Tutorato 8
Am110 - Analisi Matematica 1 (CdL in Matematica)
Analisi Matematica 1 - I modulo (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
DOCENTE: Pierpaolo Esposito
TUTORI (MATEMATICA): Matteo Pandolfi, Michela Policella
TURORE (FISICA): Daniele Tagliacozzo

13/12/2022

Parte I:
Serie

Esercizio 1. Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)\cos\left(\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{\frac{n^6+n^3}{n^{15}+1}}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^4)+n^{\frac{5}{3}}}{n^{\frac{5}{3}}\log(n^n+n!)}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3\log n}\right)^{\frac{n}{7}\sin\left(\frac{2}{n}\right)}$.

Esercizio 2. Studiare il carattere delle seguenti serie al variare di x nei domini indicati:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\left|1-\frac{x}{n}\right|^{n\log n} \qquad x\in\mathbb{R}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(x+\frac{1}{n}\right)^{\log n}} \qquad x>0$;

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+n}{1+n^3x^2} \quad x \in \mathbb{R};$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\sqrt{n}} \quad x \in \mathbb{R};$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x+n^2}{n^{2x}+n^3} \quad x \in \mathbb{R};$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{x}{n}}{n^x} \quad x \in \mathbb{R};$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}} \quad x > 1;$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left(\frac{n\tan^3\left(\frac{x}{n}\right)}{2\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)}\right)^n \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2};$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2}}{n(\log n)^2} \quad x \in \mathbb{R}.$

Parte II: Integrali

Esercizio 3. Risolvere i seguenti integrali indefiniti:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{1-x^4}\,dx;$

b) $\displaystyle\int \sqrt{9x^2-1}\,dx;$

c) $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,dx;$

d) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x\sqrt{4+3\log^2 x}}\,dx;$

e) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx;$

f) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx;$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+5x+7}\,dx;$

h) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}\,dx.$

Esercizio 4. Risolvere i seguenti integrali definiti :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \arctan x\,dx;$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(1+\tan^2 x\right) \log(1+\tan x)\, dx$;

3. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{-2x}\, dx$;

4. $\displaystyle\int_{-5}^5 \frac{e^{x^2}\sin x}{\log(1+|x|)+1}\, dx$

   Suggerimento: prima di risolvere, ragionare qualitativamente sulla funzione integranda;

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 x+1}\, dx$;

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\, dx$;

7. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x} \arcsin\left(\sqrt{x}\right)\, dx$;

8. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{3\cos x\sin x+4\sin x}{\sin^2 x+2\cos^2 x-\cos x}\, dx$;

9. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \log\left(2x^2+3\right)\, dx$;

10. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+e^x}\, dx$.

Esercizio 5. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \int_1^x \frac{1+e^{-t}}{1+(t-1)e^{-t}}\, dt.$$

Soluzioni

Esercizio 1. a) Utilizziamo il criterio del confronto asintotico:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

Dal criterio del rapporto segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1,$$

quindi la serie converge;

b) Per studiare questa serie osserviamo quanto segue:

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ +1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}.$$

Possiamo dunque riscrivere la serie come segue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{2n}\right) \sin\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Ricordiamo a questo punto che $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, per cui possiamo studiare la serie come segue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{2n}\right) \sin\left(\frac{1}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \sin\left(\frac{1}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Osserivamo che il criterio della convergenza assoluta non funziona in questo caso perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

dove è stato usato il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Usando invece il criterio di Leibniz si ottiene che la serie converge: infatti

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

e la funzione $\sin x$ è crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, per cui, osservando che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $0 < \frac{1}{n} < 1$, si ha che

$$\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) < \sin\left(\frac{1}{n}\right),$$

quindi la successione è infinitesima;

c) Applicando il confornto asintotico si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[7]{\frac{n^6+n^3}{n^{15}+1}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[7]{\frac{n^6}{n^{15}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{6}{7}}}{n^{\frac{15}{7}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{9}{7}}}<\infty$$

in quanto $\frac{9}{7}>1$;

d) Utilizziamo il criterio del confronto asintotico:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^4)+n^{\frac{5}{3}}}{n^{\frac{5}{3}}\log(n^n+n!)}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(n^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n}.$$

Utilizziamo ora il **criterio di condensazione di Cauchy**, il quale dice che, data una serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, vale che

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n<\infty\qquad\Longleftrightarrow\qquad\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}<\infty.$$

Applicandolo nel nostro caso si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\log(2^n)}=\frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

La serie di partenza è quindi divergente;

e) Applichiamo il criterio del confronto asintotico ricordando il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}=1$$

come segue:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3\log n}\right)^{\frac{n}{7}\sin\left(\frac{2}{n}\right)}\sim\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3\log n}\right)^{\frac{n}{7}\cdot\frac{2}{n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3\log n}\right)^{\frac{2}{7}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{6}{7}}(\log n)^{\frac{2}{7}}}.$$

Applichiamo ora il criterio di condensazione di Cauchy. Otteniamo

$$\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^{\frac{6n}{7}}n^{\frac{2}{7}}(\log 2)^{\frac{2}{7}}}=\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{7}}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{7}}}{n^{\frac{2}{7}}}.$$

Esercizio 2. a) Distinguiamo i due casi $x\leq 0$ e $x>0$.

- $x\leq 0$. In questo caso $\left|1-\frac{x}{n}\right|^{n\log n}=\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n\log n}$. Possiamo dunque procedere con il confronto asintotico come segue:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n\log n}&\sim\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}e^{-x\log n}=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}e^{-x\log n}=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-x}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\sim\\&\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-x}}{\sqrt{n}}=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+x}}.\end{aligned}$$

Quest'ultima serie converge se e solo $x + \frac{1}{2} > 1$, quindi se $x > \frac{1}{2}$. Ne consegue che per $x \leq 0$ la serie diverge;

- $x > 0$. In questo caso scriviamo studiamo quando il segno dell'argomento del modulo, ovvero $1 - \frac{x}{n} \geq 0 \iff x \leq n$, e riscriviamo la serie come segue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left| 1 - \frac{x}{n} \right|^{n \log n} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left(1 - \frac{x}{n} \right)^{n \log n} + \sum_{n=\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left(\frac{x}{n} - 1 \right)^{n \log n},$$

dove con $\lfloor x \rfloor$ indichiamo la *parte intera inferiore di* x, ovvero quel numero n tale che $n \leq x < n + 1$.
A questo punto possiamo ignorare la prima sommatoria, in quanto essendo finita sicuramente convergerà, e studiare solo la seconda.

$$\sum_{n=\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left(\frac{x}{n} - 1 \right)^{n \log n} = \sum_{n=\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n \log n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^{n \log n} =$$
$$= \sum_{n=\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n \log n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} e^{-x \log n} =$$
$$= \sum_{n=\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n \log n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} n^{-x}.$$

Procediamo per convergenza assoluta:

$$\sum_{n=\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n \log n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} n^{-x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-x}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \sim$$
$$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+\frac{1}{2}}}.$$

L'ultima serie converge se e solo se $x + \frac{1}{2} > 1$, ovvero se $x > \frac{1}{2}$.
Resta da capire se la serie converga o meno per $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. In tal caso basta osservare che non viene soddisfatta la condizione necessaria di convergenza:

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^{n \log n} \frac{n^{-x}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \lim_{n \to \infty} (-1)^{n \log n} \frac{1}{2n^{x+\frac{1}{2}}}$$

è uguale a 0 se e solo se $x > \frac{1}{2}$.

In conclusione, la serie è convergente per $x > \frac{1}{2}$ e non convergente per $x \leq \frac{1}{2}$;

b) Applichiamo il criterio di condensazione di Cauchy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(x + \frac{1}{n}\right)^{\log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(\frac{xn+1}{n}\right)^{\log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2+\log n}}{(xn+1)^{\log n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2+\log n}}{(xn)^{\log n}} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^{\log n}}.$$

Per il criterio di condensazione di Cauchy questa serie converge se e solo se converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{(2^n)^2}{x^{\log 2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{3n} x^{-n\log 2}.$$
Applichiamo il criterio della radice ed osserviamo che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{3n}}{x^{n\log 2}}} = \frac{2^3}{x^{\log 2}} < 1 \iff x > 2^{\frac{3}{\log 2}}.$$
Ne consegue che la serie non converge se $x \in (0, 2^{\frac{3}{\log 2}}]$ e converge in $(2^{\frac{3}{\log 2}}, \infty)$;

c) Dividiamo lo studio della serie nei casi $x \neq 0$ e $x = 0$.

- $x \neq 0$: Procediamo con il confronto asintotico:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+n}{1+n^3x^2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$
quindi la serie converge;
- $x = 0$: In tal caso la serie sarebbe
$$\sum_{n=0}^{\infty} n = +\infty.$$

Ne consegue che la serie è convergente per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e divergente per $x = 0$;

d) Utilizziamo il criterio di condensazione di Cauchy:
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2(x+1)}\right)^{\sqrt{n}} < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{x}{2(x+1)}\right)^{\sqrt{2^n}} < \infty.$$
Utilizziamo il criterio della radice ed otteniamo che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{x}{2(x+1)}\right)^{\frac{2^n}{n}}} < 1$$
se e solo se
$$\left|\frac{x}{2(x+1)}\right| < 1.$$
Ciò significa che la serie converge se e solo se $x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{2}{3}, \infty)$;

e) Per capire il carattere di convergenza di questa serie possiamo procedere con il confronto asintotico e, a tal riguardo, vi sono tre casi da considerare:

- $x \geq 2$. In questo caso si ha
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x + n^2}{n^{2x} + n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{n^{2x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} < \infty$$
in quanto la serie converge per ogni $x > 1$ e noi stiamo considerando il caso $x \geq 2$;

- $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. In questo caso si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x + n^2}{n^{2x} + n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^{2x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(x-1)}} < \infty$$

in quanto stiamo considerando le x più grandi di $\frac{3}{2}$;

- $x \leq \frac{3}{2}$. In questo caso si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x + n^2}{n^{2x} + n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Ricapitolando, la serie è convergene per $x \in (\frac{3}{2}, \infty)$ e non convergente altrimenti;

f) Osserviamo subito che se $x = 0$ il termine generico della successione è nullo, quindi la serie converge. Ricordando ora il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = 1$$

ed utilizzando il confronto asintotico si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{n^x} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} \cdot \frac{1}{n^x} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1}} < \infty$$

se e soltanto se $x > 0$.
Ricapitolando, la serie converge per $x \in (0, \infty)$ e non converge altrimenti;

g) Dobbiamo distinguere i due casi per cui il logaritmo è positivo o negativo.

- $1 < x < e$: In questo caso $\log x < 0$. Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\log x}\right)^{\log n} = 0$$

se e solo se $x > e$. Venendo dunque meno la condizione necessaria, la serie non può converge per $x \in (1, e)$;

- $x > e$: Utilizziamo il criterio di condensazione di Cauchy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\log x}\right)^{\log n} < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{\log x}\right)^{n \log 2} < \infty.$$

Applichiamo ora il criterio della radice alla seconda serie:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{1}{\log x}\right)^{n \log 2}} = 2 \left(\frac{1}{\log x}\right)^{\log 2} < 1$$

se e solo se $x > e^{2^{\frac{1}{\log 2}}}$.

La serie converge dunque per $x \in (e^{2^{\frac{1}{\log 2}}}, \infty)$ e non converge altrimenti;

h) Ricordiamo i due limiti notevoli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{x}{n}\right)^2}.$$

Usando il confronto asintotico otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{n\tan^3\left(\frac{x}{n}\right)}{2\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)}\right)^n \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{n\left(\frac{x}{n}\right)^3}{2\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{x^{3n}}{x^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n < \infty$$

se e solo se $|x| < 1$. Se infatti $|x| > 1$ verrebbe violata la condizione necessaria, mentre se $|x| < 1$ basterebbe applicare la convergenza assoluta e successivamente il criterio della radice.

i) Applichiamo il criterio della radice.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2}}{n(\log n)^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x < 1$$

se e soltanto se $x < \log 1$, ovvero $x < 0$.
Resta da studiare il carattere della serie per $x = 0$. In tal caso si avrebbe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$$

quindi, applicando il criterio di condensazione di Cauchy, si otterrebbe

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{2^n}{(\log 2^n)^{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\log^2 2} < \infty.$$

La serie, dunque, converge per $x \in (-\infty, 0)$ e non converge altirmenti.

Esercizio 3. a) Operiamo la sostituzione

$$x^2 = y \qquad \text{e} \qquad 2x\ dx = dy.$$

Otteniamo

$$\int \frac{x}{1-x^4}\ dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1-y^2}\ dy = \frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-y)\,(1+y)}\ dy.$$

Utilizzando il metodo dei fratti semplici si ha

$$\frac{A}{1-y}+\frac{B}{1+y} = \frac{A+Ay+B-By}{1-y^2}$$

da cui segue che

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{2}.$$

Si ottiene quindi

$$\int\frac{x}{1-x^4}\ dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{1-y}\ dy + \frac{1}{4}\int\frac{1}{1+y}\ dy = -\frac{1}{4}\log|1-y| + \frac{1}{4}\log|1+y| + c =$$
$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + c = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| + c;$$

b) Operiamo la sostituzione $3x = y$, da cui $dx = \frac{1}{3}\ dy$. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9x^2-1}\ dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{y^2-1}\ dy &\overset{*}{=} \frac{1}{3}\left(y\sqrt{y^2-1} - \int \frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}}\ dy\right) = \\ &= \frac{1}{3}y\sqrt{y^2-1} - \frac{1}{3}\int \frac{y^2-1+1}{\sqrt{y^2-1}}\ dy = \\ &= \frac{1}{3}y\sqrt{y^2-1} - \frac{1}{3}\sqrt{y^2-1}\ dy - \frac{1}{3}\operatorname{arcosh}(\sqrt{y^2-1}) + c.\end{aligned}$$

In $*$ abbiamo integrato per parti integrando la funzione costante 1 e derivando $\sqrt{y^2-1}$. Ci accorgiamo ora che l'integrale è diventato ciclico. Portando tutto a sinistra dell'uguale si ottiene

$$2\left(\frac{1}{3}\int \sqrt{y^2-1}\ dy\right) = \frac{1}{3}y\sqrt{y^2-1} - \frac{1}{3}\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{y^2-1}\right) + c.$$

Risostituendo si ha

$$\int \sqrt{9x^2-1}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{9x^2-1} - \frac{1}{6}\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{9x^2-1}\right) + c;$$

c) Operiamo la sostituzione $e^x - 1 = y^2$, da cui $dx = \frac{2y}{y+1}\ dy$. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x-1}\ dx = 2\int \frac{y^2}{y^2+1}\ dy &= 2\int \frac{y^2+1-1}{y^2+1}\ dy = \\ &= 2\int dy - 2\int \frac{1}{y^2+1}\ dy = 2y - 2\arctan y + c = \\ &= 2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) + c;\end{aligned}$$

d) Riscrivendo bene l'integrale ci accorgiamo che è della forma

$$\int f'(x)\cdot[f(x)]^\alpha\ dx.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x\sqrt{4+3\log^2 x}}\ dx &= \int \frac{1}{x}\log x(4+3\log^2 x)^{-\frac{1}{2}}\ dx = \\ &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{x}(6\log x)(4+3\log^2 x)^{-\frac{1}{2}}\ dx = \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{4+3\log^2 x} + c;\end{aligned}$$

e) Risolviamo l'integrale come segue:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\ dx = \int \sin x\cdot\sin^2 x\ dx &= \int \sin x(1-\cos^2 x)\ dx = \\ &= \int \sin x\ dx + \int -\sin x(\cos x)^2\ dx = \\ &= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c;\end{aligned}$$

f) Per questo integrale è utile ricordarsi le seguenti identità trigonometriche:

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 - 2\sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \end{cases} .$$

Tenendo a mente ciò risolviamo l'esercizio come segue:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\; dx = \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x\; dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\; dx = \frac{1}{4}\int 1 - \cos^2(2x)\; dx = \\ = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\; dx = \\ = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{2} + \frac{\cos(4x)}{2}\; dx = \\ = \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin(4x) + c = \\ = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin(4x) + c.\end{aligned}$$

g) Il polinomio a denominatore non ha radici reali (risulta $\Delta = -3 < 0$); con la tecnica del completamento del quadrato possiamo scrivere:

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Osservazione. In generale, se il polinomio $ax^2 + bx + c$ non ha radici reali, è possibile scriverlo nel modo seguente:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right].$$

Ricordando la formula

$$\int \frac{1}{(x+m)^2 + k^2} dx = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x+m}{k}\right) + C,$$

l'integrale iniziale, dunque, può essere calcolato così

$$\int \frac{1}{x^2 + 5x + 7} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\frac{x + \frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C.$$

Semplificando si trova

$$\int \frac{1}{x^2 + 5x + 7} dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2x+5}{2}\right) + C$$

e quindi

$$\int \frac{1}{x^2 + 5x + 7} dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

h) Possiamo procedere per sostituzione di variabile, ponendo

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt.$$

Si ottiene così:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^4 x \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \left(t^4 + t^6\right) dt$$
$$= \frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + c = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + c.$$

NB. La sostituzione $\operatorname{tg} x = t$ è possibile ogni volta che l'elemento $f(x)dx$ è invariante rispetto a $x \to \pi + x$

Esercizio 4. 1. Operando la sostituzione $t = \arctan x$, da cui $t(0) = 0, t(1) = \pi/4$, ed osservando che $\frac{1}{1+x^2} dx = dt$, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2} \arctan x dx = \int_0^{\pi/4} t\mathrm{e}^t dt$$

Integrando l'ultima espressione per parti, ricaviamo

$$\int_0^{\pi/4} t\mathrm{e}^t dt = t\mathrm{e}^t\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^t dt = (t-1)\mathrm{e}^t\Big|_0^{\pi/4} = (\pi/4 - 1)\mathrm{e}^{\pi/4} + 1.$$

2. Effettuando il cambiamento di variabile $t = 1 + \tan x$, da cui $dt = 1 + \tan^2 x dx$, $t(0) = 1, t(\pi/4) = 2$, si ricava

$$\int_0^{\pi/4} \left(1 + \tan^2 x\right) \log(1+\tan x) dx = \int_1^2 \log t dt = t \log t|_1^2 - \int_1^2 t \frac{1}{t} dt = 2\log 2 - t|_1^2 = 2\log 2 - 1$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato un'integrazione per parti con $u(t) = \log t$ e $v'(t) = 1$.

3. Utilizziamo il metodo di integrazione per parti, una prima volta con u(x) $= x^2$ e $v'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ ed una seconda volta con $u(x) = x$ e ancora $v'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, in modo da azzerare il grado del polinomio. Svolgiamo l'esercizio in due modi, assolutamente equivalenti, sfruttando it Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale: in un caso calcoliamo i valori della primitiva agli estremi di integrazione a ogni passo, in modo da poter, eventualmente, semplificare l'espressione in qualche passo dell'integrazione; nel secondo caso, calcoliamo prima l'integrale indefinito, per poi calcolare la primitiva negli estremi solo all'ultimo passaggio.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x^2 \mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^1 + \int_0^1 x\mathrm{e}^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2} x\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left(1 - 5\mathrm{e}^{-2}\right) \end{aligned}$$

Oppure:

$$\begin{aligned} \int x^2 \mathrm{e}^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x^2 \mathrm{e}^{-2x} + \int x\mathrm{e}^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2} x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\left(2x^2 + 2x + 1\right) + C = F(x) + C \end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{-2x} dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{4}\left(5\mathrm{e}^{-2} - 1\right).$$

4. Osserviamo che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine e la funzione integranda è dispari e quindi l'integrale proposto è nullo.

5. Utilizziamo le formule parametriche richiamate all'inizio del capitolo, per riscrivere le potenze pari delle funzioni seno e coseno in termini della tangente. Poniamo, quindi, $t = \tan x$, da cui $x = \arctan t, dx = \frac{1}{1+t^2}dt, t(0) = 0, t(\pi/4) = 1$. Otteniamo così:
$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2} + 1} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+2t^2} dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t)\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\sqrt{2}.$$

6. Il polinomio $x^3 + 2x^2 + x + 2$ ammette la radice $x = -2$; dunque è divisibile per $x + 2$. Effettuando i calcoli si trova $x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x + 2)\left(x^2 + 1\right)$. Dunque
$$\int \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\, \mathrm{d}x = \int \frac{9x+8}{(x+2)\left(x^2+1\right)} \mathrm{d}x.$$
Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.
$$\frac{9x+8}{(x+2)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)\left(x^2+1\right)} =$$
$$= \frac{(A+B)x^2 + (2B+C)x + A + 2C}{(x+2)\left(x^2+1\right)}.$$
Uguagliando i polinomi a numeratore della prima e dell'ultima fraziоne, si ottiene il sistema:
$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=9 \\ A+2C=8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=2 \\ C=5 \end{cases}.$$
Pertanto:
$$\int \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{-2}{x+2} + \frac{2x+5}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x = \int \frac{-2}{x+2}\, \mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\, \mathrm{d}x + \int \frac{5}{x^2+1}\, \mathrm{d}x =$$
$$= -2\log|x+2| + \log\left(x^2+1\right) + 5\arctan x + c =$$
$$= \log\frac{x^2+1}{(x+2)^2} + 5\arctan x + c.$$
Sostituendo infine gli estremi si trova: $\log(\frac{8}{9}) + 5\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Integrando per parti (derivando $\arcsin\sqrt{x}$ e integrando $\sqrt{x}$) si ha
$$\int_0^1 \sqrt{x}\arcsin\left(\sqrt{x}\right)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arcsin\left(\sqrt{x}\right)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx = \frac{2}{3}\arcsin(1) + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}}\, dx =$$
$$= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx =$$
$$= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[2\sqrt{1-x}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{3} =$$
$$= \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}.$$

8. Applicando la sostituzione $\cos x = t$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{3\cos x \sin x + 4\sin x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - \cos x}\, dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x\,(3\cos x + 4)}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - \cos x}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{3t+4}{t^2 - t + 1}\, dt = \\
&= 3\int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2-t+1}\, dt + 4\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2-t+1}\, dt = \\
&= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2t}{t^2-t+1}\, dt + 4\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2-t+1}\, dt = \\
&= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2t-1+1}{t^2-t+1}\, dt + 4\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2-t+1}\, dt = \\
&= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2t-1}{t^2-t+1}\, dt + \frac{11}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2-t+1}\, dt = \\
&= \frac{3}{2}\left[\log\left(t^2-t+1\right)\right]_{-1}^{1} + \frac{11}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2-t+1}\, dt = \\
&= -\frac{3}{2}\log 3 + \frac{11}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2-t+1}\, dt.
\end{aligned}
$$

Studiamo ora il secondo integrale:

$$
t^2 - t + 1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + t^2 - t = \frac{3}{4} + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\left(1 + \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)
$$

da cui segue che

$$
\frac{11}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2-t+1}\, dt = \frac{11}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\, dt = \frac{11}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^{1} = -\frac{11}{2\sqrt{3}}\pi.
$$

Ma allora si ha

$$
\int_0^{\pi} \frac{3\cos x \sin x + 4\sin x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - \cos x}\, dx = -\frac{3}{2}\log 3 - \frac{11}{2\sqrt{3}}\pi.
$$

9. Integrando per parti (derivando $\log\left(2x^2+3\right)$ e integrando 1) si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \log\left(2x^2+3\right)\,dx &= \left[x\log\left(2x^2+3\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} - \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{4x^2}{2x^2+3}\,dx = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\log 6 - 2\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{2x^2}{2x^2+3}\,dx = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\log 6 - 2\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{2x^2+3-3}{2x^2+3}\,dx = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\log 6 - 2\int_0^{\frac{3}{2}} dx + 6\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2x^2+3}\,dx = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\log 6 - 2\,[x]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} + 6\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{1}{3\left(1+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2\right)}\,dx = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\log 6 - \sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2}\,dx = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\log 6 - \sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\log 6 - \sqrt{6} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

10. Applicando la sostituzione $\sqrt{1+e^x}=t$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+e^x}\,dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{2t^2}{t^2-1}\,dt = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt = \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} dt + 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{(t-1)\,(t+1)}\,dt = \\ &= 2\,[t]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} + 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{(t-1)\,(t+1)}\,dt = \\ &= 2\left(\sqrt{1+e}-\sqrt{2}\right) + 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{(t-1)\,(t+1)}\,dt.\end{aligned}$$

Ora, utilizzando il metodo dei fratti semplici si ha

$$\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{At+A+Bt-B}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{(t-1)(t+1)}$$

da cui segue che

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Ma allora

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+e^x}\,dx &= 2\left(\sqrt{1+e}-\sqrt{2}\right)+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}}\frac{1}{(t-1)}\,dt-\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}}\frac{1}{(t+1)}\,dt=\\ &= 2\left(\sqrt{1+e}-\sqrt{2}\right)+\left[\log\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}}=\\ &= 2\left(\sqrt{1+e}-\sqrt{2}\right)+\log\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1+e}+1}-\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\\ &= 2\left(\sqrt{1+e}-\sqrt{2}\right)+\log\left(\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1+e}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).\end{aligned}$$

Esercizio 5. Innanzitutto,

$$\lim_{x\to 0^+}\int_1^x \frac{1+e^{-t}}{1+(t-1)e^{-t}}\,dt=\lim_{x\to 0^+}\int_1^x\frac{e^t+1}{e^t+t-1}\,dt.$$

Si osservi ora che $\frac{d}{dt}\left(e^t+t-1\right)=e^t+1$, da cui segue che

$$\lim_{x\to 0^+}\int_1^x\frac{e^t+1}{e^t+t-1}\,dt=\lim_{x\to 0^+}\left[\log\left(e^t+t-1\right)\right]_1^x=\lim_{x\to 0^+}\left[\log\left(e^x+x-1\right)-\log e\right]=-\infty.$$