Tutorato 7
Am110 - Analisi Matematica 1 (CdL in Matematica)
Analisi Matematica 1 - I modulo (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
DOCENTE: Pierpaolo Esposito
TUTORI (MATEMATICA): Matteo Pandolfi, Michela Policella
TURORE (FISICA): Daniele Tagliacozzo

06/12/2022

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti usando gli integrali immediati:

a) $\displaystyle\int \sqrt{2x+5}\ dx$;

b) $\displaystyle\int \tan x\ dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\ dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^{\frac{2}{3}}}\ dx$;

e) $\displaystyle\int 7x\cos(3x^2-5)\ dx$;

f) $\displaystyle\int x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}}\ dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\ dx$;

h) $\displaystyle\int 2x\cos(x^2)(\sin(x^2))^3\ dx$;

i) $\displaystyle\int x^2\sin(x^3)e^{\cos(x^3)}\ dx$.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali utilizzando la tecnica dell'integrazione per parti:

a) $\displaystyle\int x\sin x\ dx$;

b) $\displaystyle\int 2x\log(x-5)\ dx$;

c) $\displaystyle\int 2x\arctan x\ dx$;

d) $\displaystyle\int \log(x+1)\ dx$;

e) $\displaystyle\int (x+1)^2\cos x\ dx$;

f) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\ dx$.

Esercizio 3. Utilizzando il metodo della sostituzione risolvere i seguenti integrali indefiniti:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\ dx$;

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}\ dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{\cosh x+1}\ dx$;

d) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\ dx$;

e) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\ dx$;

f) $\displaystyle\int \frac{1}{4\sin x+3\cos x}\ dx$.

Esercizio 4. Risolvere i seguenti integrali indefiniti:

1. $\displaystyle\int \tan^2 x\ dx$;

2. $\displaystyle\int \frac{\cos(\log x)}{x}\ dx;$

3. $\displaystyle\int e^{2x}\cos x\ dx;$

4. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-x+5}\ dx;$

5. $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^2}\ dx;$

6. $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\ dx;$

7. $\displaystyle\int \frac{x^4-5x^3+8x^2-9x+11}{x^2-5x+6}\ dx;$

8. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\ dx;$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{-2x}-1}}\ dx;$

10. $\displaystyle\int x\arctan(1+16x)\ dx;$

11. $\displaystyle\int \log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})\ dx.$

Esercizio 5. Risolvere i seguenti integrali definiti:

1. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\ dx;$

2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\ dx;$

3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1|\arctan x\ dx;$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\ dx;$

5. $\displaystyle\int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x-1}}{8e^{-x}+1}\ dx;$

6. $\displaystyle\int_{\log(\sqrt{2})}^{\log(\sqrt{5})} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\ dx;$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sinh x}{\cosh x+1}\ dx;$

8. $\displaystyle\int_{-3}^3 \Big(|x|\log(x+4)+x^9\arctan\Big(x^2+3\Big)\Big)\ dx.$

Soluzioni

Esercizio 1. a) Riscriviamo l'integrale come segue:

$$\int \sqrt{2x+5}\ dx = \int (2x+5)^{\frac{1}{2}}\ dx.$$

Ci accorgiamo di trovarci di fronte ad uno degli integrali della forma

$$\int f'(x)[f(x)]^{\alpha}\ dx = \frac{[f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Per giungere a questa forma, nel nostro caso, dobbiamo solo moltiplicare e dividere per 2, così da ottenere la derivata di ciò che sta all'interno della potenza. Otteniamo così che il risultato dell'integrale è

$$\frac{1}{2}\int 2(2x+5)^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{(2x+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{(2x+5)^3}}{3} + c;$$

b) Scrivendo $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ci accorgiamo, poiché la derivata di $\cos x$ è $-\sin x$, di essere in un integrale della forma

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \log(f(x)) + c.$$

Per avere la derivata effettiva del coseno al numeratore dobibamo solo moltiplicare e dividere per -1. Otteniamo così

$$\int \tan x\ dx = -\int -\frac{\sin x}{\cos x}\ dx = -\log(\cos x) + c.$$

c) Riscriviamo l'integrale come segue:

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\ dx = \int x(x^2+5)^{-\frac{3}{2}}\ dx.$$

Siamo di fronte ad uno degli integrali della forma

$$\int f'(x)[f(x)]^{\alpha}\ dx = \frac{[f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Per ottenere l'effettiva derivata della funzione all'interno della potenza dobbiamo dunque moltiplicare e dividere per 2. Otteniamo così:

$$\int x(x^2+5)^{-\frac{3}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+5)^{-\frac{3}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} + c.$$

d) Riscriviamo l'integrale come segue:

$$\int \frac{1}{x(\log x)^{\frac{2}{3}}}\ dx = \int \frac{(\log x)^{-\frac{3}{2}}}{x}\ dx.$$

Siamo di fronte ad un integrale della forma

$$\int f'(x)[f(x)]^{\alpha}\ dx = \frac{[f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Il risultato è dunque

$$\int \frac{(\log x)^{-\frac{2}{3}}}{x}\ dx = \frac{(\log x)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c.$$

e) L'integrale in questo caso è della forma

$$\int f'(x)\cos(f(x))\ dx = \sin(f(x)) + c.$$

Per avere la derivata effettiva dell'argomento del coseno dobbiamo moltiplicare e dividere per 6. Otteniamo così:

$$\frac{7}{6}\int 6x\cos(3x^2-5)\ dx = \frac{7}{6}\sin(3x^2-5) + c.$$

f) Anche qui l'integrale è della forma

$$\int f'(x)[f(x)]^{\alpha}\ dx = \frac{[f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Dobbiamo moltiplicare e dividere per 4 per ottenere la derivata di ciò che è dentro la potenza:

$$\frac{1}{4}\int 4x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{4}}\ dx = \frac{1}{4}\frac{(8+x^4)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + c = -\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^4)^2}} + c.$$

g) Ci accorgiamo di essere di fronte ad un integrale della forma

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\ dx = \arctan(f(x)) + c.$$

Moltiplicando e dividendo per 2 otteniamo

$$3\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ dx = 3\arctan(e^x) + c.$$

h) Questo è un integrale della forma

$$\int f'(x)[f(x)]^{\alpha}\ dx = \frac{[f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Abbiamo infatti $\sin(x^2)$ elevato alla terza e moltiplicato per la sua derivata, ossia per $2x\cos(x^2)$. Segue che il risultato dell'integrale è

$$\int 2x\cos x(\sin(x^2))^3\ dx = \frac{\sin^4(x^2)}{4} + c.$$

i) Siamo di fronte ad un integrale della forma

$$\int f'(x)e^{f(x)}\ dx = e^{f(x)} + c.$$

Moltiplicando e dividendo per -3 otteniamo

$$-\frac{1}{3}\int -3x^2\sin(x^3)e^{\cos(x^3)}\ dx = e^{\cos(x^3)} + c.$$

Esercizio 2. Ricordiamo che la formula dell'integrazione per parti dice quanto segue:

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx.$$

a) Se consideriamo $f'(x) = \sin x$ e $g(x) = x$, integrando la prima e derivando la seconda otteniamo

$$\int x \sin x \; dx = -\cos x - \int (-\cos x) \; dx = -\cos x + \sin x + c.$$

b) Se integriamo $2x$ e deriviamo $\log(x-5)$ otteniamo

$$\int 2x \log(x-5) \; dx = x^2 \log(x-5) - \int \frac{x^2}{x-5} \; dx.$$

Per risolvere

$$\int \frac{x^2}{x-5} \; dx$$

basta aggiungere e sottrarre 25. In questo modo otteniamo

$$\int \frac{x^2}{x-5} \; dx = \int \frac{x^2+25-25}{x-5} \; dx = \int x+5 \; dx + \int \frac{25}{x-5} \; dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + 5x + 25 \log(x-5) + c.$$

Il risultato dell'integrale di partenza è dunque

$$x^2 \log(x-5) - \frac{x^2}{2} - 5x - 25 \log(x-5) + c.$$

c) Derivando l'arcotangente ed integrando $2x$ otteniamo

$$\int 2x \arctan x \; dx = x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} \; dx.$$

Aggiungiamo e sottraiamo 1 all'ultimo integrale ed otteniamo

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \; dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} \; dx - \int \frac{1}{x^2+1} \; dx = x - \arctan x + c.$$

Segue che il risultato dell'integrale di partenza è

$$\arctan(x^2+1) - x + c.$$

d) Riscriviamo l'integrale come segue:

$$\int \log(x+1) \; dx = \int 1 \cdot \log(x+1) \; dx.$$

A questo punto integriamo 1 e deriviamo il logaritmo. Otteniamo

$$\int \log(x+1) \; dx = x \log(x+1) - \int \frac{x}{x+1} \; dx = x \log(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1} \; dx + \int \frac{1}{x+1} \; dx =$$
$$= x \log(x+1) - 1 + \log(x+1) + c = (1+x) \log(1+x) - 1 + c.$$

e) Deriviamo $(x+1)^2$ ed integriamo il coseno. Otteniamo

$$\int (x+1)^2 \cos x \; dx = (x+1)^2 \sin x - 2 \int (x+1) \sin x \; dx.$$

Procediamo nuovamente per parti derivando $x+1$ ed integrando il seno. Otteniamo

$$(x+1)^2 \sin x - 2 \int (x+1) \sin x \; dx = (x+1)^2 \sin x - 2 \left(-(x+1) \cos x + \int \cos x \; dx \right) =$$
$$= (x+1)^2 \sin x + 2(x+1) \cos x - 2 \sin x + c.$$

f) Riscriviamo l'integrale come segue:
$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \int 1\cdot(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\ dx.$$
Integriamo 1 e deriviamo $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Otteniamo
$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\ dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\ dx - \arcsin(x).\end{aligned}$$
L'integrale è diventato dunque ciclico: portando al primo membro l'ultimo integrale rimasto otteniamo
$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin(x) + c.$$

Esercizio 3. a) Utilizziamo la sostituzione $e^x = y$, ottenendo $y = \log x$ e $dx = \frac{1}{y}\ dy$. L'integrale diventa quindi
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\ dx = \int \frac{y}{y^2-3y+2}\cdot\frac{1}{y}\ dy = \int \frac{1}{(y-1)(y-2)}\ dy.$$
Cerchiamo ora di scrivere $\frac{1}{(y-1)(y-2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2}$ e troviamo i giusti A e B.
$$\frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2} = \frac{Ay-2A+By-B}{(y-1)(y-2)} = \frac{(A+B)y-2A-B}{(y-1)(y-2)}.$$
Otteniamo dunque il sistema
$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=-1 \end{cases} \implies \begin{cases} A=-1 \\ B=-1 \end{cases}.$$
L'integrale diventa dunque
$$\begin{aligned}\int \frac{-1}{y-1}\ dy + \frac{1}{y-2}\ dy &= -\log(y-1) + \log(y-2) + c = \log\left(\frac{y-2}{y-1}\right) + c = \\ &= \log\left(\frac{e^x-2}{e^x-1}\right) + c.\end{aligned}$$

b) Qui dobbiamo operare una doppia sostituzione. Dapprima poniamo $\sqrt[3]{2} = y$, da cui $x = \frac{y^3}{2}$ e $dx = \frac{3}{2}y^2\ dy$, ed otteniamo
$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}\ dx = \frac{3}{2}\int \frac{y^2}{\sqrt{y^3}(y+1)}\ dy.$$
Operiamo ora la sostituzione $\sqrt{y} = t$, da cui $y = t^2$ e $dy = 2t\ dt$. Otteniamo così
$$\frac{3}{2}\int \frac{\sqrt{y}}{y+1}\ dy = 3\int \frac{t^2}{t^2+1}\ dt.$$
Basta aggiungere e sottrarrre 1 ed ottenere il risultato
$$3t - \arctan t + c = 3\sqrt{y}\arctan(\sqrt{y}) + c = 3\sqrt[6]{2x} - \arctan(\sqrt[6]{2x}) + c.$$

c) Applicando la sostituzione $\cosh x = y$ ed osservando che $\sinh dx = dy$ otteniamo

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}\ dx = \int \frac{dy}{y+1} = \log|y+1| + c = \log|\cosh x + 1| + c.$$

d) Operando la sostituzione $x0 \sin y$, da cui $dx = \cos y\ dy$ e $y = \arcsin x$, si ottiene

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y\ dy = \int \cos^2 y\ dy.$$

Ricordando che $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int \cos^2 y\ dy = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2y)}{2}\ dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin(2y)}{4} + c = \\ = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + c.\end{aligned}$$

e) Operiamo la sostituzione $x = \cosh y$, da cui $dx = \sinh y\ dy$ e $y = \operatorname{arcosh}(x)$. Da ciò otteniamo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1}\ dx &= \int \sinh^2 y\ dy = \int \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2\ dy = \\ &= \frac{1}{4}\int e^{2y} + e^{-2y} - 2\ dy = \frac{1}{8}\int 2e^{2y}\ dy - \frac{1}{8}\int -2e^{-2y}\ dy - \frac{1}{2}\int\ dy = \\ &= \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{8} - \frac{1}{2}y + c = \\ &= \frac{1}{2}\sinh y \cosh y - \frac{y}{2} + c = \\ &= \frac{1}{2}x\sinh(\operatorname{arcosh} x) - \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}(x) + c.\end{aligned}$$

f) Siamo di fronte ad un integrale di una funzione razionale di seni e coseni. Si risolve operando la sostituzione $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. In questo modo si ottiene che

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad dx = \frac{2}{1+y^2}\ dy.$$

L'integrale diventa dunque:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x}\ dx &= \int \frac{1}{4\frac{2y}{1+y^2} + 3\frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2}\ dy = \int \frac{2}{8y + 3 - 3y^2}\ dy = \\ &= -2\int \frac{1}{3y+1}y - 3\ dy = -2\int \left(-\frac{3}{10}\frac{1}{3y+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{y-3}\right)\ dy = \\ &= \frac{1}{5}\log|3t+1| - \frac{1}{5}\log|t-3| + c = \\ &= \frac{1}{5}\log\left|\frac{3\tan\frac{x}{2} + 1}{\tan\frac{x}{2} - 3}\right| + c\end{aligned}$$

Esercizio 4. 1.

$$\int \tan^2 x\ dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\ dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx - \int dx = \tan x - x + c.$$

2. Applicando la sostituzione $y = \log x$ si ha

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x}\, dx = \int \cos y\, dy = \sin y + c = \sin(\log x) + c.$$

3. Integrando due volte per parti (prima derivando e^{2x} e integrando $\cos x\, dx$ e poi derivando e^{2x} e integrando $\sin x\, dx$) si ha

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \cos x\, dx &= e^{2x} \sin x - 2\int e^{2x} \sin x\, dx + c = \\ &= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x + 4\int e^{2x} \cos x\, dx + c\end{aligned}$$

da cui segue che

$$5\int e^{2x} \cos x\, dx = (\sin x + 2\cos x)\, e^{2x} + c$$

e quindi

$$\int e^{2x} \cos x\, dx = \frac{\sin x + 2\cos x}{5} e^{2x} + c.$$

4.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2 - x + 5}\, dx &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2 - x + 5}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x - 1 + 3}{x^2 - x + 5}\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2 - x + 5}\, dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2 - x + 5}\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2 - x + 5\right) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2 - x + 5 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}\, dx + c = \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2 - x + 5\right) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}}\, dx + c = \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2 - x + 5\right) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{(2x-1)^2}{4} + \frac{19}{4}}\, dx + c = \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2 - x + 5\right) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{19}{4}\left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{19}}\right)^2 + 1\right)}\, dx + c = \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2 - x + 5\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{19}\int \frac{1}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{19}}\right)^2}\, dx + c = \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2 - x + 5\right) + \frac{6}{19} \cdot \frac{\sqrt{19}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{19}}}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{19}}\right)^2}\, dx + c = \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2 - x + 5\right) + \frac{3}{\sqrt{19}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{19}}\right) + c.\end{aligned}$$

5. Integrando per parti $\left(\text{derivando } \log x \text{ e integrando } \frac{1}{x^2}\, dx\right)$ si ha

$$\int \frac{\log x}{x^2}\, dx = -\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx + c = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + c = -\frac{\log x + 1}{x} + c.$$

6. Applicando la sostituzione $y = e^x$ si ha

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}\, dx = \int \frac{1}{y^2 + 1}\, dy + \int \frac{1}{y(y^2 + 1)}\, dy = \arctan y + \int \frac{1}{y(y^2 + 1)}\, dy + c.$$

Studiamo ora la frazione nell'integrale:

$$\frac{A}{y}+\frac{By+C}{1+y^2}=\frac{A+Ay^2+By^2+Cy}{y(1+y^2)}=\frac{1}{y(1+y^2)} \iff A=1, B=-1, C=0.$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx &= \arctan y+\int \frac{1}{y}\,dy-\int \frac{y}{1+y^2}\,dy+c=\\ &= \arctan y+\int \frac{1}{y}\,dy-\frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy+c=\\ &= \arctan y+\log|y|-\frac{1}{2}\log(1+y^2)+c=\\ &= \arctan e^x+x-\frac{1}{2}\log\left(1+e^{2x}\right)+c.\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-5x^3+8x^2-9x+11}{x^2-5x+6}\,dx &= \int\left(\frac{x^4-5x^3+6x^2}{x^2-5x+6}+\frac{2x^2-9x+11}{x^2-5x+6}\right)dx=\\ &= \int x^2\,dx+\int\left(\frac{2x^2-10x+12}{x^2-5x+6}+\frac{x-1}{x^2-5x+6}\right)dx=\\ &= \int x^2\,dx+2\int dx+\int \frac{x-1}{x^2-5x+6}\,dx=\\ &= \frac{x^3}{3}+2x+\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\,dx+c.\end{aligned}$$

Studiamo ora la frazione nell'integrale:

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)}=\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \iff A=-1, B=2.$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-5x^3+8x^2-9x+11}{x^2-5x+6}\,dx &= \frac{x^3}{3}+2x-\int \frac{1}{x-2}\,dx+2\int \frac{1}{x-3}+c=\\ &= \frac{x^3}{3}+2x-\log|x-2|+2\log|x-3|+c.\end{aligned}$$

8. Applicando la sostituzione $y=\sqrt{1-x}$ si ha

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x}\,dx &= \int(1-y^2)y(-2y)\,dy=2\int(y^4-y^2)\,dy=\frac{2}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3+c=\\ &= \frac{2}{5}(1-x)^2\sqrt{1-x}-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+c.\end{aligned}$$

9. Applicando la sostituzione $y=e^x$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{-2x}-1}}\,dx=\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy=\arcsin y+c=\arcsin e^x+c.$$

10. Integrando per parti (derivando $\arctan(1+16x)$ e integrando $x\ dx$) si ha

$$\int x \arctan(1+16x)\ dx = \frac{x^2}{2}\arctan(1+16x) - 8\int \frac{x^2}{1+(1+16x)^2}\ dx + c.$$

Ora,

$$x^2 = \frac{(16x)^2}{256} = \frac{(16x+1-1)^2}{256} = \frac{(1+16x)^2+1-2(1+16x)}{256} = \frac{1+(1+16x)^2}{256} - \frac{1+16x}{128},$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}\int x \arctan(1+16x)\ dx &= \frac{x^2}{2}\arctan(1+16x) - \frac{1}{32}\int dx + \frac{1}{16}\int \frac{1+16x}{1+(1+16x)^2}\ dx + c = \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(1+16x) - \frac{x}{32} + \frac{1}{512}\int \frac{32(1+16x)}{1+(1+16x)^2}\ dx + c = \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(1+16x) - \frac{x}{32} + \frac{1}{512}\log\left(1+(1+16x)^2\right) + c.\end{aligned}$$

11. Risolviamo l'integrale per parti: deriviamo la funzione $\log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})$ ed integriamo la funzione 1. Otteniamo:

$$\begin{aligned}\int \log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})\ dx &= x\log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}) - \int \frac{x\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\ dx = \\ &= x\log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}) - \frac{1}{2}\int \frac{x(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}{2\sqrt{(x-1)(x+1)}(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}\ dx = \\ &= x\log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\ dx = \\ &= x\log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}) - \frac{1}{4}\int 2x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\ dx = \\ &= x\log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c.\end{aligned}$$

Esercizio 5. 1. Per parti:

$\int \sqrt{12-x^2}dx = \int \sqrt{12-x^2}\cdot 1dx = \sqrt{12-x^2}\cdot x - \int \frac{-2x}{2\sqrt{12-x^2}}\cdot xdx=$

$=\sqrt{12-x^2}\cdot x - \int \frac{12-x^2-12}{\sqrt{12-x^2}}dx = \sqrt{12-x^2}\cdot x - \int \frac{12-x^2}{\sqrt{12-x^2}}dx - \int \frac{-12}{\sqrt{12-x^2}}dx=$

$=\sqrt{12-x^2}\cdot x - \int \sqrt{12-x^2}dx + 12\int \frac{1}{\sqrt{12-x^2}}dx=$

$=\sqrt{12-x^2}\cdot x - \int \sqrt{12-x^2}dx + 12\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{2\sqrt{3}})^2}}dx$

Quindi, otteniamo:

$\int \sqrt{12-x^2}dx = \sqrt{12-x^2}\cdot x - \int \sqrt{12-x^2}dx + 12\arcsin(\frac{x}{2\sqrt{3}})$

Da cui, possiamo riscrivere

$2\int \sqrt{12-x^2}dx = \sqrt{12-x^2}\cdot x + 12\arcsin(\frac{x}{2\sqrt{3}})$

Dividendo per 2 otteniamo infine l'integrale desiderato.

Sostituendo poi gli estremi inferiore e superiore dell'integrale di partenza, il risultato finale sarà:

$-\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\pi$

2. Per calcolare l'integrale definito $\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\, \mathrm{d}x$, calcoliamo prima l'integrale indefinito $\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\, \mathrm{d}x$. Utilizziamo dapprima la sostituzione $2x+1=u$ e dunque $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, \mathrm{d}u$, e in seguito applichiamo la formula di integrazione per parti; otteniamo:

$$\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\log u}{u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\log u - \int \frac{-1}{u^2}\, \mathrm{d}u\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\log u - \frac{1}{u}\right)+c.$$

Pertanto

$$\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2(2x+1)}[1+\log(2x+1)] + c.$$

Dunque l'integrale definito cercato vale:

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\frac{1+\log(2x+1)}{2x+1}\right]_0^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1+\log 5}{5} - 1\right) = \frac{4-\log 5}{10}$$

3. Per risolvere l'integrale definito $\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x\, \mathrm{d}x$, si deve anzitutto spezzare l'intervallo di integrazione $[0,\sqrt{3}]$ nei due sottointervalli $[0,1]$ e $[1,\sqrt{3}]$, in quanto la funzione $|x-1|$ assume in essi due espressioni diverse; si ha dunque

$$\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x\, \mathrm{d}x = \int_0^1 4(1-x)\arctan x\, \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{3}} 4(x-1)\arctan x\, \mathrm{d}x.$$

Possiamo ora utilizzare la formula di integrazione per parti per calcolare l'integrale indefinito:

$$\int (x-1)\arctan x\, \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\arctan x - \int \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-2x}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$$

Poiché il polinomio a denominatore nell'ultimo integrale non ha grado superiore a quello a numeratore, procediamo con la divisione del numeratore per il denominatore:

$$\int \frac{x^2-2x}{x^2+1}\, \mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{2x+1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{2x}{x^2+1}\, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x =$$

$$= x - \log\left(x^2+1\right) - \arctan x + c.$$

Dunque:

$$\int (x-1)\arctan x\, \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\arctan x - \frac{1}{2}\left(x - \log\left(1+x^2\right) - \arctan x\right) + c.$$

Calcolando ora l'integrale definito, si ricava:

$$\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1|\arctan x\, \mathrm{d}x = -4\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\arctan x - \frac{1}{2}\left(x - \log\left(1+x^2\right) - \arctan x\right)\right]_0^1 +$$

$$+ 4\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\arctan x - \frac{1}{2}\left(x - \log\left(1+x^2\right) - \arctan x\right)\right]_1^{\sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3} + 4(2-\sqrt{3})\frac{\pi}{3}$$

4. Per la formula fondamentale del calcolo integrale, per risolvere l'integrale definito $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$, si deve prima trovare una primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ e poi calcolare $F(1) - F(0)$.

   Per calcolare $\int \frac{x-1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$, usiamo il metodo di decomposizione delle funzioni razionali in fratti semplici, ottenendo:

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{(x+2)(x-2)}.$$

   Uguagliando i coefficienti dei due polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 1 \\ 2A-2B &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= \frac{1}{4} \\ B &= \frac{3}{4} \end{cases}.$$

   Dunque

$$\int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{\frac{3}{4}}{x+2} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\log|x-2| + \frac{3}{4}\log|x+2| \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}\log 1 + \frac{3}{4}\log 3 - \frac{1}{4}\log 2 - \frac{3}{4}\log 2 = \frac{3}{4}\log 3 - \log 2$$

5. Riscriviamo anzitutto l'integrale come

$$\int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x-1}}{8e^{-x}+1}dx = \int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x-1}}{\frac{8}{e^x}+1}dx = \int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x-1}}{\frac{8+e^x}{e^x}}dx =$$
$$= \int_0^{\log 4} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x-1}}{8+e^x}dx.$$

   Poniamo

$$\sqrt{e^x-1} = t,$$

   da cui

$$\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx = dt$$

   Dovremo quindi moltiplicare e dividere, restando dentro al simbolo di integrale, per il fattore $2\sqrt{e^x-1}$ Cambiamo gli estremi di integrazione. Troviamo

$$t_0 = \sqrt{e^{to}-1} = \sqrt{e^0-1} = 0, \quad t_1 = \sqrt{e^{t+1}-1} = \sqrt{e^{e^6}-1} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$

   Osservato infine che, da $\sqrt{e^x-1} = t$ si trova $e^x - 1 = t^2$ da cui $e^x = 1 + t^2$, si ottiene che

$$\int_0^{\log 4} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{8+e^x}dx = 2 \cdot \int_0^{\log 4} \frac{e^x\sqrt{e^x-1} - \sqrt{e^x-1}}{2\sqrt{e^x-1} \cdot 8+e^x}dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{8+t^2+1}dt =$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+9}dt.$$

   Si tratta dell'integrale definito di una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore. Pertanto si dovrebbe procedere con la divisione di polinomi. Tuttavia, in questo caso, la decomposizione della frazione la si può effettuare aggiungendo e togliendo 9 al numeratore. Risulta

$$2\int \frac{t^2}{t^2+9}dt = 2\int \frac{t^2+9-9}{t^2+9}dt = 2\int \left(1-\frac{9}{t^2+9}\right)dt = 2t - 18\int \frac{1}{t^2+9}dt.$$

Calcoliamo da parte

$$\int \frac{1}{t^2+9}dt$$

Osserviamo che il denominatore non è scomponibile in fattori (in quanto somma di due quantità positive di cui una è un numero). Dobbiamo cercare quindi di ricondurci alla derivata dell' $\arctan f$ ricordando che

$$(\arctan f)' = \frac{f'}{1+f^2}.$$

Cominciamo a raccogliere 9 a denominatore per avere come primo addendo il numero 1. Si ha

$$\int \frac{1}{t^2+9}dt = \int \frac{1}{9-\left(1+\frac{t^2}{9}\right)}dt = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{3}\right)^2}dt$$

L'integrale è proprio del tipo

$$\int \frac{f'}{1+f^2}$$

essendo

$$f(t) = \frac{t}{3}$$

Poiché

$$f'(t) = \left(\frac{t}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3}-t\right)' = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3},$$

dobbiamo moltiplicare e dividere l'integranda per il fattore $\frac{1}{3}$ per poter cosi integrare. Si ottiene

$$\int \frac{1}{t^2+9}dt = \frac{1}{9} - 3\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{t}{3}\right)^2}dt = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{t}{3}\right)$$

Tornando all'integrale otteniamo

$$2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+9}dt = \left[2t - 18\int \frac{1}{t^2+9}dt\right]_0^{\sqrt{t}} =$$

$$= \left[2t - 18\cdot\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{t}{3}\right)\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \left[2t - 6\arctan\left(\frac{t}{3}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left[2\sqrt{3} - 6\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} - (0 - 6\arctan 0)\right] = 2\sqrt{3} - 6\cdot\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} - \pi.$$

6. Vista la struttura dell'integranda, conviene partire con una sostituzione. Poniamo

$$\sqrt{e^{2x}-1} = t.$$

Derivando alla Leibniz si trova

$$\frac{1}{2\sqrt{e^{2x}-1}}\cdot 2e^{2x}dx = dt,$$

cioè

$$\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = dt.$$

Trasformiamo gli estremi di integrazione. Si trova

$$\begin{aligned} t_0 &= \sqrt{e^{2x_0}-1} = \sqrt{e^{2\log\sqrt{2}}-1} = \sqrt{e^{\log(\sqrt{2})^2}-1} = \sqrt{2-1} = 1, \\ t_0 &= \sqrt{e^{2x_1}-1} = \sqrt{e^{2\log\sqrt{5}}-1} = \sqrt{e^{\log(\sqrt{5})^2}-1} = \sqrt{5-1} = 2, . \end{aligned}$$

Osserviamo infine che da $\sqrt{e^{2x}-1} = t$ si ricava

$$e^{2x} = t^2 + 1$$

vale a dire

$$2x = \log\left(t^2+1\right),$$

da cui

$$x = \frac{1}{2}\log\left(t^2+1\right).$$

L'integrale definito di partenza si trasforma come segue grazie al teorema di sostituzione:

$$\begin{aligned} \int_{\log\sqrt{2}}^{\log\sqrt{5}} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = \int_{\log\sqrt{2}}^{\log\sqrt{5}} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\log\left(t^2+1\right)dt = \\ = \frac{1}{2}\int_1^2 \log\left(t^2+1\right)dt. \end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\frac{1}{2}\int \log\left(t^2+1\right)dt$$

Lo risolviamo utilizzando la formula d'integrazione per parti. In particolare deriviamo la funzhone $\log\left(t^2+1\right)$ e integriamo la funzione 1. Si ha

$$\begin{array}{ll} \text{derivo} & \text{integro} \\ \log\left(t^2+1\right) & 1 \\ \dfrac{2t}{t^2+1} & -5\cdot t \end{array}$$

Pertanto

$$\frac{1}{2}\int \log\left(t^2+1\right)dt = \frac{1}{2}\cdot\left(t\log\left(t^2+1\right) - \int \frac{2t}{t^2+1} - tdt\right) = \frac{1}{2}t\log\left(t^2+1\right) - \int \frac{t^2}{t^2+1}dt.$$

Calcoliamo

$$\int \frac{t^2}{t^2+1}dt$$

Risulta

$$\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \int \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = t - \arctan t$$

Pertanto

$$\frac{1}{2}\int \log\left(t^2+1\right)dt = \frac{1}{2}t\log\left(t^2+1\right) - \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}t\log\left(t^2+1\right) - (t-\arctan t) =$$
$$= \frac{1}{2}t\log\left(t^2+1\right) - t + \arctan t.$$

Possiamo ora calcolare l'integrale definito tra 1 e 2: si ha

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \log\left(t^2+1\right)dt = \left[\frac{1}{2}t\log\left(t^2+1\right) - t + \arctan t\right]_1^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \log 5 - 2 + \arctan 2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \log 2 - 1 + \arctan 1\right) =$$
$$= \log 5 - \frac{1}{2}\log 2 - 3 + \arctan 2 - \frac{\pi}{4} = \log\frac{5}{\sqrt{2}} - 3 + \arctan 2 - \frac{\pi}{4}.$$

7.

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} + 2}\,\mathrm{d}x$$

Effettuando la sostituzione $e^x = t$, da cui $x = \log t$ e $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, si ottiene

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}+2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{t^2+1+2t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(t-1)(t+1)}{(t+1)^2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t-1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$$

Con il metodo di decomposizione in fratti semplici si ottiene:

$$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)} = \frac{(A+B)t+A}{t(t+1)}.$$

Uguagliando i coefficienti dei polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}.$$

Dunque:

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t = -\log|t| + 2\log|t+1| + c = -\log|e^x| + 2\log|e^x+1| + c =$$
$$= \log\left(e^x+1\right)^2 - x + c$$

Calcolando fra gli estremi di integrazione si ottiene infine

$\log(e+1)^2 - 1 - \log(4)$

8. La simmetria dell'intervallo di integrazione, $[-3,3]$, fa sperare in qualche semplificazione dei calcoli. Anzitutto, sfruttando la linearità dell'integrale definito, si ha

$$\int_{-3}^{3}\left(|x|\log(x+4)dx + x^9\arctan\left(x^2+3\right)\right)dx = \int_{-3}^{3}|x|\log(x+4)dx + \int_{-3}^{3}x^9\arctan\left(x^2+3\right)dx$$

Poiché la funzione

$$g(x) = x^9\arctan\left(x^2+3\right)$$

è dispari, in quanto

$$g(-x) = (-x)^9 \arctan\left((-x)^2+3\right) = -x^9 \arctan\left(x^2+3\right) = -g(x),$$

ne segue, per i risultati esposti, che

$$\int_{-3}^{3} x^9 \arctan\left(x^2+3\right) dx = 0$$

Pertanto non dobbiamo calcolare tale contributo per l'integrale finale. L'integrale di partenza diviene

$$\int_{-3}^{3} \left(|x|\log(x+4) + x^9 \arctan\left(x^2+3\right)\right) dx = \int_{-3}^{3} |x|\log(x+4) dx$$

Quest'ultimo integrale, invece, va calcolato. Infatti, la funzione

$$|x|\log(x+4)$$

non presenta particolari simmetrie (essendo definita per $x > -4$). Per calcolare il valore dell'integrale è anzitutto opportuno liberarsi del valore assoluto. Poiché

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

si ha

$$f(x) = \begin{cases} -x\log(x+4) & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ x\log(x+4) & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Pertanto

$$\int_{-3}^{3} |x|\log(x+4)dx = \int_{-3}^{0} -x\log(x+4)dx + \int_{0}^{3} x\log(x+4)dx =$$
$$= -\int_{-3}^{0} x\log(x+4)dx + \int_{0}^{3} x\log(x+4)dx.$$

Dobbiamo anzitutto procurarci una primitiva di $x\log(x+4)$. Calcoliamo quindi

$$\int x\log(x+4)dx$$

Tale integrale indefinito lo risolviamo applicando la formula di integrazione per parti. Deriviamo $\log(x+4)$ e integriamo x. Si ha

derivo	integro
$\log(x+4)$	x
$\frac{1}{x+4}$	$\frac{x^2}{2}$

Per la formula d'integrazione per parti, l'integrale diviene

$$\int x\log(x+4)dx = \frac{x^2}{2}\log(x+4) - \int \frac{1}{x+4}\cdot\frac{x^2}{2}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}\log(x+4) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+4}dx.$$

Risolviamo l'integrale. Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta in cui il numeratore ha maggior grado del denominatore. Eseguiamo anzitutto la divisione di polinomi tra numeratore e denominatore. Risulta

$$\begin{array}{rrr|rr} x^2 & +0x & +0 & x & +4 \\ \hline -x^2 & -4x & & x & -4 \\ -4x & & & & \\ 4x & +16 & & & \\ & +16 & & & \end{array}$$

L'integrale indefinito diviene

$$\int \left(x - 4 + \frac{16}{x+4} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 16 \log|x+4| + c.$$

Quindi

$$\int x \log(x+4) dx = \frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 16 \log(x+4) \right) + c =$$

$$= \frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{4} x^2 + 2x - 8 \log(x+4) + c.$$

Tornando all'integrale definito, abbiamo

$$\int_{-3}^{3} f(x) dx = - \left[\frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{4} x^2 + 2x - 8 \log(x+4) \right]_{-3}^{0} +$$

$$+ \left[\frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{4} x^2 + 2x - 8 \log(x+4) \right]_{0}^{3} =$$

$$= - \left(-8 \log 4 - \left(\frac{9}{2} \log(1) - \frac{9}{4} - 6 - 8 \log 1 \right) \right) + \frac{9}{2} \log 7 - \frac{9}{4} + 6 - 8 \log 7 - (-8 \log 4) =$$

$$= 16 \log 4 - \frac{9}{2} - \frac{7}{2} \log 7.$$