Analisi Matematica 1 - II Appello - Soluzioni

Esercizio 1) [8 punti] Provare che $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ è divisibile per 21 per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Ne proviamo la validitá per $n \in \mathbb{N}$ grazie al principio di induzione. Infatti $4^{n+1} + 5^{2n-1} = 21$ per $n = 1$ è divisibile per 21. Se supponiamo la proprietá vera per n, abbiamo che nel caso $n+1$ possiamo scrivere $4^{n+2} + 5^{2n+1}$ come $-21 \cdot 4^{n+1} + 25(5^{2n-1} + 4^{n+1})$, che risulta divisibile per 21 come somma di due numeri entrambi divisibili per 21. Dal principio di induzione abbiamo cosí mostrato che la proprietá vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2) [8 punti] Determinare per $A = \{(-1)^n \frac{5n+1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ l'estremo inferiore/superiore, discutendo se si tratta di massimo/minimo.
Sia $a_n = (-1)^n \frac{5n+1}{n^2}$. Siccome $\frac{5n+1}{n^2} = \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0$ per $n \to +\infty$ in modo decrescente, abbiamo che $\sup A = \max A = a_2 = \frac{11}{4}$ e $\inf A = \min A = a_1 = -6$.

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + (1 + \frac{2\log 2}{n})^{n^2}}$.
Osserviamo prima di tutto che

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{2\log 2}{n})^n = \lim_{n\to+\infty} [(1 + \frac{2\log 2}{n})^{\frac{n}{2\log 2}}]^{2\log 2} = e^{2\log 2} = 4.$$

Abbiamo quindi che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + (1 + \frac{2\log 2}{n})^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{2\log 2}{n})^n \sqrt[n]{1 + [\frac{3}{(1 + \frac{2\log 2}{n})^n}]^n} = 4$$

poiché $3(1 + \frac{2\log 2}{n})^{-n} \to \frac{3}{4} < 1$ per $n \to +\infty$.

Esercizio 4) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\cos x} - \log^2(1+\sqrt{x}) - 1}{\sqrt{\sin x - x\cos x}}$.
Dagli sviluppi di Taylor noti abbiamo che

$$\frac{e^{x\cos x} - \log^2(1+\sqrt{x}) - 1}{\sqrt{\sin x - x\cos x}} = \frac{e^{x+O(x^3)} - (\sqrt{x} - \frac{x}{2} + O(x^{\frac{3}{2}}))^2 - 1}{\sqrt{x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + O(x^5)}}$$
$$= \frac{1 + x + O(x^2) - (x - x\sqrt{x} + O(x^2)) - 1}{\sqrt{\frac{x^3}{3} + O(x^5)}} = \sqrt{3}\frac{1 + O(\sqrt{x})}{\sqrt{1 + O(x^2)}}$$

per $x > 0$ e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\cos x} - \log^2(1+\sqrt{x}) - 1}{\sqrt{\sin x - x\cos x}} = \sqrt{3}.$$

Esercizio 5) [12 punti] Determinare l'integrale indefinito $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x} dx$.
Poniamo $t = \tan \frac{x}{2}$. Siccome $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, dal cambio di variabile

otteniamo che

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x} dx = -\int \frac{t^2+2t-1}{t(t^2-1)} dt\Big|_{t=\tan\frac{x}{2}}$$

e dal metodo dei fratti semplici ricaviamo che

$$-\int \frac{t^2+2t-1}{t(t^2-1)} dt = \int [-\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}] dt = -\log|\frac{t(t-1)}{t+1}| + c.$$

Nella variabile di partenza abbiamo che

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x} dx = -\log|\frac{\tan\frac{x}{2}(\tan\frac{x}{2}-1)}{\tan\frac{x}{2}+1}| + c.$$

Esercizio 6) [16 punti] Determinare la soluzione di $x''-2x'+x = \frac{e^t}{t}$ con $x(1) = 0$, $x'(1) = -e$. Risolvendo il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, otteniamo che $\lambda = 1$ è una radice doppia e quindi le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono della forma $x_{om} = c_1e^t + c_2te^t$. Dal metodo di variazione delle costanti cerchiamo la soluzione particolare della forma $\bar{x} = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$, ove $c_1(t)$ e $c_2(t)$ risolvono il sistema

$$c_1'e^t + c_2'te^t = 0,\ c_1'e^t + c_2'(t+1)e^t = \frac{e^t}{t}.$$

Siccome $c_1' = -1$ e $c_2' = \frac{1}{t}$, otteniamo che $c_1(t) = -t$ e $c_2(t) = \log|t|$, e quindi la soluzione particolare cercata ha la forma $\bar{x}(t) = te^t(\log|t|-1)$. La soluzione generale ha la forma $c_1e^t + c_2te^t + \bar{x}(t)$. Imponendo le condizioni iniziali $x(1) = 0$ e $x'(1) = -e$ otteniamo $c_1 + c_2 - 1 = 0$ e $c_1 + 2c_2 - 1 = -1$, che ha soluzioni $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$. La soluzione richiesta è quindi

$$x(t) = 2e^t + te^t(\log|t| - 2).$$

Esercizio 7) [16 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}\Big|1 + \frac{1}{\log x}\Big|$.

Dominio $(0,1) \cup (1,+\infty)$

Intersezione assi e segno di f $\{f > 0\} = (0,e^{-1}) \cup (e^{-1},1) \cup (1,+\infty)$, $(e^{-1},0)$

Asintoti $x = 1$ asintoto verticale, no asintoto obliquo a $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Monotonia di f

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\log^2 x + \log x - 2}{2\sqrt{x}\log^2 x} & \text{per } 0 < x < e^{-1} \text{ o } x > 1 \\ -\frac{\log^2 x + \log x - 2}{2\sqrt{x}\log^2 x} & \text{per } e^{-1} < x < 1 \end{cases}, \quad \{f' > 0\} = (0,e^{-2}) \cup (e^{-1},1) \cup (e,+\infty)$$

Convessitá di f

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{\log^3 x + \log^2 x - 8}{4x^{\frac{3}{2}}\log^3 x} & \text{per } 0 < x < e^{-1} \text{ o } x > 1 \\ \frac{\log^3 x + \log^2 x - 8}{4x^{\frac{3}{2}}\log^3 x} & \text{per } e^{-1} < x < 1 \end{cases}, \quad \{f'' > 0\} = (e^{-1},1) \cup (1,e^{t_0})$$

ove $t_0 \in (1,2)$ è l'unico zero in $\mathbb{R}$ di $t^3 + t^2 - 8$