Tutorato 9
Am110 - Analisi Matematica 1 (CdL in Matematica)
Analisi Matematica 1 - I modulo (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
DOCENTE: Pierpaolo Esposito
TUTORI (MATEMATICA): Matteo Pandolfi, Michela Policella
TURORE (FISICA): Daniele Tagliacozzo

19/12/2022

Parte I: Equazioni differenziali

Esercizio 1. Trovare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali:

(h) $\dot{x}(t) = \frac{3t^2}{x(t)}$;

(o) $\dot{x}(t) = -(x(t))^3 \sinh t$;

(l) $\dot{x}(t) = \left(\sqrt{1-(x(t))^2}\right) \cos t$;

(i) $\dot{x}(t) = (1+(x(t))^2) \sin t$;

(d) $(t^2+1)\dot{x}(t) + (x(t))^2 = 0$;

(a) $\dot{x}(t) + 2tx(t) = t$;

(y) $\dot{x}(t) + x(t) = t^3$;

(s) $(\sin t)\dot{x}(t) + (\cos t)x(t) = e^t$.

Esercizio 2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

1. $\begin{cases} \dot{x} = e^t + t \\ x(0) = 10 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x^2} \\ x(1) = 1 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} \dot{x} + t\tan(x) = 0 \\ x(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

4. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{tx}{(t-1)^2} \\ x(2) = 1 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} \dot{x} = xt + 2t \\ x(0) = 0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} \dot{x} = \left(\frac{x-1}{t-1}\right)^2 \\ x(0) = e \end{cases}$;

7. $\begin{cases} t\dot{x} = \sqrt{x^2 - 1} \\ x(1) = \sqrt{\pi} \end{cases}$;

8. $\begin{cases} \dot{x} = x\cos 2t + (\sin t)^2 - \frac{1}{2} \\ x(0) = -2 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} \dot{x} + (\log t)x = \log t \\ x(e) = 2 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} \dot{x} = x\log t + t^t \\ x(e) = e^e + 7 \end{cases}$;

Parte II: Integrali impropri

Esercizio 3. 1. • Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ converge $\int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} \mathrm{d}x$;

• Calcolare l'integrale precedente per $a = 6$;

2. Calcolare $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^n} \mathrm{d}x$ per il più piccolo valore di $n \in \mathbf{N}$ per cui l'integrale converge.

Esercizio 4. Usando la definizione, risolvere i seguenti integrali impropri:

1. $\int_0^{+\infty} \left(x^3\left(8 + x^4\right)^{-5/3} + 2xe^{-x}\right) \mathrm{d}x$;

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x$;

Esercizio 5. Data la funzione $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})}$, studiarne il comportamento nell'origine e determinarne la parte principale. Studiare quindi la convergenza dell' integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Esercizio 6. Risolvere i seguenti integrali impropri:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{x}}\, dx$;

2. $\displaystyle\int_0^1 \log x\ dx$;

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$;

4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{(1 + x)^2}\, dx$;

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x(x + \sin x)\, dx$;

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^3}\, dx$;

7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^3 x}\, dx$;

8. $\displaystyle\int_0^1 x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\, dx;$

9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\frac{1}{x}\, dx;$

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\, dx.$

Soluzioni

Esercizio 1. (h) Applichiamo il metodo di separazione delle variabili: moltiplichiamo a destra e a sinistra per $x(t)$ ed otteniamo

$$\dot{x}(t) = \frac{3t^2}{x(t)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{x}(t)x(t) = 3t^2.$$

Applichiamo l'operatore di integrazione in dt ad ambedue i membri:

$$\int \dot{x}(t)x(t)\ dt = \int 3t^2\ dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\int 2\dot{x}(t)x(t)\ dt = 3\int t^2\ dt.$$

Osserviamo che a sinistra abbiamo la funzione incognita moltiplicata due volte per la sua derivata. Risolvendo i due integrali otteniamo quindi:

$$\frac{(x(t))^2}{2} = t^3 + c,$$

quindi la soluzione è

$$x(t) = \sqrt{2t^3 + c}.$$

(o) Applichiamo il metodo di separazione delle variabili: moltiplichiamo a destra e sinistra per $(x(t))^{-3}$ ed otteniamo

$$\dot{x}(t) = -(x(t))^3 \sinh t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{x}(t)(x(t))^{-3} = -\sinh t.$$

Integrando ambedue i membri otteniamo quanto segue:

$$\int \dot{x}(t)(x(t))^{-3}\ dt = \int \sinh t\ dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{(x(t))^2} = -\cosh t + c,$$

quindi la soluzione è

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{\cosh t + c}}.$$

(l) Applichiamo il metodo di separazione delle variabili: dividiamo ambedue i membri per $\sqrt{1-(x(t))^2}$ ed otteniamo:

$$\dot{x}(t) = \left(\sqrt{1-(x(t))^2}\right)\sin t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1-(x(t))^2}} = \cos t$$

Integrando ambedue i membri in dt otteniamo

$$\int \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1-(x(t))^2}}\ dt = \int \cos t\ dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad \arcsin(x(t)) = \sin t + c.$$

La soluzione è dunque

$$x(t) = \sin(\sin t + c).$$

(i) Applichiamo il metodo di separazione delle variabili: dividiamo ambedue i membri per $1 + (x(t))^2$ ed otteniamo:

$$\dot{x}(t) = (1 + (x(t))^2) \sin t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\dot{x}(t)}{1 + (x(t))^2} = \sin t.$$

Integrando ambedue i membri in dt otteniamo

$$\int \frac{\dot{x}(t)}{1 + (x(t))^2}\ dt = \int \sin t\ dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad \arctan(x(t)) = -\cos t + c,$$

quindi la soluzione è

$$x(t) = \tan(-\cos t + c).$$

(d) Applichiamo il metodo della separazione delle variabili come segue:

$$(t^2 + 1)\dot{x}(t) + (x(t))^2 = 0 \Longleftrightarrow (t^2 + 1)\dot{x}(t) = -(x(t))^2 \Longleftrightarrow \dot{x}(t)(x(t))^{-2} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Integriamo ambedue i membri in dt ed otteniamo:

$$\int \dot{x}(t)(x(t))^{-2}\ dt = \int \frac{1}{1 + t^2}\ dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{x(t)} = \arctan t + c,$$

quindi la soluzione è

$$x(t) = \frac{1}{\arctan t + c}.$$

(a) Questa equazione differenziale è del tipo

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = f(t).$$

Per risolverla l'idea è quella di moltiplicare ambedue i membri per la funzione $e^{A(t)}$ dove

$$A(t) = \int a(t)\ dt,$$

cosìcché

$$e^{A(t)}(\dot{x}(t) + a(t)x(t)) = \frac{d}{dt}(e^{A(t)}x(t)) = f(t)e^{A(t)}$$

e il risultato dell'equazione differenziale altro non è che

$$x(t) = e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)}\ dt.$$

Nel nostro caso $f(t) = t$ e $a(t) = 2t$, quindi la funzione $A(t)$ è data da

$$A(t) = \int 2t\ dt = t^2.$$

Osserviamo che non mettiamo il fattore $+c$ in quanto per il nostro fine è sufficiente scegliere una primitiva sola, quindi scegliamo quella in cui $c = 0$ per semplicità. Moltiplichiamo dunque ambedue i membri per e^{t^2} ed otteniamo che la soluzione dell'equazione differenziale è

$$x(t) = e^{-t^2} \int te^{t^2}\ dt = e^{-t^2}\left(\frac{e^{t^2}}{2} + c\right).$$

(y) Risolviamo questa equazione differenziale con lo stesso metodo del punto precedente, accorgendoci che $a(t) = 1$ e $f(t) = t^3$. Dato che

$$A(t) = \int dt = t$$

il risultato, integrando più volte per parti a destra, è dunque

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-t} \int t^3 e^t \, dt = \\
&= t^3 e^t - 3 \int t^2 e^t \, dt = \\
&= t^3 e^t - 3 \left(t^2 e^t - 2 \int t e^t \, dt \right) = \\
&= t^3 e^t - 3 \left(t^2 e^t - 2 \left(t e^t - \int e^t \, dt \right) \right) = \\
&= t^3 e^t - 3 \left(t^2 e^t - 2 \left(t e^t - e^t + c \right) \right) = \\
&= t^3 e^t - 3t^2 e^t + 6te^t - 6e^t + c.
\end{aligned}$$

(s) Dividiamo tutto per $\sin t$. Otteniamo

$$\dot{x}(t) + \frac{\cos t}{\sin t} x(t) = e^t.$$

Ci accorgiamo di essere ancora una volta di fronte ad un'equazione differenziale della forma

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = f(t),$$

dove $a(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$ e $f(t) = e^t$. Poiché si ha che

$$A(t) = \int \frac{\cos t}{\sin t} \, dt = \log |\sin t|,$$

la soluzione generale è data (studiando il caso in cui $\sin t \geq 0$) da:

$$x(t) = e^{-\log(\sin t)} \int e^{\log(\sin t)} e^t \, dt = \frac{1}{\sin t} \int \sin t e^t \, dt.$$

Calcoliamo per parti:

$$\begin{aligned}
\int \sin t e^t \, dt &= \sin t e^t - \int \cos t e^t \, dt = \\
&= \sin t e^t - \left(\cos t e^t + \int \sin t e^t \, dt \right) = \\
&= \sin t e^t - \cos t e^t - \int \sin t e^t \, dt.
\end{aligned}$$

Portando l'integrale al primo membro deduciamo che

$$\int \sin t \, dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + c,$$

quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$x(t) = \frac{1}{2 \sin t} (e^t (\sin t - \cos t) + c).$$

Esercizio 2. 1. Procediamo per integrazione diretta. Poiché il dato iniziale è fissato al tempo $t = 0$, calcoliamo l'integrale definito in ds tra 0 e t, ossia:

$$\int_0^t \dot{x}(s)\, ds = \int_0^t e^s + s\, ds \Longleftrightarrow x(t) - x(0) = \left[e^s + \frac{s^2}{2}\right]_0^t \Longleftrightarrow x(t) - 10 = e^t + \frac{t^2}{2} - 1.$$

La soluzione è dunque

$$x(t) = e^t + \frac{t^2}{2} + 9.$$

2. Procediamo per seprazione di variabili e, poiché il dato iniziale è fissato al tempo $t = 1$, calcoliamo l'integrale definito in ds tra 1 e t, ossia:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x^2} \\ x(1) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}x^{-2} = 1 \\ x(1) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \int_1^t \dot{x}(s)x^{-2}(s)\, ds = \int_1^t ds \Longleftrightarrow$$
$$-\frac{1}{x(t)} + 1 = t - 1.$$

La soluzione è dunque

$$x(t) = \frac{1}{2 - t}.$$

3. Procediamo per separazione di variabili ricordando che $\frac{1}{\tan x} = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$$\begin{cases} \dot{x} + t\tan x = 0 \\ x(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\dot{x}}{\tan x} = -t \\ x(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Otteniamo dunque

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{\tan(x(s))}\, ds = -\int_0^t ds \Longleftrightarrow \int_0^t \dot{x}(s)\frac{\cos(x(s))}{\sin(x(s))}\, ds = -\int_0^t ds \Longleftrightarrow$$
$$[\log(\sin(x(s)))]_0^t = -t \Longleftrightarrow \log(\sin(x(t))) = -t$$

La soluzione è dunque

$$x(t) = \arcsin(e^{-t}).$$

4. Risolviamo per separazione di variabili:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{tx}{(t-1)^2} \\ x(2) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\dot{x}}{x} = \frac{t}{(t-1)^2} \end{cases}.$$

Otteniamo dunque:

$$\int_2^t \frac{\dot{x}(s)}{x(s)}\, ds = \int_2^t \frac{s}{(s-1)^2}\, ds \Longleftrightarrow \log(x(t)) = \int_2^t \frac{s}{(s-1)^2}\, ds.$$

Risolviamo l'integrale di destra come segue:

$$\begin{aligned} \int_2^t \frac{s}{(s-1)^2}\, ds &= \int_2^t \frac{s}{s^2 - 2s + 1}\, ds = \frac{1}{2}\int_2^t \frac{2(t+1-1)}{s^2 - 2s + 1}\, ds = \\ &= \frac{1}{2}\int_2^t \frac{2s - 2}{s^2 - 2s + 1}\, ds - \int_2^t \frac{ds}{(s-1)^2} = \\ &= \frac{1}{2}\log((t-1)^2) - \frac{1}{t-1} + 1 = \\ &= \log(t-1) - \frac{1}{t-1} + 1. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque
$$\log(x(t)) = e^{\log(t-1)-\frac{1}{t-1}+1}.$$
La soluzione è dunque
$$x(t) = (t-1)e^{1-\frac{1}{t-1}}.$$

5. Riscriviamo la soluzione dell'equazione differenziale come segue:
$$\begin{cases} \dot{x} = xt + 2t \\ x(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} - tx = 2t \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$
Siamo di fronte ad un equazione differenziale del tipo
$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = f(t),$$
la cui soluzione (tenendo a mente che il dato iniziale è in $t = 0$) è
$$x(t) = e^{-A(t)}e^{A(0)}x(0) + e^{-A(t)}\int_0^t e^{A(t)}f(t)\ dt, \qquad \text{con } A(t) = \int a(t)\ dt.$$
Nel nostro caso $a(t) = -t$, quindi
$$A(t) = \int -t\ dt = -\frac{t^2}{2}.$$
La soluzione è dunque
$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}2t\ dt = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2}\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}+1\right).$$

6. Risolviamo per separazione di variabili:
$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\frac{x-1}{t-1}\right)^2 \\ x(0) = e \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x}(x-1)^{-2} = (t-1)^{-2} \\ x(0) = e \end{cases}.$$
Otteniamo
$$\int_0^t \dot{x}(s)(x(s)-1)^{-2}\ ds = \int_0^t (s-1)^{-2}\ ds \iff -\frac{1}{x(t)-1} + \frac{1}{e-1} = -\frac{1}{t-1} - 1.$$
Risolvendo l'equazione e ricavando $x(t)$ otteniamo che
$$x(t) = \frac{2et - t - e}{et - 1}.$$

7. Risolviamo per separazione di variabili:
$$\begin{cases} t\dot{x} = \sqrt{x^2-1} \\ x(1) = \pi \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\dot{x}}{\sqrt{x^2-1}} = \pi \end{cases}.$$
Otteniamo dunque
$$\int_1^t \frac{\dot{x}(s)}{\sqrt{(x(s))^2-1}}\ ds = \int_1^t s\ ds,$$
da cui
$$\operatorname{arcosh}(x(t)) - \operatorname{arcosh}(\pi) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}.$$
La soluzione è dunque
$$x(t) = \cosh\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + \operatorname{arcosh}(\pi)\right).$$

8. Riscriviamo l'equazione differenziale come segue:

$$\begin{cases} \dot{x} - \cos(2t)x = (\sin t)^2 - \frac{1}{2} \\ x(0) = -2 \end{cases} .$$

Ci troviamo di fronte, nuovamente, ad una equazione differenziale della forma

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = f(t).$$

Calcoliamo

$$A(t) = \int a(t)\ dt = \int \cos 2t = \frac{1}{2}\sin 2t.$$

La soluzione è dunque

$$\begin{aligned} x(t) &= -2e^{-\frac{\sin 2t}{2}} + \int_0^t e^{-\frac{\sin 2s}{2}} \left((\sin s)^2 - \frac{1}{2}\right)\ ds = \\ &= -2e^{-\frac{\sin 2t}{2}} + \int_0^t e^{-\frac{\sin 2s}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2s}{2} - \frac{1}{2}\right)\ ds = \\ &= -2e^{-\frac{\sin 2t}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^t \cos 2s \cdot e^{-\frac{\sin 2s}{2}}\ ds = \\ &= -2e^{-\frac{\sin 2t}{2}} - \frac{\left(e^{-\frac{\sin 2t}{2}} + 1\right)}{2}. \end{aligned}$$

9. Siamo di nuovo di fronte ad un'equazione differenziale della forma

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = f(t).$$

Calcoliamo

$$A(t) = \int a(t)\ dt = \int \log t\ dt = t\log t - t = t(\log t - 1).$$

La soluzione, tenendo a mente che il dato iniziale è in $t = e$, è dunque

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{t(\log t - 1)} + e^t(1 - \log t)\int_e^t e^{t(\log t-1)} \log t\ dt = \\ &= 2e^{t(\log t-1)} + e^{t(1-\log t)}(e^{t(\log t-1)} - 1). \end{aligned}$$

10. Riscriviamo l'equazione differenziale come segue:

$$\begin{cases} \dot{x} - (\log t)x = t^t \\ x(e) = e^e + 7. \end{cases}$$

Siamo di nuovo di fronte ad un'equazione differenziale della forma

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = f(t).$$

Calcoliamo

$$A(t) = \int a(t)\ dt = \int -\log t\ dt = -(t\log t - t) = -t(\log t - 1).$$

La soluzine è dunque

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{t(1-\log t)}(e^e + 7) + e^{-t(\log t-1)} \int_0^t e^{s\log s} e^{1-s\log s}\ ds = \\ &= e^{t(1-\log t)}(e^e + 7) + e^{t(1-\log t)} \int_e^t e\ ds = \\ &= e^{t(1-\log t)}(e^e + 7) + e^{t(1-\log t)}(et - e^2). \end{aligned}$$

Esercizio 3. 1. • Se $a \leq 2$, l'integrale diverge, data la presenza del fattore $\frac{1}{x-2}$. Se $a > 2$, l'integrale converge perché il fattore $\frac{1}{\sqrt{|x-3|}}$ non dà problemi di integrazione impropria (al finito), mentre all'infinito la frazione integranda si comporta come $\frac{1}{x^{3/2}}$ e dunque converge;

- Per $a = 6$, mediante la sostituzione $\sqrt{x-3} = t$ l'integrale diventa:

$$\int_6^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{x-3}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)\, t}\, dt = 2\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = 2 \lim_{b\to+\infty} \int_{\sqrt{3}}^{b} \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= 2 \lim_{b\to+\infty} (\arctan b - \arctan\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

2. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{x}{(\sqrt{x^2+3})^n} \sim \frac{1}{x^{n-1}}$$

quindi l'integrale converge se $n - 1 > 1$, cioè se $n > 2$. Pertanto il più piccolo valore di $n \in \mathbf{N}$ per cui l'integrale converge è $n = 3$. In tal caso:

$$\int \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^3} dx = \frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+3\right)^{-3/2}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} + c.$$

Dunque:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}\, dx = -\lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+3}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Esercizio 4. 1. Calcoliamo l'integrale indefinito sfruttandone la linearità e la formula di integrazione per parti:

$$\int \left(x^3\left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}\right) dx = \int x^3\left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}}\, dx + 2\int xe^{-x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int 4x^3\left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}}\, dx + 2\int xe^{-x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{(8+x^4)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + 2\left(-x\cdot e^{-x} - \int (-e^{-x})\, dx\right) = -\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^4)^2}} - 2x\cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

Calcoliamo ora l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \left(x^3\left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}\right) dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} \left(x^3\left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}\right) dx =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+t^4)^2}} - 2\cdot e^{-t}(t+1) + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4} + 2\right] = \frac{3}{32} + 2 = \frac{67}{32};$$

(Si ricordi che $\lim_{t\to+\infty} e^{-t}(t+1) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t+1}{e^t} = 0$, in quanto il denominatore ha ordine di infinito superiore al numeratore);

2.

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = \int (\arctan x)(\arctan x)' dx = \frac{1}{2}\arctan^2 x + c$$

Pertanto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty} \left(\arctan^2 t - 0\right) = \frac{\pi^2}{8};$$

Esercizio 5. Per $x \to 0$, si ha:

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \wedge \log(1+\sqrt[3]{x}) \sim \sqrt[3]{x} \Longrightarrow \frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})} \sim \frac{x^2/2}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}.$$

Dunque, per $x \to 0, f(x)$ ha ordine di infinito $\frac{1}{3}$, e la sua parte principale è la funzione $g(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$. Prima di studiare la convergenza dell'integrale improprio, osserviamo che, per $x \in \mathbf{R}_+, f(x) \geq 0$. Inoltre:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x = \int_0^{\beta} \frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x + \int_\beta^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x \quad , \quad \forall \beta \in \mathbb{R}_+$$

In base allo studio fatto in precedenza, possiamo affermare che il primo addendo converge, perché, per $x \to 0$, $\quad f(x) \sim g(x)$ e l'integrale improprio $\int_0^\beta g(x)$ d x è convergente.

Per studiare la convergenza del secondo addendo $\int_\beta^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$, utilizziamo il criterio del confronto :

$$\frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})} \leq \frac{2}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})} \leq \frac{2}{x^2},$$

per β abbastanza grande (deve essere $\beta > (e-1)^3$). Poiché l'integrale improprio $\int_\beta^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ dx converge, anche il secondo addendo converge. Pertanto l'integrale di partenza $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$ è convergente.

Esercizio 6. 1. Applicando la sostituzione $x = t^2$ si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\ dx = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+t}\ dt = \int_0^1 \frac{2}{t+1}\ dt\,[2\log(t+1)]_0^1 = 2\log 2 = \log 4.$$

2. Integrando per parti (derivando $\log x$ e integrando 1) si ha

$$\int_0^1 \log x\ dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left([x\log x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\,[x\log x - x]_\varepsilon^1 - 1.$$

3. Applicando la sostituzione $1 - x^2 = t^2$ si ha

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int_0^1 \frac{(1-t^2)t}{t}\ dt = \int_0^1 (1-t^2)\ dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. Studiamo prima l'integrale indefinito.

Integrando per parti (derivando $\log x$ e integrando $\frac{1}{(1+x)^2}$) si ha

$$\int \frac{\log x}{(1+x)^2}\ dx = -\frac{1}{1+x}\log x + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\ dx.$$

Ora, utilizzando il metodo dei fratti semplici si ottiene:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A + Ax + Bx}{x(1+x)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}$$

da cui segue che

$$A = 1 \quad \text{e} \quad B = -1.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{(1+x)^2}\ dx &= -\frac{1}{1+x}\log x + \int \frac{1}{x}\ dx - \int \frac{1}{1+x}\ dx = \\ &= \frac{1}{1+x}\log x + \log x - \log\frac{1}{1+x} = \\ &= \frac{x}{1+x}\log x + \log(1+x).\end{aligned}$$

Tornando all'integrale di partenza, si ha che

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^2}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{x}{1+x}\log x + \log(1+x)\right]_2^t = +\infty.$$

5. Spezziamo in due l'integrale e studiamo prima l'integrale indefinito:

$$\int e^x(x+\sin x)\ dx = \int xe^x\ dx + \int \sin xe^x\ dx.$$

- Integrando per parti (derivando x e integrando e^x) si ha

$$\int xe^x\ dx = xe^x - \int e^x\ dx = e^x(x-1).$$

- Integrando due volte per parti (prima derivando $\sin x$ e integrando e^x e poi derivando $\cos x$ e integrando e^x) si ha

$$\int \sin xe^x\ dx = \sin xe^x - \int \cos xe^x\ dx = \sin xe^x - \cos xe^x - \int \sin xe^x\ dx$$

  da cui segue che

$$\int \sin xe^x\ dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x).$$

Unendo i due pezzi e aggiungendo gli estremi si ottiene

$$\int_{-\infty}^0 e^x(x+\sin x)\ dx = \lim_{t\to-\infty}\left[e^x\left(x-1+\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)\right)\right]_t^0 = -\frac{3}{2}.$$

6. Si noti che si può scrivere

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}\ dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)}\ dx.$$

Applicando il metodo dei fratti semplici si ha

$$\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{Ax^2-Ax+A+Bx+Bx^2+C+Cx}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)}$$

da cui segue che

$$A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3}\quad \text{e}\quad C=\frac{2}{3}.$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\, dx &= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\, dx - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{x-2}{x^2-x+1}\, dx = \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\, dx - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^2-x+1}\, dx + \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\, dx = \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\, dx - \frac{1}{6}\int_0^{+\infty} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\, dx = \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\, dx - \frac{1}{6}\int_0^{+\infty} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\, dx = \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\log(1+x) - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^t = \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\log\frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^t = \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\log\frac{1+t}{\sqrt{t^2-t+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi.
\end{aligned}$$

7. Applicando la sostituzione $\log x = y$ si ha

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^3 x}\, dx = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^3}\, dy = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{2y^2}\right]_{\log 2}^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}\right) + \frac{1}{2\log^2 2} = \frac{1}{2\log^2 2}.$$

8. Integrando per parti (derivando $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ e integrando x) si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx &= \left[\frac{x^2}{2}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx = \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\, dx = \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx = \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\log\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log(x+1)\right]_0^1 = \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\log(x+1) - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log(x+1)\right]_0^1 = \\
&= \left[\frac{x^2-1}{2}\log(x+1) - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

9. Studiamo prima l'integrale indefinito.

   Integrando per parti (derivando $\arctan\frac{1}{x}$ e integrando $\frac{1}{x^2}$) si ha

$$\int \frac{1}{x^2}\arctan\frac{1}{x}\, dx = -\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Ora, applicando il metodo dei fratti semplici si ottiene

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

da cui segue che

$$A = 1, \quad B = -1 \quad \text{e} \quad C = 0.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2} \arctan\frac{1}{x}\, dx &= -\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} - \int \frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \\
&= \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} - \log x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) = \\
&= -\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} + \log\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.
\end{aligned}$$

Aggiungendo gli estremi si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\arctan\frac{1}{x}\, dx &= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} + \log\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right]_1^t = \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}\arctan\frac{1}{t} + \log\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\right) + \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2} = \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2.
\end{aligned}$$

10. Studiamo prima l'integrale indefinito.

Integrando per parti (derivando $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ e integrando $\frac{1}{\sqrt{x}}$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\, dx = 2\sqrt{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + 2\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx.$$

Applicando nell'integrale la sostituzione $x = y^2$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\, dx &= 2\sqrt{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + 4\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \\
&= 2\sqrt{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + 4\arctan y = \\
&= 2\sqrt{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + 4\arctan\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Ora, aggiungendo gli estremi si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\, dx &= \lim_{t\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\left[2\sqrt{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + 4\arctan\sqrt{x}\right]_\varepsilon^t = \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(2\sqrt{t}\log\left(1+\frac{1}{t}\right) + 4\arctan\sqrt{t}\right) - \\
&\quad - \lim_{\varepsilon\to0}\left(2\sqrt{\varepsilon}\log\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) + 4\arctan\sqrt{\varepsilon}\right) \sim \\
&\sim \lim_{t\to+\infty}\left(2\sqrt{t}\frac{1}{t} + 4\arctan\sqrt{t}\right) - \\
&\quad - \lim_{\varepsilon\to0}\left(2\sqrt{\varepsilon}\left(\log(1+\varepsilon) - \log\varepsilon\right) + 4\arctan\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\pi.
\end{aligned}$$