 \Rightarrow l = +\infty$.