Analisi Matematica 1 - I Appello - Soluzioni

Esercizio 1) [8 punti] Provare che la somma dei primi numeri dispari $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ vale n^2.
Ne proviamo la validitá per $n \in \mathbb{N}$ grazie al principio di induzione. Infatti per $n = 1$ la somma si riduce a 1 che coincide con 1^2. Se supponiamo la formula vera per n, abbiamo che nel caso $n + 1$ la somma si scrive come

$$1 + 3 + 5 + \ldots + [2(n + 1) - 1] = n^2 + [2(n + 1) - 1] = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

e la formula è quindi vera per $n + 1$. Dal principio di induzione abbiamo cosí mostrato che vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2) [8 punti] Determinare per $A = \{(-1)^n n^2+n^3 : n \in \mathbb{N}\}$ l'estremo inferiore/superiore, discutendo se si tratta di massimo/minimo.
Sia $a_n = (-1)^n n^2 + n^3$. Siccome $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, abbiamo che $\sup A = +\infty$. Vogliamo mostrare che $\inf A = 0$ ed è un minimo, in corrispondenza di $n = 1$. Infatti $a_1 = 0 \in A$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$a_n = (-1)^n n^2 + n^3 \geq n^3 - n^2 \geq 0.$$

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(1 + \frac{2}{n})^{(n+2)\log n}}{\sqrt{n^6 + n^4 + 1} - n^3}$.
Osserviamo prima di tutto che

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{2}{n})^{(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} [(1 + \frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}]^{2\frac{n+2}{n}} = e^2$$

e quindi dal teorema di permanenza del segno

$$(1 + \frac{2}{n})^{(n+2)\log n} \geq e^{\frac{3}{2}\log n} = n^{\frac{3}{2}}$$

per n opportunamente grande. Mediante razionalizzazione abbiamo che

$$\frac{(1 + \frac{2}{n})^{(n+2)\log n}}{\sqrt{n^6 + n^4 + 1} - n^3} \geq \frac{\sqrt{n^6 + n^4 + 1} + n^3}{n^4 + 1} n^{\frac{3}{2}} \to +\infty$$

per $n \to +\infty$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1 + \frac{2}{n})^{(n+2)\log n}}{\sqrt{n^6 + n^4 + 1} - n^3} = +\infty.$$

Esercizio 4) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{x}} - e^{\sin x}}{x^3}$.
Dagli sviluppi di Taylor noti abbiamo che $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$ e

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\log(1+\sin^2 x) &= \frac{1}{x}\log[1+(x-\frac{x^3}{6}+O(x^5))^2] = \frac{1}{x}\log[1+x^2-\frac{x^4}{3}+O(x^6)]\\ &= \frac{1}{x}[x^2-\frac{5x^4}{6}+O(x^6)] = x-\frac{5x^3}{6}+O(x^5)\end{aligned}$$

per $x \to 0$. Dal limite notevole dell'esponenziale bbiamo quindi che

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{x}} - e^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\frac{5x^3}{6}+O(x^5)} - e^{x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{2x^3}{3}+O(x^5)}-1}{x^3} = -\frac{2}{3}.$$

Esercizio 5) [16 punti] Determinare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2-1}}$.
Poniamo $x^2-1=(x+t)^2$, ossia scegliamo $t=\sqrt{x^2-1}-x$ o $x=-\frac{1+t^2}{2t}$. Siccome $dx = -\frac{t^2-1}{2t^2}dt$ dal cambio di variabile otteniamo che

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{t^2-1}{t(t^2+2t-1)}dt\Big|_{t=\sqrt{x^2-1}-x}$$

e dal metodo dei fratti semplici ricaviamo che

$$-\int \frac{t^2-1}{t(t^2+2t-1)}dt = \int[-\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{t+1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{t+1-\sqrt{2}}]dt = -\log|t|+\frac{1}{\sqrt{2}}\log|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}|+c.$$

Nella variabile di partenza abbiamo che

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2-1}} = -\log|\sqrt{x^2-1}-x| + \frac{1}{\sqrt{2}}\log|\frac{\sqrt{x^2-1}-x+1-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}-x+1+\sqrt{2}}| + c.$$

Esercizio 6) [16 punti] Determinare la soluzione di $x'\sin t + \cos x = 0$ con $x(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{6}$.
Siccome $\cos x_0 \neq 0$ con $x_0 = \frac{\pi}{6}$, per t vicini a $t_0 = \frac{\pi}{2}$ l'equazione puó essere riscritta separando le variabili

$$\frac{x'}{\cos x} = -\frac{1}{\sin t}. \tag{1}$$

Calcoliamo a parte le seguenti primitive:

$$\int \frac{ds}{\sin s} = \int \frac{\sin s}{1-\cos^2 s}ds = \int \frac{dr}{r^2-1}\Big|_{r=\cos s} = \frac{1}{2}\int[\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r+1}]\Big|_{r=\cos s} = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos s}{1+\cos s}+c$$

e

$$\int \frac{ds}{\cos s} = \int \frac{\cos s}{1-\sin^2 s}ds = -\int \frac{dr}{r^2-1}\Big|_{r=\sin s} = -\frac{1}{2}\int[\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r+1}]\Big|_{r=\sin s} = -\frac{1}{2}\log\frac{1-\sin s}{1+\sin s}+c.$$

Integrando tra $\frac{\pi}{2}$ e t l'equazione (1) otteniamo che

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{x(t)} \frac{ds}{\cos s} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{x'(s)}{\cos x(s)}ds = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{ds}{\sin s}$$

ed abbiamo quindi che

$$-\frac{1}{2}\log\frac{1-\sin x(t)}{1+\sin x(t)}-\frac{1}{2}\log 3=-\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos t}{1+\cos t}.$$

Riscrivendo tale relazione come

$$\frac{1-\sin x(t)}{1+\sin x(t)}=\frac{1-\cos t}{3(1+\cos t)}$$

ed esplicitando $x(t)$, otteniamo che

$$x(t)=\arcsin\frac{1+2\cos t}{2+\cos t}.$$

Esercizio 7) [16 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x)=xe^{\frac{1}{1-|x|}}$.
Dominio $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$
Intersezione assi e segno di f $\{f>0\}=(0,+\infty)$, $(0,0)$
Asintoti $x=\pm1$ asintoto verticale, asintoto obliquo $y=x\mp1$ a $\pm\infty$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=0,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to(-1)^+}f(x)=-\infty$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to+\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\pm\infty}x\Big(e^{\frac{1}{1-|x|}}-1\Big)=\mp1$$

Monotonia di f

$$f'(x)=e^{\frac{1}{1-x}}\frac{x^2-x+1}{(1-x)^2}\ \text{per } x>0,\quad f'(x)=f'(-x)\ \text{per } x<0,\quad \{f'>0\}=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$$

Convessitá di f

$$f''(x)=e^{\frac{1}{1-x}}\frac{2-x}{(1-x)^4}\ \text{per } x>0,\quad f''(x)=-f''(-x)\ \text{per } x<0,\quad \{f''>0\}=(-\infty,-2)\cup(0,2)$$