Tutorato 6
Am110 - Analisi Matematica 1 (CdL in Matematica)
Analisi Matematica 1 - I modulo (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Pierpaolo Esposito
Tutori (matematica): Matteo Pandolfi, Michela Policella
Turore (fisica): Daniele Tagliacozzo

29/11/2022

Esercizio 1. Discutere il carattere delle seguenti serie:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+2n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;
8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^4+n+1}$;
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+4\cos n}{3+5n^3}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arctan\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\right)$.

Esercizio 2. Discutere il carattere delle seguenti serie:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2+\sin n)}{\sqrt[3]{n^5}}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^2+\sin(e^n))}{3^n}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cos n}{\sqrt[3]{n^7}}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log(3n)}\right)^{n\sin\left(\frac{3}{n}\right)}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log(3n)}\right)^{n\sin\left(\frac{1}{3n}\right)}$.

Esercizio 3. Calcolare il risultato delle seguenti serie:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+2n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$.

Esercizio 4. Determinare i valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ affinché il risultato della seguente serie sia $\frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\alpha)^n}.$$

Esercizio 5. Calcolare l'estremo superiore dell'insieme

$$E:=\left\{\alpha\in\mathbb{R}_+ : \text{la serie }\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+\log n}{n^\alpha\log(1+n)}}\text{ sia divergente}\right\}.$$

Esercizio 6. Calcolare l'estremo inferiore dell'insieme

$$E:=\left\{\alpha\in\mathbb{R}_+ : \text{la serie }\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^5+\log n}{n^\alpha\log(1+n)}}\text{ sia convergente}\right\}.$$

Soluzioni

Esercizio 1. 1. Verificando la condizione necessaria per la convergenza di una serie ci accorgiamo che
$$\nexists \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$
Tale condizione non è dunque rispettata, ragion per cui la serie non converge;

2. Verifichiamo la condizione necessaria per la convergenza di una serie:
$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$
La serie dunque non converge;

3. Osserviamo che
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}.$$
La serie converge dunque solo se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$, ma questa converge per confronto con la serie armonica: infatti
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} < \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2} < \infty;$$

4. Utilizziamo il criterio della radice:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{n}}}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{2\log n}{n}}}{3} = \frac{1}{3}.$$
Essendo $\frac{1}{3} < 1$ ne consegue che la serie converge;

5. Utilizziamo il criterio del rapporto:
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)! \cdot n! \cdot n!}{(n+1)!(n+1)!(2n)} = \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = \\ &= 4.\end{aligned}$$
Essendo tale limite maggiore di 1, la serie diverge;

6. Utilizziamo il criterio della radice e la formula di Stirling che, ricordiamo, stabilisce che
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad n \to \infty.$$
Otteniamo che
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{n}{e} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{e} e^{\frac{\log(2\pi n)}{2n}} = \frac{2}{e} < 1.\end{aligned}$$
Ne consegue che la serie converge;

7. Utilizziamo il criterio della radice e ricordiamo il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo quanto segue:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

Essendo $e^{-1} < 1$, la serie converge;

8. Si può utilizzare il confronto asintotico: infatti $3n^2+1 \sim 3n^2$ e $n^4+n+1 \sim n^4$, perciò si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^4+n+1} \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n^2}{n^4} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty;$$

9. Per il criterio di Leibniz, ponendo $a_n = \sin\frac{1}{n}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n < \infty$$

se $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ e se a_n è decrescente.
Troviamo intanto facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0.$$

Dimostriamo che è decrescente, ovvero che $a_{n+1} < a_n$: osserviamo innanzitutto che

$$0 < \frac{1}{n} < 1 < \frac{\pi}{2} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Poiché la funzione $\sin t$ è crescente per $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, si ha

$$n < n+1 \implies \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \implies \sin\frac{1}{n+1} < \sin\frac{1}{n}.$$

La serie dunque converge;

10. Osserviamo che la serie converge assolutamente, ovvero converge la serie dei moduli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\right|.$$

Infatti si ha, applicando il criterio della radice, che

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

Data l'assoluta convergenza della serie, si ha anche la convergenza semplice di quest'ultima;

11. Utilizziamo prima il confronto e poi il confronto asintotico, stimando $\cos n \le 1$. Otteniamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+4\cos n}{3+5n^3} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+4}{5n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty;$$

12. Provando ad utilizzare la convergenza assoluta ci accorgiamo che non riusciamo a dedurre nulla: infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}} = +\infty.$$

Dobbiamo utilizzare il criterio di Leibniz. Sicuramente la successione $a_n := \arctan\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\right)$ è infinitesima. Vediamo che è decrescente.
Osserviamo che $\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}} > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{5}}}$, quindi, poiché $\arctan x$ decresce a 0 per $x \to 0^+$, si ha che $a_{n+1} < a_n$. Per il criterio di Leibniz la serie converge.

Esercizio 2.

1. Si osservi che, poiché

$$1 \leq 2 + \sin n \leq 3,$$

la serie è a termini positivi.

Valgono inoltre le disuguaglianze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^5}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2+\sin n)}{\sqrt[3]{n^5}} \leq 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

Perciò, applicando il criterio del confronto si ottiene che il carattere della serie è lo stesso di

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

Per il criterio del confronto asintotico, si può studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

che è una serie armonica generalizzata di parametro $\frac{2}{3}$ e diverge in quanto $\frac{2}{3} < 1$.

2. Si osservi che, poiché

$$n^2 + \sin(e^n) \geq n^2 - 1 \geq 0,$$

la serie è a termini positivi. Inoltre, poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\sin(e^n)}{n^2} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico si ha che il carattere della serie è lo stesso di

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n n^2.$$

Per il criterio della radice si ha infine

$$L = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n n^2} = \frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2} = \frac{2}{3} < 1$$

e quindi la serie converge.

3. La serie rientra tra quelle di segno qualsiai. Applichiamo quindi il criterio della convergenza assoluta:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos n}{\sqrt[3]{n^7}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(n+1)\cos n)}{\sqrt[3]{n^7}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,|\cos n|}{\sqrt[3]{n^7}}.$$

La serie è ora a termini positivi e possiamo perciò applicare il criterio del confronto, ricordando che $|\cos n| \leq 1$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,|\cos n|}{\sqrt[3]{n^7}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^7}}.$$

Per il criterio del confronto asintotico si ha che quest'ultima serie ha lo stesso comportamento di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

che è una serie armonica generalizzata di parametro $\frac{4}{3} > 1$ e e quindi converge.

La serie di partenza è dunque assolutamente convergente e in particolare semplicemente convergente.

4. Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

si può osservare che

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Si può, quindi, applicare il criterio del confronto asintotico tra le successioni

$$n\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n}$$

ottenendo che la serie di partenza ha lo stesso comportamento di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

e quindi diverge.

5. Procedendo come nell'esercizio precedente, poiché

$$\lim_{n\to+\infty} n^4 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2},$$

si può applicare il criterio del confronto asintotico tra le successioni

$$n^2\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n^2}$$

ottenendo che la serie di partenza ha lo stesso comportamento di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

e quindi converge.

6. La serie è a termini positivi, quindi possiamo applicare i criteri di convergenza che conosciamo.

   Innanzitutto si osservi che

$$\log(1+3^n) \sim \log 3^n = n\log 3,$$
$$\log(3n) = \log 3 + \log n \sim \log n,$$

   da cui segue che

$$\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log(3n)} \sim \frac{1}{n\log n}.$$

   Inoltre,

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)}{x} = 3.$$

   Quindi sicuramente per n grande si ha

$$n\sin\left(\frac{3}{n}\right) \geq 2,$$

   da cui segue che

$$\left(\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log(3n)}\right)^{n\sin\left(\frac{3}{n}\right)} \sim \left(\frac{1}{n\log n}\right)^{n\sin\left(\frac{3}{n}\right)} \leq \left(\frac{1}{n\log n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2}.$$

   Applicando il criterio del confronto con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

   si ha che la serie di partenza è convergente.

7. Procedendo come nell'esercizio precedente, si ha

$$\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log(3n)} \sim \frac{1}{n\log n}.$$

   Inoltre,

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3}.$$

   Quindi sicuramente per n grande si ha

$$n\sin\left(\frac{1}{3n}\right) \leq \frac{1}{2},$$

   da cui segue che

$$\left(\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log(3n)}\right)^{n\sin\left(\frac{1}{3n}\right)} \sim \left(\frac{1}{n\log n}\right)^{n\sin\left(\frac{1}{3n}\right)} \geq \left(\frac{1}{n\log n}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{n}.$$

   Applicando il criterio del confronto con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

   si ha che la serie di partenza è divergente.

Esercizio 3. 1. Applichiamo il metodo di risoluzione delle serie telescopiche. Poniamo $a_n = \frac{2}{n^2+2n}$ e scomponiamolo come segue:

$$\frac{2}{n^2+2n} = \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}.$$

Ponendo a questo punto $b_n = \frac{1}{n}$, abbiamo ottenuto che la serie di partenza può essere riscritta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+2}.$$

Da qui deduciamo che il risultato della serie è

$$b_1 + b_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

2. Riscriviamo la serie come segue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{2^n+3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Abbiamo ottenuto la somma di due serie geometriche. Segue che il risultato è:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{25}{6}.$$

Esercizio 4. Osserviamo innanzitutto che la serie è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{1+\alpha}$. Questa dunque converge se e solo se

$$\left|\frac{1}{1+\alpha}\right| < 1 \iff -1 < \frac{1}{1+\alpha} < 1 \iff \alpha < -2 \cup \alpha > 0.$$

Calcoliamo ora la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{1+\alpha}} - 1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Affinché tale somma sia dunque pari ad $\frac{1}{3}$ deve valere che $\alpha = 3$.

Esercizio 5. Si noti che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n)}{\log n} = 1.$$

Il carattere della serie di partenza è, pertanto, lo stesso della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^\alpha \log n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha-2}{2}} |\log n|^{\frac{1}{2}}}.$$

Applicando il criterio del confronto con la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,|\log n|^{\frac{1}{2}}}$$

si ha che la serie di partenza diverge per $\frac{\alpha-2}{2} \leq 1$.

Quindi

$$E = \left\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \frac{\alpha-2}{2} \leq 1\right\} = (-\infty, 4]$$

e cioè $\sup E = 4$.

Esercizio 6. Procedendo come nell'esercizio precedente, il carattere della serie di partenza è lo stesso della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha-5}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}}}.$$

Applicando il criterio del confronto con la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\frac{5-\alpha}{2}}$$

si ha che la serie di partenza converge per $\frac{\alpha-5}{2} > 1$.

Quindi

$$E = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+ : \frac{\alpha-5}{2} > 1 \right\} = (7, +\infty)$$

e cioè $\inf E = 7$.